

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»**

ВЫСШАЯ ШКОЛА ТЕХНОЛОГИИ И ЭНЕРГЕТИКИ

В.П. Яковлев, Н.Л. Леонова

**ПРАКТИКУМ
ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ
Часть I**

Учебное пособие

**Санкт-Петербург
2019**

В.П. Яковлев, Н.Л. Леонова

**ПРАКТИКУМ
ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ
Часть I**

Учебное пособие

**Санкт-Петербург
2019**

УДК 51(076)

ББК 22.1я7

Я 474

Яковлев В.П., Леонова Н.Л. Практикум по дискретной математике: учебное пособие. Часть I. / ВШТЭ СПбГУПТД. - СПб., 2019. – 50 с.

В учебном пособии собраны задачи и минимально необходимый для их решения теоретический материал по дисциплине «Дискретная математика». Целью данного пособия является формирование у студентов практических навыков в решении задач. Рассмотрены типовые задачи следующих разделов математики: множества, элементы комбинаторики, отношения, алгебра логики.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика».

Рецензенты: профессор кафедры прикладной математики и информатики ВШТЭ Санкт-Петербургского государственного университета промышленных технологий и дизайна, д-р техн. наук, доцент В.М. Пестриков;

заведующий кафедрой информационно-измерительных систем и технологий Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета, д-р техн. наук, профессор В.В. Алексеев.

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом ВШТЭ в качестве учебного пособия

© Высшая школа технологии и энергетики СПбГУПТД, 2019

© Яковлев В.П.

Леонова Н.Л., 2019

Редактор и корректор Т.А. Смирнова

Техн. редактор Л.Я. Титова

Темплан 2019, поз. 12.

Подп. к печати 06.02.2019 г. Формат 60x84/16. Бумага тип № 1.

Печать офсетная. Объем 3,25 печ.л.; 3,25 уч.- изд.л. Тираж 30 экз. Изд. № 12.

Цена “С”. Заказ № .

Ризограф Высшей школы технологии и энергетики СПбГУПТД, СПб, 198095, ул. Ивана Черных, 4.

ВВЕДЕНИЕ

Современный этап развития математики характеризуется появлением большого количества новых прикладных дисциплин. К таким дисциплинам относится «Дискретная математика». В широком смысле дискретная математика включает в себя такие разделы, как: теория чисел, общая алгебра, математическая логика, комбинаторный анализ, теория графов, теория кодирования, целочисленное программирование, теория функциональных систем и др.

Дискретность (от латинского *discretus* – разделенный, прерывистый) нередко противопоставляют непрерывности. Однако при решении сложных практических задач дискретные и непрерывные методы используются совместно и весьма эффективно, взаимно обогащая друг друга.

Становление и развитие дискретной математики связаны также с повсеместным распространением кибернетических систем, языком описания которых она является. Кроме того, дискретная математика является теоретической базой информатики, которая все глубже и глубже проникает не только в науку и технику, но и в повседневную жизнь.

Изучение дисциплины «Дискретная математика» является важным этапом подготовки бакалавров по направлению 01.03.02 «Прикладная математика и информатика». При этом решение практических задач помогает закрепить теоретические знания, полученные студентами на лекциях.

В первую часть практикума вошли разделы: множества, элементы комбинаторики, отношения, алгебра логики и функции алгебры логики.

В ходе изложения материала уделяется внимание краткому изложению учебного материала, являющегося основой для правильного понимания методики решения задач. Рассмотрены примеры решения типовых задач.

Структура и содержание пособия обусловлены порядком изучения тем в соответствующем учебном курсе, предлагаемом студентам. При подготовке учебного пособия использован опыт проведения занятий авторами, полученный ими в ходе обучения студентов в СПбГУПТД и других учебных заведениях.

1. МНОЖЕСТВА

1.1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Понятие «множества» относится к числу *первичных* понятий в математике, его нельзя определить чрез другие понятия. Множество состоит из элементов и полностью определяется ими. Принадлежность элемента x множеству A обозначают $x \in A$.

Способы задания множеств. Множества могут быть заданы тремя основными способами.

1. Перечислением элементов множества. Например, $A = \{2, 7, 10\}$.
2. Указанием характерных свойств элементов множества. Например, $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$ – множество всех положительных чисел.
3. Описанием способа построения. Например, $A = \{5^i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$.

Отношения между множествами. Два множества *равны*, если они состоят из одних и тех же элементов. Равенство множеств обозначается как $A = B$. Если множества не равны, то пишут $A \neq B$.

Если каждый элемент множества A является элементом множества B , то пишут $A \subseteq B$ (A является *подмножеством* множества B).

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то пишут $A \subset B$ (множество A является *собственным подмножеством* множества B).

Для числовых множеств выполняется $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$.

Считается, что $\emptyset \subset A$ для любого множества A .

Теорема. Множество A равно множеству B тогда и только тогда, если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Данная теорема дает метод доказательства равенства двух множеств.

Если все рассматриваемые множества являются подмножествами более широкого множества U , то множество U называется *универсальным множеством*.

Счетные и несчетные множества. В теории множеств *счётное множество* есть бесконечное множество, элементы которого возможно *пронумеровать* натуральными числами.

Несчётное множество — такое бесконечное множество, которое не является счётным. Таким образом, любое множество является либо конечным, либо счётным, либо несчётным.

Натуральный ряд чисел и множество всех целых чисел (Z) являются *счётными* множествами.

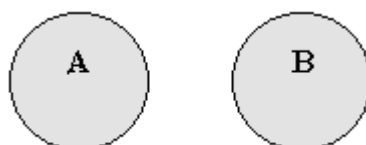
Множество всех действительных чисел на интервале $0 < x \leq 1$ – **несчетно**.

Несчетным является множество всех действительных чисел любого интервала.

Диаграммы Венна. Для повышения наглядности представления множеств используют диаграммы Венна в виде кругов, ограничивающих области, которым ставятся в соответствие элементы тех или иных множеств.

Например:

Если множества не имеют общих элементов, то их изображают



непересекающимися кругами. В противном случае, круги пересекаются. Универсальное множество изображают в виде прямоугольника.

Операции над множествами. Декартовым произведением множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$ называется множество всех упорядоченных наборов $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ таких, что $x_i \in A_i$ при $i=1, 2, \dots, n$. Декартово произведение обозначается $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$. В частности, $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$.

Например, пусть имеются множества $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$. Тогда $A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$.

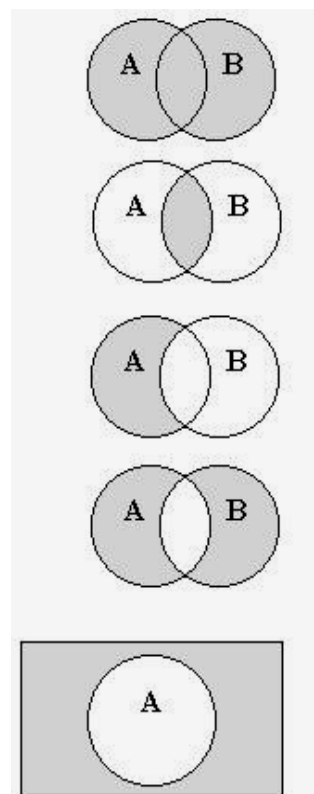
Объединением множеств A и B называется множество $A \cup B = \{x | x \in A \text{ или } x \in B\}$.

Пересечением множеств A и B называется множество $A \cap B = \{x | x \in A \text{ и } x \in B\}$.

Разностью множеств A и B называется множество $A \setminus B = \{x | x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

Симметрической разностью множеств A и B называется множество $A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Дополнением множества A называется множество $\bar{A} = U \setminus A$.



Области, соответствующие введенным понятиям, заштрихованы на диаграммах темным цветом.

Свойства операций над множествами. Введенные операции под множествами обладают следующими свойствами.

1. Коммутативность

$$A \cup B = B \cup A;$$

$$A \cap B = B \cap A.$$

2. Ассоциативность

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

3. Дистрибутивность

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

4. Идемпотентность

$$A \cap A = A; \quad A \cup A = A.$$

5. Двойственность (законы де Моргана)

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}; \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

6. Операции с пустым множеством

$$A \cup \emptyset = A; \quad A \cap \emptyset = \emptyset.$$

7. Операции с универсальным множеством

$$A \cup U = U; \quad A \cap U = A.$$

8. Операции с дополнением

$$\overline{\bar{A}} = A; \quad A \cup \bar{A} = U; \quad A \cap \bar{A} = \emptyset.$$

9. Определение разности через пересечение

$$A \setminus B = A \cap \bar{B}.$$

10. Поглощение

$$A \cup (A \cap B) = A; \quad A \cap (A \cup B) = A.$$

Прямое (декартовое) произведение множеств A и B называют множеством, обозначаемое $A \times B$ и состоящее из всех тех и только тех упорядоченных пар, первая компонента которых принадлежит множеству A , а вторая множеству B .

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

Декартово произведение имеет следующие свойства:

$$1) A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C);$$

$$2) A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C);$$

3) $A \times \emptyset = \emptyset \times A$.

4) $A \times B \neq B \times A$.

Мощность прямого произведения множеств A и B равна произведению мощностей этих множеств $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Пример 1.1. Пусть $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3, 4\}$.

Тогда $A \times B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4)\}$.

Геометрическая иллюстрация:

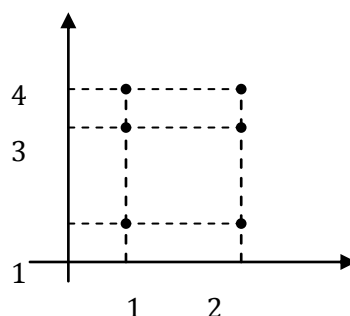


Рис. 1.1

1.2. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1.1. Равны ли множества?

- а) $\{2; 3; 5; 6\}$ и $\{5; 3; 2; 6\}$;
- б) $\{2; 6; 7\}$ и $\{2; 6; 6; 7\}$;
- в) $\{2; 3\}$ и $\{\{2; 3\}\}$;
- г) $\{x \mid x \in R, x^2 - 1 = 0\}$ и $\{-1; 1\}$;
- д) $\{\{0; 1\}, \{0; 2\}\}$ и $\{0; 1; 2\}$.

1.2. Дано множество $A = \{1; 2; 3\}$.

- а) Записать все подмножества множества A . Определить их число.
- б) Сколько элементов будет содержать множество $P(B)$, если множество B состоит из четырех элементов?

1.3. Пусть A — множество делителей числа 15;

B — множество простых чисел, меньших 10;

C — множество четных чисел, меньших 9.

Перечислить элементы этих множеств и найти: а) $A \cup B$; б) $A \cap C$; в) $B \cap C$; г) $(A \cup C) \cap B$; д) $C \setminus A$.

1.4. Записать множества A, B и C перечислением их элементов и найти:

- а) $A \cup B$; б) $B \cap C$; в) $(A \cup B) \cap C$; г) $A \cap B \cap C$; д) $A \setminus C$; е) $A \otimes C$,

если A — множество делителей числа 12; B — множество корней уравнения $x^2 - 6x + 5 = 0$; C — множество нечетных чисел x таких, что $3 \leq x \leq 12$.

- 1.5. Записать множества A , B и C и найти: а) $A \cup B$; б) $B \cap C$; в) $(A \cup B) \cap C$; г) $A \cap B \cap C$; д) $C \otimes B$, если A — множество четных чисел x , $3 < x < 10$; B — множество делителей числа 21; C — множество простых чисел, меньших 12.
- 1.6. Записать множества $M \setminus K$ и $K \setminus M$, если $M = \{x | x \in \mathbb{Z}, -5 \leq x \leq 7\}$, $K = \{x | x \in \mathbb{N}, 4 \leq x \leq 12\}$.
- 1.7. Известны множества $A = \{x | x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{R}, 1 \leq x \leq 3\}$. Записать множества а) $A \cup B$; б) $A \cap B$; в) $A \setminus B$; г) $B \setminus A$.
- 1.8. Пусть A , B и C — подмножества множества R , представляющие собой числовые промежутки $[-1; 1]$; $(-\infty; 0)$; $[0; 2)$ соответственно. Найти следующие множества: а) $A \cup C$; б) $A \cap B$; в) $A \cup B \cup C$; г) $(A \cup B) \cap C$; д) $B \cap C$.
- 1.9. Даны множества A , B и C — подмножества множества R , представляющие собой числовые промежутки $[0; 3]$; $(1; 5)$; $(-2; 0]$ соответственно. Найти и изобразить на прямой следующие множества: а) $A \cup B$; б) $A \cap C$; в) $B \cup C$; г) $A \cap B \cap C$; д) $(A \cup B) \cap C$.
- 1.10. Даны множества A , B и C — подмножества множества R , представляющие собой числовые промежутки $(-\infty; 1]$; $[1; \infty)$; $(0; 1)$ соответственно. Найти и изобразить на прямой следующие множества: а) $A \cup B$; б) $A \cap B$; в) $A \cap C$; г) $B \cup C$; д) $A \cap B \cap C$; е) $(A \cup B) \cap C$.
- 1.11. Множества A и B — подмножества множества R , представляющие собой числовые промежутки $(-1; 0]$; $[0; 2)$ соответственно. Найти и изобразить на координатной прямой множества: а) $A \cup B$; б) $A \cap B$; в) $A \cup \bar{B}$; г) $\bar{A} \cap B$; д) $\overline{A \cup B}$.
- 1.12. Множества A и B — подмножества множества R , представляющие собой числовые промежутки $[0; 3)$; $(-1; \infty)$ соответственно. Найти и изобразить на координатной прямой множества: а) $A \cup B$; б) $A \cap B$; в) $A \cup \bar{B}$; г) $\bar{A} \cap B$; д) $\overline{A \cup B}$.
- 1.13. Множества A и B являются подмножествами множества U (рис. 1.1). С помощью диаграмм Эйлера — Венна изобразить множества:
 - а) $A \cup \bar{B}$, $\overline{A \cup B}$;
 - б) $\bar{A} \cup \bar{B}$, $\bar{A} \cup B$;

в) $A \cap B, \overline{A \cup B}$;

г) $\overline{A \cap B}, (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{B})$.

1.14. Начертить фигуры, изображающие множества

$$A = \{(x, y) | (x, y) \in R^2, x^2 + y^2 \leq 1\} \text{ и}$$

$$B = \{(x, y) | (x, y) \in R^2, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Заштриховать фигуры, представляющие собой множества: а) $A \cup B$; б) $A \cap B$; в) $R^2 \setminus A$.

1.15. Изобразить на координатной плоскости множество, координаты (x, y)

точек которого удовлетворяют условию: а) $|y| - |x| \geq 0$; б) $y - x^2 \geq 0$;

в) $x^2 - 2x + y \leq 0$; г) $x^2 + y^2 - 4y \leq 0$.

1.16. Что представляет собой:

а) пересечение множества всех прямоугольников с множеством всех ромбов;

б) пересечение множества всех эллипсов и множества всех окружностей;

в) объединение множества всех эллипсов и множества всех окружностей?

1.17. Записать множества: а) $X \times Y$; б) $Y \times X$; в) $X \times X$; г) $Y \times Y$; д) $(X \times Y) \cap (Y \times X)$; е) $(X \times X) \setminus (Y \times Y)$, если $X = \{2; 5\}$ и $Y = \{2; 3\}$.

1.18. Известно, что $A \times B = \{(a; 1); (a; 5); (a; 8); (m; 1); (m; 5); (m; 8); (k; 1); (k; 5); (k; 8)\}$. Найти множества A и B .

1.19. Пусть X — множество точек отрезка $[0; 1]$, а Y — множество точек отрезка $[1; 2]$. Изобразить графически множество $X \times Y$.

1.20. Пусть X, Y, Z — подмножества множества R^2 : $X = \{(x; y) | x \geq 0\}$, $Y = \{(x; y) | y \geq 0\}$; $Z = \{(x; y) | x + y \geq 1\}$. Изобразить на координатной плоскости множества: а) $X \cup Y$; б) $\overline{X \cup Y}$; в) $X \cap Y$; г) $\overline{X \cap Y}$; д) $X \cap Z$; е) $X \cap \overline{Z}$; ж) $\overline{X \cap Z}$; з) $X \cap Y \cap Z$.

2. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

2.1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Определение.

Комбинаторика – раздел математики, посвященный решению *задач выбора и расположения элементов* некоторого, обычно конечного, множества в соответствии с заданными правилами.

Каждое такое правило определяет способ построения некоторой конструкции из элементов исходного множества, называемой **комбинаторной конфигурацией**.

Простейшими примерами комбинаторных конфигураций являются **перестановки сочетания и размещения**.

Комбинаторные задачи.

Если нас интересует, сколько элементов, принадлежащих данному конечному множеству, обладает некоторым свойством или заданным набором свойств, то это **задача пересчета**.

Если необходимо выделить все элементы множества, удовлетворяющие заданным свойствам, то это задача **перечисления**.

В некоторых задачах на исходном конечном множестве элементов определена некоторая целевая функция, причем нас интересуют элементы множества, доставляющие минимальное (или максимальное) значение этой функции. В этом случае имеем **задачу оптимизации**.

Перечисленные задачи тесно связаны друг с другом.

2.1.1. РАЗМЕЩЕНИЯ

Определение выборки. Пусть задано множество $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Набор элементов: $x_{i_1}, \dots, x_{i_r}$ называется **выборкой** объема **r** из **n** элементов или иначе **(n, r) -выборкой**.

Понятие выборки не следует смешивать с понятием подмножества, один и тот же элемент x_i из множества X может в ней встречаться на различных местах. Если речь идет о подмножествах, то здесь все элементы попарно различны и никакого определенного порядка в расположении им не приписывается.

Определение упорядоченной выборки. Выборка называется *упорядоченной*, если порядок следования элементов в ней задан.

Две упорядоченные выборки, различающиеся лишь порядком следования элементов, считаются различными.

Определение.

Если порядок следования элементов в выборке не является существенным, то такая выборка называется *неупорядоченной*.

В выборках могут допускаться или не допускаться повторения элементов.

Определение.

Упорядоченная (n, r) выборка, в которой элементы могут повторяться, называется (n, r) -размещением с повторениями.

Определение.

Если элементы упорядоченной (n, r) выборки попарно различны, то она называется (n, r) -размещением без повторений или просто (n, r) -размещением.

Число размещений без повторений обозначается A_n^r . Число размещений с повторениями обозначается $\overline{A}_n^r$.

Пример 2.1.

Пусть $X=\{1, 2, 3\}$. Составьте размещение с повторениями из трех элементов по два и найдите их число.

Решение: (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3). Число таких размещений $\overline{A}_3^2 = 9$.

Пример 2.2.

Пусть $D=\{5, 8\}$. Составьте размещения с повторениями из двух элементов по четыре и подсчитайте их число.

Решение:

Искомые размещения имеют вид: (5, 5, 5, 5), (5, 5, 5, 8), (5, 5, 8, 5), (5, 8, 5, 5), (8, 5, 5, 5), (5, 5, 8, 8), (5, 8, 5, 8), (8, 8, 5, 5), (8, 5, 8, 5), (5, 8, 8, 5), (5, 8, 8, 8), (8, 8, 8, 5), (8, 5, 8, 8), (8, 8, 5, 8), (8, 5, 5, 8), (8, 8, 8, 8).

Число таких размещений: $\overline{A}_2^4 = 16$.

Замечание.

Размещения с повторениями можно рассматривать как в случае $n > r$ (пример 2.1), так и в случае $n \leq r$ (пример 2.2).

Теорема: Число различных размещений с повторениями из n элементов по r элементов определяется по формуле: $\overline{A}_n^r = n^r$.

В ряде случаев из множества всех r выборок необходимо выделить подмножество таких r -выборок, в которых все элементы *попарно различны*. Такие выборки называются *размещениями без повторений*.

Пример 2.3.

В финале за выход в высшую лигу боролись 4 футбольные команды. Сколько было сыграно матчей, если команды встречались друг с другом дважды.

Решение: $X = \{1, 2, 3, 4\}$ (это номера команд).

Образуем пары: (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4).

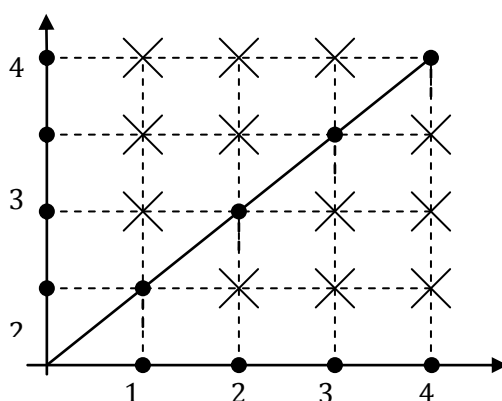


Рис. 2.1

Команда не может играть сама с собой, поэтому из X^2 исключим пары, у которых первый и второй элементы совпадают.

Итак, получаем, что число матчей, сыгранных командами, равно 12.

Теорема: Число различных размещений из n элементов по r (без повторений) равно произведению r последовательных натуральных чисел, начиная от n и до $(n-r+1)$ включительно:

$$A_n^r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r \text{ сомножителей}} = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

2.1.2. ПЕРЕСТАНОВКИ

Определение. (n,n) размещение *без повторений* называется *перестановкой множества X* . Обозначение: P_n .

Различные перестановки отличаются друг от друга порядком элементов.

Теорема: Число различных перестановок из n элементов равно произведению всех последовательных натуральных чисел, начиная от n до 1, включительно.

$$P_n = A_n^n = n(n-1) \cdot \dots \cdot 1 = n!$$

Пример 2.4.

Сколькими способами можно составить список различных фамилий пяти человек?

Решение: $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ (способов).

Перейдем к перестановкам с повторениями. Рассмотрим m множеств $E_1, E_2, \dots, E_m$, каждое из которых состоит соответственно из $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ элементов. Пусть множества E_i ($i = 1, 2, \dots, m$) образуют разбиение множества E , т.е. $E = \bigcup_{i=1}^m E_i$ и $E_i \cap E_j = \emptyset$.

Условимся в следующей терминологии: элементы множества E_1 будут называться элементами 1 — го сорта, элементы множества E_2 — элементами 2 — го сорта, ... и, наконец, элементы множества E_m — элементами m — го сорта.

Если $n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m$, то будем говорить, что множество E состоит из n элементов m сортов.

Пример 2.5.

Множество шашек E состоит из 12 белых и 12 черных шашек. Очевидно, что множества E_1 и E_2 , где $E_1 = \{12 \text{ белых шашек}\}$ и $E_2 = \{12 \text{ черных шашек}\}$, образуют разбиение данного множества E , которое состоит из 24 элементов двух сортов.

Две перестановки с повторениями назовем различными тогда и только тогда, когда одну из них нельзя получить из другой одними только внутрисортными перестановками.

Число различных перестановок с повторениями из n элементов, в которых элементы $a_1, a_2, \dots, a_m$ повторяются соответственно $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ раз, обозначается $\overline{P}_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$.

Теорема: Число различных перестановок с повторениями из n элементов, в которых элементы $a_1, a_2, \dots, a_m$ повторяются соответственно $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ раз, где $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = n$, выражается формулой

$$\overline{P}_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m)!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_m!} = \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_m!}.$$

Пример 2.6.

Сколькими способами можно расставить белые шахматные фигуры (2 коня, 2 слона, 2 ладьи, ферзь и король) на первой линии шахматной доски?
Решение. Множества: $E_1 = \{2 \text{ коня}\}$, $E_2 = \{2 \text{ слона}\}$, $E_3 = \{2 \text{ ладьи}\}$, $E_4 = \{\text{ферзь}\}$, $E_5 = \{\text{король}\}$ образуют разбиение множества $E = \{2 \text{ коня, 2 слона, 2 ладьи, ферзь, король}\}$, которое состоит из 8 элементов 5 сортов (или 5 различных элементов (конь, слон, ладья, ферзь, король), повторяются соответственно $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 2$, $\alpha_4 = 1$, $\alpha_5 = 1$ раз.

Надо найти число перестановок с повторениями из 8 элементов.

$$\overline{P}_8(2; 2; 2; 1; 1) = \frac{(2 + 2 + 2 + 1 + 1)!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = 5040 \text{ (способов).}$$

2.1.3. СОЧЕТАНИЯ

Определение.

Неупорядоченная (n, r) выборка, в которой элементы могут повторяться, называется **сочетанием с повторениями**.

Пример 2.7.

Пусть $X = \{a, b, c\}$. Составить сочетания с повторениями по два элемента в каждом.

Решение. Сочетания с повторениями: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{c, b\}$, $\{a, a\}$, $\{b, b\}$, $\{c, c\}$.

Определение.

Если элементы неупорядоченной (n, r) выборки попарно различны, то она называется **сочетанием без повторений** или просто **сочетанием**.

Замечание.

Любое (n, r) сочетание можно рассматривать как r -элементное подмножество n -элементного множества.

Пример 2.8.

Пусть $X=\{a, b, c\}$. Составить сочетания без повторений по два элемента в каждом.

Решение: Сочетания без повторений: $\{a, b\}, \{a, c\}, \{c, b\}$.

Число сочетаний с повторениями будем обозначать $\bar{C}_n^r$, а без повторений C_n^r .

Теорема: Число сочетаний без повторений $C_n^r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ при $r \leq n$ и

$C_n^r = 0$ при $r > n$.

Теорема: Число всех подмножеств множества, состоящего из n элементов равно 2^n .

Теорема: Число сочетаний с повторениями $\bar{C}_n^r = C_{n+r-1}^r$ (без доказательства).

Пример 2.9.

Сколько косточек имеет обычное домино?

Решение. Как известно, на каждой половинке косточки домино изображается один из следующих элементов: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Следовательно, наборы кружков на косточке домино есть сочетания с повторениями из семи элементов по два.

Таким образом, число косточек может быть вычислено по формуле $\bar{C}_7^2 = C_{7+2-1}^2 = 28$.

2.1.4. Бином Ньютона

Натуральная степень суммы двух величин вычисляется по формуле

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \dots + C_n^m a^{n-m}b^m + \dots + C_n^n b^n,$$

которая называется **биномом Ньютона**.

Коэффициенты C_n^m , равные числу сочетаний из n элементов по m , называются **биномиальными коэффициентами**.

Свойства биномиальных коэффициентов:

1). Число биномиальных коэффициентов (а, следовательно, и число слагаемых в разложении степени бинома) равно $n + 1$.

2). Коэффициенты членов, равноотстоящих от начала и от конца бинома, равны между собой (т.к. $C_n^m = C_n^{n-m}$).

3). Сумма биномиальных коэффициентов равна 2^n

4). Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах, равна сумме коэффициентов, стоящих на четных местах.

Натуральная степень разности двух величин вычисляется по формуле, аналогичной биному Ньютона:

$$(a - b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1} b + \dots + (-1)^m C_n^m a^{n-m} b^m + \dots + (-1)^n C_n^n b^n.$$

2.2. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

2.1. Вычислить значения следующих выражений:

а) $\frac{10! - 8!}{89}$; б) $\frac{5! + 6!}{4!}$; в) $\frac{7!(8! - 6!)}{11!}$.

2.2. Составить всевозможные перестановки без повторений из элементов множества $A = \{a, b, c, d\}$ и подсчитать их число.

2.3. Составить размещения и сочетания по два элемента из элементов множества $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Подсчитать их число.

2.4. Из элементов множества $A = \{a, b\}$ составить размещения и сочетания с повторениями по четыре элемента. Подсчитать их число.

2.5. Сократить дроби:

а) $\frac{n!}{(n-2)!}$; б) $\frac{2m \cdot (2m-1)}{(2m)!}$; в) $\frac{(n-2)!}{(n-4)!}$.

2.6. Найти число размещений а) из 10 элементов по 4; б) из $(n+4)$ элементов по $(n-2)$.

2.7. Вычислить: а) $\frac{6!}{A_{10}^7} \cdot (C_7^5 + C_7^3)$; б) $\frac{P_{k+1}}{(k-n)! A_{k-1}^{n-1}}$.

2.8. Проверить равенства:

$$\text{а) } C_n^6 = \frac{A_n^{n-6}}{P_{n-6}}; \quad \text{б) } C_{15}^6 = C_{15}^9; \quad \text{в) } C_{10}^5 + C_{10}^4 = C_{11}^6;$$

$$\text{г) } C_{14}^9 + C_{14}^{10} = C_{15}^{10}; \quad \text{д) } C_{20}^{12} = \frac{A_{20}^8}{P_8}; \quad \text{е) } C_{15}^4 - C_{15}^3 = \frac{C_{16}^4}{2}.$$

2.9. Решить уравнения:

$$\text{а) } A_n^5 = 30 \cdot A_{n-2}^4; \quad \text{б) } A_{n-2}^3 = 4 \cdot A_{n-3}^2; \quad \text{в) } 20 \cdot A_{n-2}^3 = A_n^5;$$

$$\text{г) } 5 \cdot C_n^3 = C_{n+2}^4; \quad \text{д) } C_{x+1}^{x-2} + 2 \cdot C_{x-1}^3 = 7 \cdot (x-1); \quad \text{е) } \frac{A_x^4 + A_x^2}{A_x^2} = 13;$$

$$\text{ж) } A_x^3 + C_x^{x-2} = 14 \cdot x; \quad \text{з) } \frac{A_x^5}{C_{x-2}^{x-5}} = 336; \quad \text{и) } \frac{A_x^4}{A_{x+1}^3 - C_x^{x-4}} = \frac{24}{23};$$

$$\text{к) } (n+2)! = 132 \cdot A_n^k \cdot P_{n-k}; \quad \text{л) } C_{n+3}^{n+1} - 5 \cdot C_{3n}^2 + 19 \cdot n^2 = 6.$$

2.10. Решить системы уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2} \\ C_x^2 = 66 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} C_x^y = C_x^{y+4} \\ C_x^5 = 264 \end{cases}.$$

2.11. Сколько шестизначных чисел, кратных пяти, можно составить из цифр 1,2,3,4,5,6 при условии, что в числе цифры не повторяются.

2.12. Сколько четырехзначных чисел, делящихся на пять, можно составить из цифр 0,1,3,5,7, если каждое число не должно содержать одинаковых цифр?

2.13. В чемпионате страны по футболу участвуют 18 команд, причем каждые две команды встречаются между собой два раза. Сколько матчей играется в течение сезона?

2.14. Четыре стрелка должны поразить восемь мишеней (каждый по две). Сколькими способами они могут распределить мишени между собой?

2.15. Десять групп занимаются в десяти расположенных подряд аудиториях. Сколько существует вариантов расписания, при которых группы № 1 и № 2 находились бы в соседних аудиториях?

2.16. Сколько диагоналей имеет выпуклый n — угольник?

2.17. На первой из двух параллельных прямых расположено десять точек, на второй — двадцать. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

2.18. Сколько различных десятизначных чисел можно написать, используя цифры 1 и 2?

- 2.19. Сколько различных десятизначных чисел можно написать, используя цифры 0,1 и 2?
- 2.20. Имеется три типа микросхем. Сколько различных радиотехнических устройств может быть смонтировано по двадцать микросхем в каждом?
- 2.21. Буквы азбуки Морзе представляют собой набор «точек» и «тире». Сколько букв может быть в азбуке Морзе, если буква не должна содержать более четырех знаков?
- 2.22. Во взводе 30 курсантов. Сколькими способами можно выделить двух курсантов в наряд, если: а) один из них должен быть старшим; б) старшего быть не должно?
- 2.23. Из цифр 0,1,2,3 составлены всевозможные четырехзначные числа так, что в каждом числе нет одинаковых цифр. Сколько получилось чисел? Сколько среди них четных чисел?
- 2.24. В розыгрыше первенства по футболу было сыграно 153 матча. Каждые две команды встречались между собой один раз. Сколько команд участвовало в розыгрыше первенства?
- 2.25. Во взводе три сержанта и тридцать солдат. Сколькими способами можно выделить одного сержанта и трех солдат для патрулирования?
- 2.26. В скольких случаях при игре в «Спортлото» (угадывание пяти номеров из тридцати шести) будут правильно выбраны: а) ровно три номера; б) не менее трех номеров?
- 2.27. Сколькими способами можно раскрасить квадрат, разделенный на девять частей (рис. 2.2) четырьмя цветами таким образом, чтобы в первый цвет были окрашены три части, во второй — две, в третий — три, в четвертый — одна?

1	2	3
6	5	4
7	8	9

Рис. 2.2

- 2.28. В группе, состоящей из 25 человек, при выборе делегата на конференцию за выдвинутую кандидатуру проголосовали 12 человек, против — 10, воздержались — 3. Сколькими способами может быть проведено такое голосование?

3. ОТНОШЕНИЯ

3.1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Прямое произведение множеств A и B называют множеством, обозначаемое $A \times B$ и состоящее из всех и только тех упорядоченных пар, первая компонента которых принадлежит множеству A , а вторая – множеству B , т.е. $A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$. Прямое произведение дистрибутивно относительно объединения и пересечения.

Соответствием между множествами X и Y называется подмножество $G \subset X \times Y$. Если $(x, y) \in G$, то говорят, что y соответствует x при соответствии G . Множество $Pr_1 G$ называется областью определения соответствия, множество $Pr_2 G$ – областью значений соответствия. Если $Pr_2 G = Y$, то соответствие называется сюръективным. Множество всех $y \in Y$, соответствующих элементу $x \in X$, называется образом x в Y при соответствии G . Множество всех x , которым соответствует y , называется прообразом y в X при соответствии G .

Соответствие называется функциональным (или однозначным), если образом любого элемента $Pr_1 G$ является единственный элемент из $Pr_2 G$. Функцией называется функциональное соответствие.

Если функция f устанавливает соответствие между множествами X и Y , то говорят, что функция f имеет тип $X \rightarrow Y$ и обозначается $f: X \rightarrow Y$.

Полностью определенная функция $f: X \rightarrow Y$ называется отображением X в Y . Образ X при отображении f обозначается $f(X)$. Если соответствие при этом **сюръективно**, т.е. каждый элемент Y имеет прообраз в X , то говорят, что имеет место отображение X на Y (**сюръективное отображение**).

Если $f: X \rightarrow Y$ и $A \subset X$, то $f \cap (A \times Y)$ есть функция, определенная на A со значениями в Y . Эту функцию называют сужением f на множество A и обозначают $f|A$ или f_A .

Пример 3.1. $\{(1,2), (2,2), (\text{Иванов}, \text{Петров})\}$ есть функция с областью определения $\{1, 2, \text{Иванов}\}$ и областью значений $\{2, \text{Петров}\}$.

Пример 3.2. $\{(1,2), (1,3), (2,5)\}$ не является функцией, так как различные элементы $(1,2)$ и $(1,3)$ имеют одинаковую первую координату.

Пример 3.3. Множество $\{(a,b), (c,b), (e,d), (k,m)\}$ есть функция, а подмножество этого множества $\{(a,b), (e,d)\}$ является сужением этой функции на множество $\{a,e\}$.

Отображение $R: X \rightarrow X$ представляет собой **отображение** множества X в самого себя и определяется парой (X, R) , где $R \subseteq X^2$. В этом случае для обозначения данного отображения используется термин «отношение» и вводят специальную символику: yRx – y находится в отношении R к x .

Подмножество $R \subset A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ называется **n -местным отношением между $A_1, A_2, \dots, A_n$** . Если $n=2$, то R называется бинарным отношением.

Бинарным отношением R на множествах A и B называется любое подмножество декартова произведения множеств A и B

$$R \subseteq A \times B.$$

Если элементы x и y множеств A и B находятся в отношении R , то пишут $(x, y) \in R$ или xRy . Если $A=B$, то R называется бинарным отношением на A .

Бинарное отношение можно задать указанием всех элементов, входящих в соотношение, или графически. Основу графического представления бинарного отношения составляет прямоугольная система координат, где по одной оси откладываются элементы одного множества, а по второй – другого. Пересечения координат образуют точки, обозначающие элементы декартова произведения.

Рассмотрим множества $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, $B=\{1,2,3\}$. Определим на этих множествах отношение $R \subseteq A \times B$.

$R=\{(x, y) \mid x \text{ делится на } y\}$. R можно представить графически следующим образом (рис. 3.1):

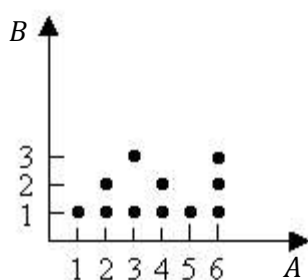


Рис. 3.1

Свяжем с каждым бинарным отношением R между множествами A и B два множества – область определения δ_R и множество значений ρ_R . Они определяются следующим образом:

$$\delta_R = \{x \mid (x, y) \in R \text{ для некоторого } y\}, \quad \rho_R = \{y \mid (x, y) \in R \text{ для некоторого } x\}.$$

Пример 3.4. Множество $\{(3,4), (4,6), (7,9), (4,12)\}$ будучи множеством упорядоченных пар натуральных чисел, есть бинарное отношение на N , где N – множество натуральных чисел.

Отношение R называется ($R \subset A \times A = A^2$):

- *рефлексивным*, если для любого $a \in A$ имеет место aRa ;
- *антирефлексивным*, если ни для какого $a \in A$ не выполняется aRa ;
- *симметричным*, если для пары $(a,b) \in A^2$ из aRb следует bRa ;
- *антисимметричным*, если из a_iRa_j и a_jRa_i следует, что $a_i=a_j$;
- *транзитивным*, если для любых a, b, c из aRb и bRc следует aRc .

Отношение R называется **отношением эквивалентности**, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Обозначается символом $\equiv$.

Пример 3.5. Докажите, что отношение равенства « $=$ » на любом множестве является отношением эквивалентности.

Решение.

Действительно, для данного отношения выполняются свойства: рефлексивности ($a=a$); симметричности ($a=b \rightarrow b=a$); транзитивности [$(a=b$ и $b=c) \rightarrow a=c$].

Отношением предпорядка на множестве A называется отношение $R \subset A \times A$, если оно рефлексивно и транзитивно.

Отношением порядка называется отношение, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Отношением строгого порядка называется отношение, если оно антирефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Пример 3.6. Задано бинарное отношение R на множестве $M=\{1, 2, 3, 4\}$. Является ли оно рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным? Найти область определения δ_R , область значений ρ_R , обратное отношение R^{-1} , пересечение и объединение отношений R и R^{-1}
 $R=\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\}$.

Решение.

Отношение R , заданное на множестве M , называется рефлексивным, если для всякого x из этого множества xRx истинно. Заданное отношение не является рефлексивным, так как нет пар $(2,2)$ и $(3,3)$.

Отношение R , заданное на множестве M называется симметричным, если на этом множестве из xRy следует yRx . Заданное отношение не является симметричным, так как, например, пара $(1,2) \in R$, а $(2,1) \notin R$.

Отношение R , заданное на множестве M , называется антисимметричным, если на этом множестве из xRy и yRx следует $x=y$. Заданное отношение не является антисимметричным, так как ему принадлежат пары $(1,4)$ и $(4,1)$, но $1 \neq 4$.

Отношение R , заданное на множестве M , называется антирефлексивным, если для любого $x \in M$ xRx ложно. Заданное отношение антирефлексивно, так как (уже было показано) нет пар $(2,2)$ и $(3,3)$.

Отношение R , заданное на множестве M , называется транзитивным, если на этом множестве из xRy и yRz следует xRz . Заданное отношение является транзитивным, так как для любых двух пар (a,b) и (b,c) следует, что $(a,c) \in R$, где $a, b, c \in M$.

Областью определения отношения R называется множество $\delta_R = \{x \mid \exists(y) xRy\}$. Следовательно, областью определения R является двухэлементное множество $\{1, 4\}$.

Областью значений отношения R называется множество $\rho_R = \{y \mid \exists(x) xRy\}$. Следовательно, областью значений является все множество $M = \{1, 2, 3, 4\}$.

Обратным отношением для R называется отношение $R^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in R\}$.

Обратное отношение $R^{-1} = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (1,4), (2,4), (3,4), (4,4)\}$.

Пересечение R и R^{-1} равно $R \cap R^{-1} = \{(1,1), (4,1), (1,4), (4,4)\}$.

Объединение R и R^{-1} равно $R \cup R^{-1} = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (2,1), (3,1)\}$.

Пример 3.7. График функции $f(x)$ (рис. 3.2) представляет собой ломаную линию, звенья которой параллельны координатной оси, либо биссектрисам координатных углов. Координаты каждой вершины ломаной линии являются целыми числами. Функция $f(x)$ определяет отношение R_f на множестве $X=[0, 5]$: $xR_f y \leftrightarrow f(x)=f(y)$, т.е. x находится в отношении R_f с y тогда и только тогда, когда $f(x)=f(y)$.

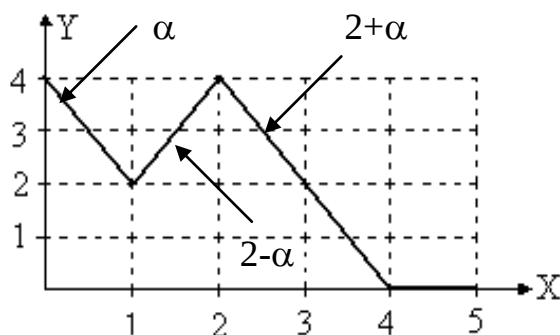


Рис. 3.2

Доказать, что R_f – эквивалентность на X . Перечислить все классы эквивалентности.

Решение.

Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение ρ на множестве X называется отношением эквивалентности на множестве X . Классом эквивалентности, порожденным элементом x , называется подмножество множества X , состоящее из тех элементов $y \in X$, для которых $x\rho y$ и обозначается $[x]$. $[x] = \{y \mid y \in X \text{ и } x\rho y\}$.

Сначала докажем, что отношение R_f есть отношение эквивалентности. Действительно, рефлексивность $xR_f y$ очевидна, так как $f(x)=f(y)$. Симметричность: пусть $xR_f y$ т.е. $f(x)=f(y)$, но тогда $f(y)=f(x)$ и, следовательно, $yR_f x$. Транзитивность: если $f(x)=f(y)$, а $f(y)=f(z)$, то $f(x)=f(z)$ и, следовательно, $xR_f z$ и $yR_f z$ влечет $xR_f z$.

Классы эквивалентности: $\{\alpha, 2-\alpha, 2+\alpha\}$, $[4, 5]$, $\{0,2\}$, $\{1,3\}$, $\{3+\alpha\}$, где $\alpha \in (0,1)$.

3.2. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

3.1. Какое множество имеет большую мощность: а) множество натуральных чисел или множество четных чисел? б) множество четных чисел или множество простых чисел?

3.2. Установить эквивалентность между множеством натуральных чисел N и множеством $M; \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm \dots\}$.

3.3. Показать, что мощность всякого произвольного множества больше или равна мощности всех чисел натурального ряда.

3.4. Установить взаимно-однозначное соответствие между множествами всех рациональных чисел на отрезках $(0; 1)$ и $(0; \infty)$.

3.5. Установить эквивалентность между множеством всех положительных рациональных чисел и множеством натуральных чисел.

3.6. Задана система числовых множеств:

$$A_1 = \{x \mid x = n, \quad n \in N\};$$

$$A_2 = \{x \mid x = 2n, \quad n \in N\};$$

$$A_k = \{x \mid x = kn, \quad n \in N\}.$$

Определить мощность множества $C = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.

3.7. Является ли множество $\{(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8)\}$ бинарным отношением. Почему?

3.8. Выписать элементы множества $\{0, 1, 2\} \times \{a, b\}$. Найти область определения и область значений этого отношения, построить его график.

3.9. Показать на примере, что операция образования декартового произведения не является ни коммутативной, ни ассоциативной.

3.10. Доказать, что декартово произведение дистрибутивно относительно операции объединения, т.е. что для любых множеств A , B и C $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

3.11. Пусть β - отношение “есть брат”, φ - отношение “есть сестра”. Описать отношения $\beta \cup \varphi$; $\beta \cap \varphi$; $\beta \setminus \varphi$.

3.12. Является ли отношение “быть рядом” транзитивным?

3.13. Задано бинарное отношение на множестве $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Является ли оно рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным? Почему? Найдите область определения δ_R , область значений ρ_R , обратное отношение R^{-1} , пересечение и объединение R и R^{-1} .

а) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$;

б) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 4)\}$;

в) $R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$;

г) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 4)\}$;

д) $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$;

е) $R = \{(1, 1), (1, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 4)\}$;

ж) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 4)\}$;

з) $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 3)\}$;

и) $R = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3)\}$;

к) $R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1)\}$.

3.14. Найти область определения, область значений, построить график каждого из следующих отношений:

а) $\{(x, y) \in R \times R \mid x^2 = y^2\}$;

б) $\{(x, y) \in R \times R \mid |x| + 2|y| = 1\}$;

в) $\{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 < 1 \text{ и } x > 0\}$;

г) $\{(x, y) \in R \times R \mid y > 0, y \leq x, x + y < 1\}$;

д) $\{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$;

е) $\{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

3.15. Доказать, что если:

а) $A \subset B$ и $A \equiv A \cup C$, то $B \equiv B \cup C$;

б) $A \equiv B$ и $C \supset A$, $C \supset B$, то $C \setminus A \equiv C \setminus B$;

в) $A \setminus B \equiv B \setminus A$, то $A \equiv B$.

3.16. Доказать, что множество всех окружностей (на плоскости), радиусы которых рациональны и центры которых имеют рациональные координаты, есть счетное множество.

3.17. Доказать, что множество всех четырехугольников (на плоскости), вершины которых имеют целые координаты, есть счетное множество.

3.18. Доказать, что множество всех точек плоскости, обе координаты которых есть двоичные дроби, есть счетное множество.

4. АЛГЕБРА ЛОГИКИ

4.1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Высказыванием называется повествовательное утверждение, которое либо *истинно*, либо *ложно* (но не то и другое одновременно). **Высказывание** называется *простым (элементарным)*, если оно рассматривается как одно неделимое целое. Простые высказывания обозначаются переменными, принимающими истинностные значения *И* и *Л*. *Сложное высказывание* – высказывание, составленное из простых с помощью *логических связок*. Логические связки (операции) можно интерпретировать как функции, заданные на множестве $\{0,1\}$, ($\{\}$, $\{\text{«истина»}, \text{«ложь»}\}$) со значением в этом же множестве.

Конъюнкцией (операцией «и») высказываний P и Q называется высказывание $P \& Q$, истинное, когда оба высказывания истинны, и ложное во всех остальных случаях (обозначается также $P \wedge Q$, $P \cdot Q$, PQ).

Дизъюнкцией (операцией «или») высказываний P и Q называется высказывание $P \vee Q$, ложное, когда оба высказывания ложны, и истинное во всех остальных случаях.

Отрицанием (операцией «не») высказывания P называется высказывание $\bar{P}$, истинное, когда P ложно, и ложное, когда P истинно (обозначается также P).

Импликацией (логическим следованием) высказываний P и Q называется высказывание $P \rightarrow Q$, ложное, когда P истинно, а Q ложно, и истинное во всех остальных случаях (обозначается также $P \supset Q$, читается «если P , то Q », « P влечет Q »).

Эквивалентностью (равнозначностью) высказываний P и Q называется высказывание $P \sim Q$, истинное, когда истинностные значения высказываний P и Q совпадают, и ложное в противном случае (обозначается также $P \equiv Q$).

Неравнозначностью (сложением по модулю 2) высказываний P и Q называется высказывание $P \oplus Q$, истинное, когда истинностные значения высказываний P и Q не совпадают, и ложное в противном случае.

Выражение, составленное из переменных, обозначающих высказывание, логических связок и скобок называется логической формулой, если оно удовлетворяет следующим условиям:

любая переменная, обозначающая простое высказывание – формула;
если P и Q – формулы, то

$(P \& Q)$, $(P \vee Q)$, $(P \rightarrow Q)$, $(P \sim Q)$, $(P \oplus Q)$, $(\bar{P})$, $(\bar{Q})$ – также формулы;
других формул нет.

Действия логических связок задаются *таблицами истинности*, каждой строке которых взаимно-однозначно сопоставляется набор значений переменных, составляющих формулу, и соответствующее этому набору значение полученной формулы (табл. 4.1).

Таблица 4.1

P	Q	$(\bar{P})$	$(P \& Q)$	$(P \vee Q)$	$(P \rightarrow Q)$	$(P \sim Q)$	$(P \oplus Q)$
0	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0

Исходя из таблицы истинности для логических связок, можно строить таблицы истинности для произвольных формул.

Пример. Построить таблицу истинности для формулы

$$\Phi = ((\bar{P} \rightarrow Q) \& \bar{R}).$$

Таблица строится последовательно, в соответствии с шагами построения формулы Φ (табл. 4.2):

Таблица 4.2

P	Q	R	$\bar{P}$	$(\bar{P} \rightarrow Q)$	$\bar{R}$	Φ
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0

Формула, истинная на некотором наборе переменных, называется *выполнимой*. Формула, истинная на всех возможных наборах переменных, называется *тождественно истинной* (или *тавтологией*). Формула ложная на всех возможных наборах переменных, называется *тождественно ложной* (или *противоречием*).

Формулы, принимающие одинаковые значения при одинаковых наборах значений входящих в них переменных, называются *равносильными* или *эквивалентными*. При доказательстве равносильности формул используются *основные равносильности*:

1. $P \vee P = P, \quad P \& P = P;$
2. $P \vee Q = Q \vee P, \quad P \& Q = Q \& P;$
3. $P \vee (Q \vee R) = (P \vee Q) \vee R, \quad P \& (Q \& R) = (P \& Q) \& R;$
4. $P \vee (Q \& R) = (P \vee Q) \& (P \vee R), \quad P \& (Q \vee R) = (P \& Q) \vee (P \& R);$
5. $\bar{\bar{P}} = P;$
6. $P \& 1 = P, \quad P \& 0 = 0, \quad P \vee 1 = 1, \quad P \vee 0 = P, \quad \bar{1} = 0, \quad \bar{0} = 1;$
7. $\overline{P \vee Q} = \bar{P} \& \bar{Q}, \quad \overline{P \& Q} = \bar{P} \vee \bar{Q};$
8. $P \& \bar{P} = 0;$
9. $P \vee \bar{P} = 1.$

Также при доказательстве равносильности используются следующие формулы:

10. $P \rightarrow Q = \bar{P} \vee Q;$
11. $P \sim Q = (P \& Q) \vee (\bar{P} \& \bar{Q});$
12. $P \oplus Q = (P \& \bar{Q}) \vee (\bar{P} \& Q).$

Под упрощением формул понимается получение равносильных формул, содержащих меньшее число символов. При упрощении используются следующие формулы:

13. *Поглощение*: $P \vee (P \& Q) = P, \quad P \& (P \vee Q) = P.$
14. *Склеивание/расщепление*: $(P \& Q) \vee (\bar{P} \& Q) = Q,$
 $(P \vee Q) \& (\bar{P} \vee Q) = Q.$
15. *Обобщенное склеивание*:
 $(P \& Q) \vee (\bar{P} \& R) = (P \& Q) \vee (\bar{P} \& R) \vee (Q \& R).$

4.2. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

4.1. Какие из следующих предложений являются высказываниями:

- а) Новгород стоит на Волхве.
- б) Париж — столица Англии.
- в) Да здравствуют наши спортсмены.
- г) Карась не рыба.

д) Число 8 делится на 2 и 4.

е) Военное училище.

ж) Если юноша успешно окончил среднюю школу, то он получит аттестат зрелости.

з) $x^2 + 2x - 3 = 0$.

4.2. Установить, истинно или ложно высказывание:

а) $2 \in \{x \mid 2x^3 - 3x^2 + 1 = 0, \quad x \in R\}$;

б) $-3 \in \left\{x \mid \frac{x^3 - 1}{x^2 + 2} < -2, \quad x \in R\right\}$;

в) $\{1\} \in N$;

г) $\{1\} \in P(N)$, где $P(N)$ — множество всех подмножеств множества N ;

д) $\emptyset \in \emptyset$;

е) $\emptyset \in \{\emptyset\}$;

ж) $\emptyset \subset N$;

з) $\{\emptyset\} \subset \{\emptyset\}$;

и) $\{\emptyset\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

4.3. Среди следующих высказываний указать элементарные и составные. В составных высказываниях выделить грамматические связки:

а) число 27 не делится на 3;

б) число 15 делится на 5 и на 3;

в) число 7 является делителем числа 42;

г) курсант едет в отпуск тогда и только тогда, когда успешно сдаст экзамены;

д) если курсант не сдал экзамен, то он не едет в отпуск;

е) соединение элементов в электрической цепи параллельное или последовательное.

4.4. Обозначьте элементарные высказывания буквами и запишите следующие высказывания с помощью символов алгебры логики:

а) 45 кратно 3 и 42 кратно 3;

б) 45 кратно 3 и 15 не кратно 3;

в) $\sqrt{9} = 3$ или $\sqrt{9} = -3$;

г) если число x простое, то оно нечетное;

д) для того чтобы x было нечетным, необходимо и достаточно, чтобы x было простым.

4.5. Записать составные высказывания в виде формул, употребляя высказывательные переменные для обозначения простых высказываний:

- а) если идет дождь, то дует ветер;
- б) если дует ветер, то идет дождь;
- в) ветер дует тогда и только тогда, когда идет дождь;
- г) неверно, что ветер дует тогда и только тогда, когда нет дождя.

4.6. Пусть x и y обозначают высказывания: x — «этот четырехугольник — параллелограмм»; y — «этот четырехугольник — ромб». Прочтите следующие сложные высказывания:

- а) $\bar{x}$; б) $\bar{y}$; в) $x \wedge \bar{y}$; г) $x \rightarrow y$; д) $y \rightarrow x$; е) $\bar{x} \rightarrow \bar{y}$; ж) $\bar{x} \vee x$; з) $(\overline{x \wedge \bar{x}})$.

4.7. Пусть p и q обозначают высказывания: p — «я студент университета»; q — «я люблю учиться». Прочтите следующие сложные высказывания:

- а) $\bar{p}$; б) $\bar{\bar{p}}$; в) $p \wedge q$; г) $p \wedge \bar{q}$; д) $\bar{p} \wedge q$; е) $\bar{p} \wedge \bar{q}$; ж) $\overline{p \wedge q}$.

4.8. Вставьте пропущенные связки в истинные высказывания:

- а) если $x \cdot y = 0$, то $x = 0 \dots y = 0$;
- б) если $x^2 - 5x + 6 < 0$, то $x > 2 \dots x < 3$;
- в) если $x + y \neq 0$, то $x \neq 0 \dots y \neq 0$;
- г) если неверно, что число кратно 2 и 3, то это число не кратно 2 ...не кратно 3;
- д) если $|x| < 3$, то $x < 3 \dots x > -3$.

4.9. Какие из следующих импликаций истинны, какие ложны:

- а) если $3 = -3$, то $3^2 = (-3)^2$;
- б) если $3 = -3$, то $3^2 = 5^2$;
- в) если $\sin 90^\circ = 0,4$, то $2 \cdot 2 = 4$;
- г) если $\sin 90^\circ = 1$, то $2 \cdot 2 = 4$;
- д) если число 5 нечетное, то 8 кратно 4;
- е) если 8 кратно 4, то число 5 четное;
- ж) из $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ следует, что число 12 простое;
- з) из $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ следует, что биссектриса угла делит его пополам.

4.10. Определить логические значения следующих сложных высказываний:

- а) $x \wedge (y \wedge z)$ при $x = 0$; $y = 1$; $z = 1$;
- б) $(x \wedge y) \wedge y$ при $x = 1$; $y = 0$;
- в) $x \rightarrow (y \rightarrow z)$ при $x = 0$; $y = 1$; $z = 1$;

- г) $x \wedge y \rightarrow z$ при $x=1; y=0; z=1$;
 д) $(x \wedge y) \leftrightarrow (z \vee \bar{y})$ при $x=0; y=1; z=1$;
 е) $((x \vee y) \wedge z) \leftrightarrow ((x \wedge z) \vee (y \wedge z))$ при $x=0; y=1; z=1$;
 ж) $(\overline{x \vee \bar{y}} \rightarrow z) \wedge x$ при $x=1; y=0; z=0$.

4.11. Найти логические значения x и y , при которых выполняются равенства:

- а) $(1 \rightarrow x) \rightarrow y = 0$;
 б) $x \vee y = \bar{x}$;
 в) $y \rightarrow \bar{x} = 0$;
 г) $x \vee \bar{y} = y \rightarrow x$.

4.12. Составить таблицы истинности для формул:

- а) $\bar{x} \vee \bar{y}$;
 б) $(x \wedge y) \vee z$;
 в) $(x \rightarrow y) \vee (x \rightarrow (y \wedge x))$;
 г) $(x \rightarrow (\overline{y \wedge x})) \rightarrow (x \vee z)$;
 д) $(x \vee y \rightarrow y \wedge x) \wedge \bar{x}$;
 е) $(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)$;
 ж) $(x \rightarrow y \wedge y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)$;
 з) $(\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge z \rightarrow (x \leftrightarrow y)$;
 и) $(x \wedge \bar{y} \rightarrow \bar{y}) \leftrightarrow x$;
 к) $(x \wedge (y \vee \bar{x})) \wedge ((\bar{y} \rightarrow x) \vee y)$;
 л) $(x \wedge \bar{y} \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow y)$.

4.13. Установить тождественную истинность или тождественную ложность следующих формул:

- а) $(\bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_2) \rightarrow (x_2 \rightarrow x_1)$;
 б) $(\bar{x}_2 \rightarrow \bar{x}_1) \rightarrow ((\bar{x}_2 \rightarrow x_1) \rightarrow x_2)$;
 в) $(x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow ((x_3 \vee x_1) \rightarrow (x_3 \vee x_2))$;
 г) $\bar{x} \rightarrow (x \rightarrow y)$;
 д) $(x \rightarrow y) \wedge (x \wedge \bar{y})$;
 е) $\overline{((x \rightarrow y) \wedge y)} \rightarrow y$;
 ж) $((x \rightarrow y) \rightarrow x) \rightarrow x$;
 з) $((p \rightarrow q) \wedge \bar{q}) \rightarrow \bar{p}$;
 и) $(p \rightarrow q) \wedge \bar{q} \wedge p$;

$$\kappa) ((p \rightarrow (\bar{q} \vee (p \wedge s))) \wedge p \wedge \bar{s}) \rightarrow \bar{q}.$$

4.14. Доказать равносильности:

а) $\overline{(x \rightarrow y)} \equiv x \wedge \bar{y};$

б) $(x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}) \equiv x \rightarrow y;$

в) $x \rightarrow \bar{y} \equiv y \rightarrow x;$

г) $(x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee t) \wedge (z \vee t) \equiv (x \wedge t) \vee (y \wedge z);$

д) $x \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z);$

е) $x \vee (\bar{x} \wedge y) \equiv x \vee y.$

4.15. Доказать равносильности двумя способами: составлением таблиц истинности обеих частей равносильности и равносильным преобразованием одной или обеих частей:

а) $x \wedge y \wedge \bar{z} \vee x \wedge y \vee \bar{x} \wedge y \equiv y;$

б) $\overline{(\bar{x} \rightarrow \bar{y})} \leftrightarrow x \equiv (x \leftrightarrow y) \wedge \bar{x};$

в) $\overline{(\bar{x} \vee \bar{y})} \vee \overline{(x \rightarrow y)} \equiv (x \vee y \wedge x);$

г) $\overline{x \wedge \bar{y}} \rightarrow (\bar{y} \rightarrow x) \equiv \overline{(x \rightarrow y)} \vee x \vee y;$

д) $\overline{((\bar{x} \rightarrow \bar{y}) \rightarrow x)} \wedge (x \rightarrow \overline{(\bar{x} \rightarrow \bar{y})}) \equiv (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) \wedge \bar{x}.$

4.16. Упростить формулы, используя равносильные преобразования:

а) $(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z) \rightarrow (z \rightarrow x);$

б) $(y \rightarrow x) \wedge y \vee \overline{(\bar{x} \wedge \bar{y})};$

в) $(\bar{x} \rightarrow y) \wedge \bar{x} \wedge \bar{y};$

г) $(x \rightarrow \bar{y}) \wedge y \rightarrow \bar{x};$

д) $\bar{x} \vee x \wedge z \vee \overline{x \wedge y} \vee x \wedge y;$

е) $\overline{(\bar{x} \wedge \bar{y} \rightarrow \bar{x})};$

ж) $(x \rightarrow y) \wedge ((\bar{y} \rightarrow z) \rightarrow \bar{x});$

з) $(x \wedge y) \vee ((x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}));$

и) $(x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}).$

4.17. Преобразовать равносильно формулы так, чтобы они содержали только указанные связки:

а) $(x \rightarrow \bar{y}) \rightarrow (y \vee z);$ связки: конъюнкция и отрицание;

б) $(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) \rightarrow (x \leftrightarrow y) \wedge (\bar{x} \leftrightarrow \bar{y});$ связки: дизъюнкция и отрицание;

в) $\overline{(x \leftrightarrow y)} \vee x;$ связки: импликация и отрицание.

5. ФУНКЦИИ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

5.1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Функцией алгебры логики (логической функцией) f от n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ типа $B^n \rightarrow B$, где $B = \{0,1\}$.

Любую логическую функцию можно задать *таблицей истинности*:

Значения переменных	Значение функции
$x_1, \dots, x_n$	$f(x_1, \dots, x_n)$

Табл. 5.1 задает логические функции двух переменных:

Таблица 5.1

x_1 x_2	0	0	1	1	Обозначение	Наименование
	0	1	0	1		
$f_0(x_1, x_2)$	0	0	0	0	0	константа 0
$f_1(x_1, x_2)$	0	0	0	1	$x_1 \& x_2$	конъюнкция
$f_2(x_1, x_2)$	0	0	1	0	$(x_1 \rightarrow x_2)$	
$f_3(x_1, x_2)$	0	0	1	1	x_1	переменная x_1
$f_4(x_1, x_2)$	0	1	0	0	$(x_2 \rightarrow x_1)$	
$f_5(x_1, x_2)$	0	1	0	1	x_2	переменная x_2
$f_6(x_1, x_2)$	0	1	1	0	$x_1 \oplus x_2$	неравнозначность
$f_7(x_1, x_2)$	0	1	1	1	$x_1 \vee x_2$	дизъюнкция
$f_8(x_1, x_2)$	1	0	0	0	$x_1 \downarrow x_2$	стрелка Пирса
$f_9(x_1, x_2)$	1	0	0	1	$x_1 \sim x_2$	эквивалентность
$f_{10}(x_1, x_2)$	1	0	1	0	$\bar{x}_2$	отрицание
$f_{11}(x_1, x_2)$	1	0	1	1	$x_2 \rightarrow x_1$	импликация
$f_{12}(x_1, x_2)$	1	1	0	0	$\bar{x}_1$	отрицание
$f_{13}(x_1, x_2)$	1	1	0	1	$x_1 \rightarrow x_2$	импликация
$f_{14}(x_1, x_2)$	1	1	1	0	$x_1 x_2$	штрих Шеффера
$f_{15}(x_1, x_2)$	1	1	1	1	1	константа 1

Система функций $\{\&, \vee, \}$ образует *булев базис*. Множество логических функций с заданным на нем булевым базисом образуют *булеву алгебру*.

Основные равносильности в булевой алгебре:

- $x \vee x = x$, $x \cdot x = x$;
- $x \vee y = y \vee x$, $x \cdot y = y \cdot x$;
- $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$;
- $x \vee (y \cdot z) = (x \vee y) \cdot (x \vee z)$, $x \cdot (y \vee z) = x \cdot y \vee x \cdot z$;
- $\bar{\bar{x}} = x$;

6. $x \cdot 1 = x, \quad x \cdot 0 = 0, \quad x \vee 1 = 1, \quad x \vee 0 = x, \quad \bar{1} = 0, \quad \bar{0} = 1;$
7. $\overline{x \vee y} = \bar{x} \cdot \bar{y}, \quad \overline{x \cdot y} = \bar{x} \vee \bar{y};$
8. $x \cdot \bar{x} = 0;$
9. $x \vee \bar{x} = 1.$

Формулы, реализующие одну и ту же функцию, называются *эквивалентными* или *равносильными*. При доказательстве равносильности формул используются основные равносильности булевой алгебры и следующие формулы:

10. $x \rightarrow y = \bar{x} \vee y;$
11. $x \sim y = xy \vee \bar{x}\bar{y};$
12. $x \oplus y = x\bar{y} \vee \bar{x}y;$
13. $x \downarrow y = \overline{x \vee y} = \bar{x} \cdot \bar{y};$
14. $x | y = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}} = \bar{x} \vee \bar{y}.$

При упрощении формул используются равносильности:

15. Поглощение: $x \vee x \cdot y = x; \quad x \cdot (x \vee y) = x;$
16. Склеивание/расщепление: $xy \vee \bar{x}y = y; \quad (x \vee y)(\bar{x} \vee y) = y;$
17. Обобщенное склеивание: $xy \vee \bar{x}z = xy \vee \bar{x}z \vee yz.$

Элементарными конъюнкциями (дизъюнкциями) называются конъюнкции (дизъюнкции) переменных или их отрицаний, в которых каждая переменная встречается не более одного раза.

Пример 5.1. Элементарная дизъюнкция: $x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3, \quad x_1.$

Пример 5.2. Элементарная конъюнкция: $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3, \quad \bar{x}_2.$

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется дизъюнкция конечного множества попарно различных элементарных конъюнкций.

Пример 5.3. $x_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3, \quad \bar{x}_2 \vee x_3.$

Аналогично, можно определить **конъюнктивную нормальную форму (КНФ)** как конъюнкцию конечного множества попарно различных элементарных дизъюнкций.

Пример 5.4. $(x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)), \quad \bar{x}_2 \vee x_3.$

Из примеров 5.3 и 5.4 видно, что форма $\bar{x}_2 \vee x_3$ является одновременно ДНФ и КНФ.

Для любой функции можно найти ее представление в ДНФ и КНФ, используя аксиомы алгебры логики.

Пример 5.5. Найти ДНФ, КНФ для функции

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 x_2 \vee \bar{x}_2 x_3)(x_1 \vee \bar{x}_4).$$

Решение.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 x_2 \vee \overline{x_2 x_3})(x_1 \vee \overline{x_4}) \stackrel{\text{акс.6}}{=} x_1 x_2 x_1 \vee x_1 x_2 \overline{x_4} \vee \overline{x_2 x_3} x_1 \vee \overline{x_2 x_3} \overline{x_4} \stackrel{\text{акс.1,3}}{=} x_1 x_2 \vee x_1 x_2 \overline{x_4} \vee \overline{x_2 x_3} x_1 \vee \overline{x_2 x_3} \overline{x_4} - \text{ДНФ.}$$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (x_1 x_2 \vee \overline{x_2 x_3})(x_1 \vee \overline{x_4}) \stackrel{\text{акс.6}}{=} \\ &= (x_1 x_2 \vee \overline{x_2})(x_1 x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_4}) \stackrel{\text{акс.1}}{=} \\ &= (\overline{x_2} \vee x_1 x_2)(x_3 \vee x_1 x_2)(x_1 \vee \overline{x_4}) \stackrel{\text{акс.6}}{=} \\ &= (\overline{x_2} \vee x_1)(\overline{x_2} \vee x_2)(x_3 \vee x_1)(x_3 \vee x_2)(x_1 \vee \overline{x_4}) \stackrel{\text{акс.1,7}}{=} \\ &= (x_1 \vee \overline{x_2})(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_4}) - \text{КНФ.} \end{aligned}$$

Любая булева функция может иметь много представлений в виде ДНФ и КНФ. Особое место среди этих представлений занимают совершенные ДНФ (СДНФ) и совершенные КНФ (СКНФ).

ДНФ формулы A называется **совершенной дизъюнктивной нормальной формой A (СКНФ A)**, если для нее выполняются четыре свойства совершенства:

1. Каждое логическое слагаемое формулы содержит все переменные, входящие в функцию.
2. Все логические слагаемые формулы различны.
3. Ни одно логическое слагаемое не содержит одновременно переменную и ее отрицание.
4. Ни одно логическое слагаемое формулы не содержит одну и ту же переменную дважды.

Иначе, **совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ)** называется ДНФ, каждая конъюнкция которой содержит все переменные или их отрицания.

СДНФ может быть получена двумя способами. Первый способ заключается в использовании таблицы истинности. Другой способ получения СДНФ основан на равносильных преобразованиях формулы и состоит в следующем:

1. Путем равносильных преобразований формулы A получают одну из ДНФ A .
2. Если в полученной ДНФ A входящая в нее элементарная конъюнкция B не содержит переменную x_i , то, используя равносильность

$B \& (x_i \vee \bar{x}_i) \equiv B$, элементарную конъюнкцию B заменяют на две элементарных конъюнкции $(B \& x_i)$ и $(B \& \bar{x}_i)$, каждая из которых содержит переменную x_i .

3. Если в ДНФ A входят две одинаковые элементарные конъюнкции B , то лишнюю можно отбросить, пользуясь равносильностью $B \vee B \equiv B$.

4. Если некоторая элементарная конъюнкция B , входящая в ДНФ A , содержит переменную x_i и ее отрицание $\bar{x}_i$, то $B \equiv 0$, и B можно исключить из ДНФ A , как нулевой член дизъюнкции.

5. Если некоторая элементарная конъюнкция, входящая в ДНФ A , содержит переменную x_i дважды, то одну переменную можно отбросить, пользуясь равносильностью $x_i \& x_i \equiv x_i$.

После выполнения описанной процедуры будет получена СДНФ A . Например, для формулы $A \equiv x \vee y \& (x \vee \bar{y})$ ДНФ $A \equiv x \vee x \& y \vee y \& \bar{y}$.

Так как элементарная конъюнкция $B \equiv x$, входящая в ДНФ A , не содержит переменной y , то, пользуясь равносильностью $B \equiv B \& (y \vee \bar{y}) \equiv x \& (y \vee \bar{y}) \equiv x \& y \vee x \& \bar{y}$, заменим ее на две элементарных конъюнкции $x \& y$ и $x \& \bar{y}$.

В результате получим ДНФ $A \equiv x \& y \vee x \& \bar{y} \vee x \& y \vee y \& \bar{y}$. Так как ДНФ A содержит две одинаковых элементарных конъюнкции $x \& y$, то лишнюю отбросим. В результате получим ДНФ $A \equiv x \& y \vee x \& \bar{y} \& \bar{y}$. Так как элементарная конъюнкция $y \& \bar{y}$ содержит переменную y и ее отрицание $\bar{y}$, то $y \& \bar{y} \equiv 0$, и ее можно отбросить как нулевой член дизъюнкции. Таким образом, получаем СДНФ $A \equiv x \& y \vee x \& \bar{y}$.

КНФ формулы A называется **совершенной конъюнктивной нормальной формой A (СКНФ A)**, если для нее выполняются четыре свойства совершенства:

1. Все элементарные дизъюнкции, входящие в КНФ A , различны.
2. Все элементарные дизъюнкции, входящие в КНФ A , содержат все переменные.
3. Каждая элементарная дизъюнкция, входящая в КНФ A , не содержит двух одинаковых переменных.
4. Каждая элементарная дизъюнкция, входящая в КНФ A , не содержит переменную и ее отрицание.

Один из способов получения СКНФ состоит в использовании таблицы истинности для формулы $\bar{A}$.

Действительно, получив с помощью таблицы истинности СДНФ $\bar{A}$, мы получим СКНФ A , взяв отрицание $\overline{\text{СДНФ } \bar{A}}$, то есть $\text{СКНФ } A \equiv \overline{\text{СДНФ } \bar{A}}$.

Другой способ получения СКНФ, использующий равносильные преобразования, состоит в следующем:

1. Путем равносильных преобразований формулы A получают одну из КНФ A .

2. Если в полученной КНФ A входящая в нее элементарная дизъюнкция B не содержит переменную x_i , то, используя равносильность $B \vee (x_i \& \bar{x}_i) \equiv B$, элементарную дизъюнкцию B заменяют на две элементарные дизъюнкции $(B \vee x_i)$ и $(B \vee \bar{x}_i)$, каждая из которых содержит переменную x_i .

3. Если в КНФ A входят две одинаковые элементарные дизъюнкции B , то лишнюю можно отбросить, пользуясь равносильностью $B \& B \equiv B$.

4. Если некоторая элементарная дизъюнкция, входящая в КНФ A , содержит переменную x_i дважды, то лишнюю можно отбросить, пользуясь равносильностью $x_i \vee x_i \equiv x_i$.

5. Если некоторая элементарная дизъюнкция, входящая в КНФ A , содержит переменную x_i и ее отрицание, то $x_i \vee \bar{x}_i \equiv 1$ и, следовательно, вся элементарная дизъюнкция имеет значение 1, а поэтому ее можно отбросить как единичный член конъюнкции.

После описанной процедуры будет получена СКНФ A .

Например, для формулы $A \equiv x \vee y \& (x \vee \bar{y})$ КНФ $A \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee x \vee \bar{y})$.

Так как обе элементарные дизъюнкции различны и содержат все переменные (x и y), то первое и второе условия СКНФ A выполнены.

Элементарная дизъюнкция $x \vee x \vee \bar{y}$ содержит переменную x дважды, но $x \vee x \equiv x$, и поэтому КНФ $A \equiv (x \vee \bar{y}) \& (x \vee y)$, причем, ни одна из элементарных дизъюнкций не содержит переменную и ее отрицание. Значит, теперь выполнены все условия СКНФ A , и, следовательно, $\text{СКНФ } A \equiv (x \vee \bar{y}) \& (x \vee y)$.

На практике также используются понятия конституент нуля и единицы и определение ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ с использованием этих понятий.

Конституентой единицы K^1 набора $a_1, \dots, a_n$ называется конъюнкция всех переменных, образующих этот набор. Причем, переменная входит в конъюнкцию с отрицанием, если она на данном наборе равна 0 и без отрицания, если она равна 1.

Конституентой нуля K^0 данного набора называется дизъюнкция всех переменных, образующих этот набор. Переменная входит в дизъюнкцию без отрицания, если она на этом наборе равна 0 и с отрицанием, если она равна 1.

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма функции f – дизъюнкция K^1 тех наборов, на которых функция принимает значение 1.

Совершенная конъюнктивная нормальная форма функции f – конъюнкция K^0 тех наборов, на которых функция принимает значение 0. Представление функции в СДНФ или СКНФ единственно. Совершенные формы легко строить по таблице истинности.

Пример 5.6. Построим СДНФ и СКНФ для функции f , для которой задана таблица истинности.

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Для построения СДНФ рассмотрим все наборы, на которых функция принимает значение 1, и выпишем для этих наборов все K^1 :

$$\overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3}, \overline{x_1} \overline{x_2} x_3, \overline{x_1} x_2 \overline{x_3}, \overline{x_1} x_2 x_3.$$

Тогда СДНФ имеет вид:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_2 x_3).$$

Для построения СКНФ рассмотрим все наборы, на которых функция принимает значения 0, и выпишем для этих наборов K^0 :

$$x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}, x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3, \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}, \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3.$$

Тогда СКНФ имеет вид:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3).$$

Для построения СДНФ из ДНФ, кроме того, можно домножить элементарную конъюнкцию на $(x_i \vee \overline{x_i})$ (если переменная x_i отсутствует в элементарной конъюнкции) и применить закон дистрибутивности.

Пример 5.7. Найти СДНФ для функции

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1 \vee \overline{x_2} x_3 \\ f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1 \vee \overline{x_2} x_3 = \\ &= x_1(x_2 \vee \overline{x_2})(x_3 \vee \overline{x_3}) \vee (x_1 \vee \overline{x_1}) \overline{x_2} x_3 = \\ &= (x_1 x_2 \vee x_1 \overline{x_2})(x_3 \vee \overline{x_3}) \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 = \\ &= x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} = \\ &= x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 - \text{СДНФ}. \end{aligned}$$

Для построения СКНФ из КНФ в элементарную дизъюнкцию, не содержащую переменную x_i , добавляем $x_i \overline{x_i}$ и применяем закон дистрибутивности.

Пример 5.8. Найти СКНФ для функции $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2) x_3$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 \vee x_2) x_3 = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \overline{x_3})(x_1 \overline{x_1} \vee x_2 \overline{x_2} \vee x_3) = \\ &= (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \cdot \\ &\cdot (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3) = \\ &= (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3) - \\ &\text{СКНФ}. \end{aligned}$$

Для представления СДНФ функции f можно указывать номера K^1 , на которых функция равна 1. Для определения набора необходимо перевести номер K^1 в двоичное число.

Пример 5.9. Пусть СДНФ функция f определяется следующим образом

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = V_{\substack{1 \\ 1}}(1, 5, 8, 11, 14).$$

Переведем номера K^1 в двоичные числа

$$1 = 2^0 = 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 0001_2,$$

$$5 = 2^2 + 2^0 = 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 0101_2,$$

$$8 = 2^3 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 1000_2,$$

$$11 = 2^3 + 2^1 + 2^0 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1011_2,$$

$$14 = 2^3 + 2^2 + 2^1 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 1110_2.$$

Таким образом, f обращается в 1 на наборах

$$(0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 0).$$

Аналогично, для представления функции в СКНФ будем использовать запись с указанием номеров K^0 , на которых функция равна 0.

Пример 5.10. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \prod_0(2, 3, 7, 11)$.

Переведем номера K^0 в двоичные числа

$$2 = 2^1 = 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 0010_2,$$

$$3 = 2^1 + 2^0 = 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 0011_2,$$

$$7 = 2^2 + 2^1 + 2^0 = 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 0111_2,$$

$$11 = 2^3 + 2^1 + 2^0 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1011_2.$$

Функция f обращается в 0 на наборах

$(0, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1)$.

5.2. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

5.1. Дайте определение логической функции. Сколько существует логических функций от n переменных?

5.2. Определите от каких переменных существенно зависят функции:

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| а) $f(x, y) = 1$; | б) $f(x, y) = \bar{x}$; |
| в) $f(x, y) = y$; | г) $f(x, y) = x \vee y$; |
| д) $f(x, y) = (1101)^T$. | |

5.3. Определите, какая из перечисленных формул является ДНФ, СДНФ, КНФ, СКНФ:

- | | |
|---|-------------------------|
| а) $xyz \vee \bar{x}yz$; | б) $xyz \vee \bar{x}$; |
| в) $(x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z)$; | г) $x \vee y$; |
| д) $(x \vee z)(\bar{y} \vee z)$. | |

5.4. Вычислите значение функции $f(x, y, z)$ на наборах $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 0)$ и $(1, 1, 1)$.

- | |
|---|
| а) $f(x, y, z) = (x \sim y) \oplus (xz \vee y)$; |
| б) $f(x, y, z) = (\bar{x} \oplus z)y \rightarrow (x \vee y)$; |
| в) $f(x, y, z) = (x \rightarrow y) \sim (\bar{x} \rightarrow \bar{y})z$. |

5.5. Постройте таблицы истинности следующих функций:

- | |
|---|
| а) $f(x, y) = xy \oplus \bar{x}$; |
| б) $f(x, y) = (xy \oplus \bar{y}) \vee (\bar{x} \rightarrow y)$; |
| в) $f(x, y, z) = (x \rightarrow y) \vee (x \rightarrow zy)$; |

г) $f(x, y, z) = \overline{xyz} \oplus (\bar{x} \rightarrow \overline{zy})$;

д) $f(x, y, z, t) = (\bar{x} \rightarrow (y \oplus z))(\bar{y} \rightarrow xt)(t \rightarrow (z \oplus y))(x \oplus z) \rightarrow x$;

е) $f(x, y, z, t) = \overline{((x \oplus y)(z \oplus t) \rightarrow xyz t)}$.

5.6. Найдите СКНФ и СДНФ функций f_i ($i=1,2,3,4$), заданных таблицей истинности:

x	y	z	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	1

5.7. Найдите СДНФ функций с помощью равносильных преобразований:

а) $f(x, y) = \bar{x} \vee \bar{y}$;

б) $f(x, y, z) = (\bar{x} \rightarrow \bar{y}) \rightarrow (yz \rightarrow xz)$;

в) $f(x, y, z) = \overline{(x \oplus y)} \sim z$;

г) $f(x, y, z) = x \oplus \overline{xyz}$;

д) $f(x, y, z) = \overline{(\bar{x} \vee \bar{y}z) \oplus (z \rightarrow x)}$;

е) $f(x, y, z, t) = \bar{x} \vee z\bar{y}t$.

5.8. Найдите СКНФ функций с помощью равносильных преобразований:

а) $f(x, y) = \bar{x} \rightarrow \bar{y}$;

б) $f(x, y, z) = xy \vee yz \vee \bar{z}$;

в) $f(x, y, z) = x \sim yz$.

5.9. Найдите СДНФ, выражающие следующие функции:

а) $f(x_1, x_2, x_3)=1 \Leftrightarrow$ ровно две переменные ложны;

б) $f(x_1, x_2, x_3)=1 \Leftrightarrow$ ровно одна переменная равна 0;

в) $f(x_1, x_2, x_3, x_4)=1 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 4$.

5.10. Найдите СКНФ, выражающие следующие функции:

а) $f(x_1, x_2, x_3)=0 \Leftrightarrow$ ровно две переменные ложны;

б) $f(x_1, x_2, x_3)=0 \Leftrightarrow$ 0 одна или две переменные равны 0;

в) $f(x_1, x_2, x_3, x_4)=0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 < 2$.

5.11. Дана функция проводимости F релейно-контактной схемы. Постройте схему:

- а) $F(x, y, z) = (\bar{x}y \vee xyz)$;
- б) $F(x, y, z) = (xy \vee \bar{z}y)(x \vee y)$;
- в) $F(x, y, z, t) = (x \vee y \vee \bar{y})(t \vee z)$;
- г) $F(x, y, z, t) = x(z \vee xt)\bar{y} \vee \bar{x}(\bar{y}t \vee z\bar{y})$.

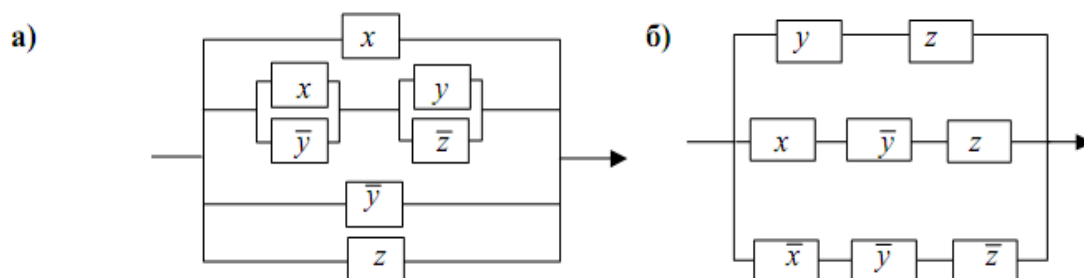
5.12. Составить РКС (релейно-контактные схемы) для формул:

- а) $x \vee y \wedge z$;
- б) $(x \vee y) \wedge z$;
- в) $(x \vee y) \wedge (z \vee t)$;
- г) $(x \vee y \wedge z) \wedge (a \vee b \wedge c)$;
- д) $x \wedge (\bar{y} \wedge z \vee x \vee y)$;
- е) $x \wedge y \wedge z \vee \overline{x \wedge y \wedge z} \vee \bar{x} \wedge y$;
- ж) $x \wedge (y \wedge z \vee \overline{y \wedge z}) \vee \bar{x} \wedge (\bar{y} \wedge z \vee y \wedge \bar{z})$;
- з) $(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z)$;
- и) $(x \rightarrow y) \rightarrow (\bar{x} \wedge (y \vee z))$;
- к) $((x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z)) \rightarrow (x \rightarrow z)$;
- л) $(x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow (y \rightarrow x)$.

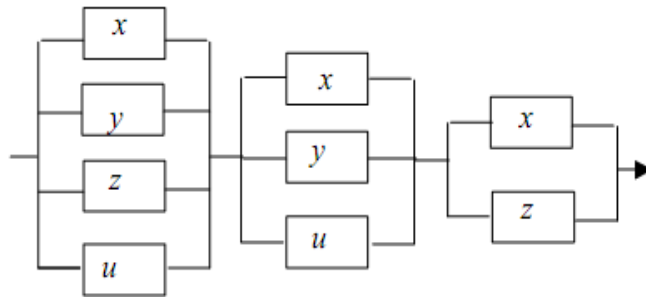
5.13. Найдите СДНФ функцию f , упростите ее, по упрощенной ДНФ постройте релейно-контактную схему:

- а) $f(x, y) = (x \vee y)(\bar{x} \vee y)$;
- б) $f(x, y, z) = (x \oplus \bar{z}) \vee (xy \rightarrow z)$;
- в) $f(x, y, z) = (11101010)^T$;
- г) $f(x, y, z, t) = (000000000101010)^T$.

5.14. Дана релейно-контактная схема. Запишите функцию проводимости и упростите схему:



в)



5.15. Формулу $A \equiv a(bc \rightarrow ab)$ привести к СДНФ: а) путем составления таблицы истинности; б) с помощью равносильных преобразований.

5.16. Для следующих формул найти СДНФ и СКНФ путем равносильных преобразований и используя таблицы истинности:

- а) $x(x \rightarrow y)$;
- б) $(x \rightarrow y) \rightarrow (y \rightarrow x)$;
- в) $(x \vee \bar{z}) \rightarrow y \wedge z$;
- г) $(x \vee \bar{y} \rightarrow x \wedge z) \rightarrow (\overline{x \rightarrow \bar{x}}) \vee y \wedge \bar{z}$;
- д) $(a \cdot b \rightarrow b \cdot c) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (c \rightarrow b))$.

5.17. Найти СДНФ для всякой тождественно истинной формулы, содержащей: а) одно переменное; б) два переменных; в) три переменных.

5.18. Найти СДНФ для всякой тождественно ложной формулы, содержащей: а) одно перемещение; б) два перемещения; в) три перемещения.

ОТВЕТЫ

Глава 1

1.1. а), б), г) — равны; в), д) — не равны.

1.2. а) $P(A) = 8$; б) $P(B) = 16$.

1.3. а) $\{1; 2; 3; 5; 7; 15\}$; б) $\emptyset$; в) $\{2\}$; г) $\{2; 3; 5\}$; д) $\{4; 6; 8\}$.

1.4. а) $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 12\}$; б) $\{5\}$; в) $\{3; 5\}$; г) $\emptyset$; д) $\{1; 2; 4; 6; 12\}$;
е) $\{1; 2; 4; 5; 6; 7; 9; 11; 12\}$.

1.5. а) $\{1; 3; 4; 6; 7; 8; 21\}$; б) $\{3; 7\}$; в) $\{3; 7\}$; г) $\emptyset$; д) $\{1; 2; 5; 11; 21\}$.

1.6. $M \setminus K = \{x | x \in Z; -5 \leq x \leq 3\}$; $K \setminus M = \{x | x \in N; 8 \leq x \leq 12\}$.

1.7. $Z = A \cup B = \{z | z \in R; 0 \leq z \leq 3\}$;

$Z = A \cap B = \{z | z \in R; 1 \leq z \leq 2\}$;

$Z = A \setminus B = \{z | z \in R; 0 \leq z < 1\}$;

$Z = B \setminus A = \{z | z \in R; 2 < z \leq 3\}$.

1.8. а) $[-1; 2)$; б) $[-1; 0)$; в) $(-\infty; 2)$; г) $[0; 1]$; д) $\emptyset$.

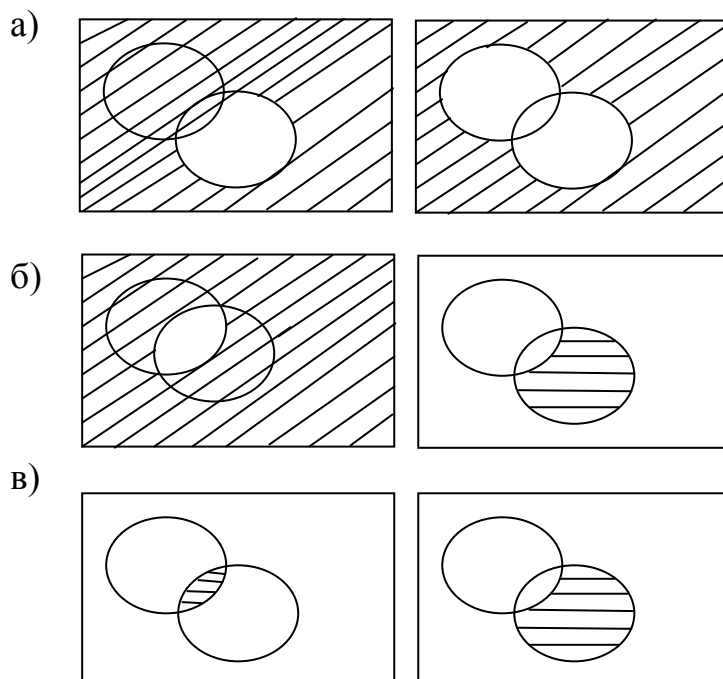
1.9. а) $[0; 5)$; б) $\{0\}$; в) $(-2; 0] \cup (1; 5)$; г) $\emptyset$; д) $\{0\}$.

1.10. а) $(-\infty; \infty)$; б) $\{1\}$; в) $(0; 1)$; г) $(0; \infty)$; д) $\emptyset$; е) $(0; 1)$.

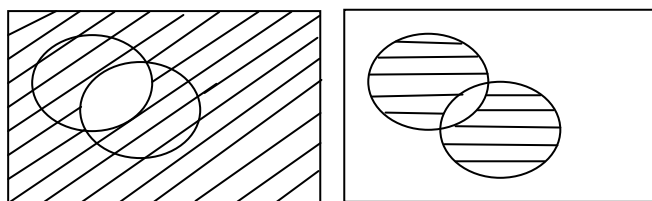
1.11. а) $(-1; 2)$; б) $\{0\}$; в) $(-\infty; 0] \cup [2; \infty)$; г) $(0; 2)$; д) $(-\infty; -1] \cup [2; \infty)$.

1.12. а) $(-1; \infty)$; б) $[0; 3)$; в) $(-\infty; -1] \cup [0; 3)$; г) $(-1; 0) \cup [3; \infty)$; д) $(-\infty; -1]$.

1.13.

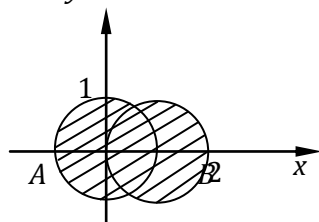


г)

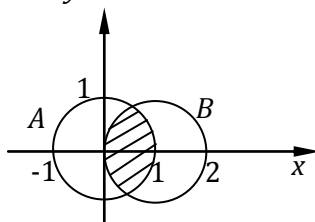


1.14.

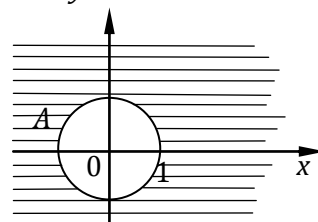
а) y



б) y

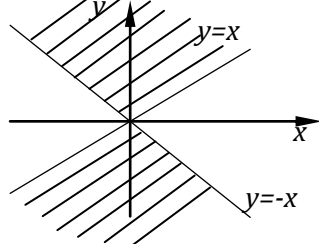


в) y

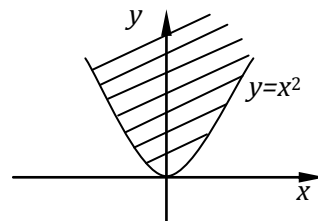


1.15.

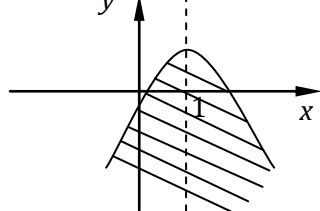
а)



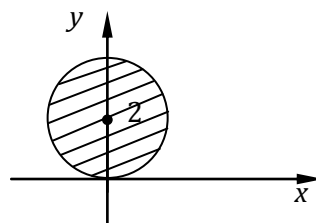
б)



в)



г)



1.16. а) множество квадратов;

б) множество эллипсов;

в) множество окружностей.

1.17. а) $\{(2;2); (2;3); (5;2); (5;3)\}$; б) $\{(2;2); (2;5); (3;2); (3;5)\}$;

в) $\{(2;2); (2;5); (5;2); (5;5)\}$; г) $\{(2;2); (2;3); (3;2); (3;3)\}$;

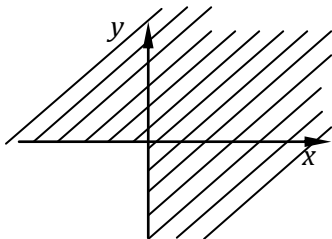
д) $\{(2;2)\}$; е) $\{(2;5); (5;2); (5;5)\}$.

1.18. $A = \{a; m; k\}$; $B = \{1; 5; 8\}$.

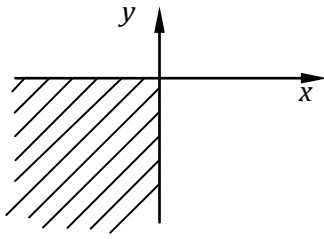
1.19. Множество точек квадрата с вершинами в точках $(0;1)$; $(0;2)$; $(1;1)$; $(1;2)$.

1.20.

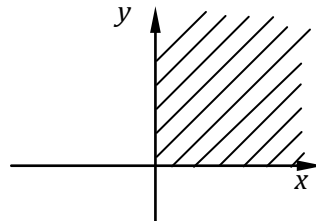
а)



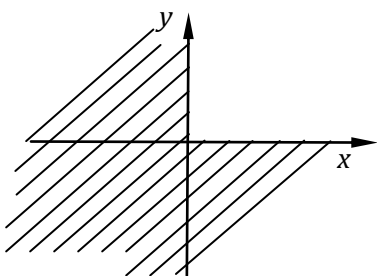
б)



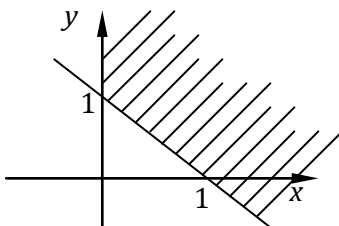
в)



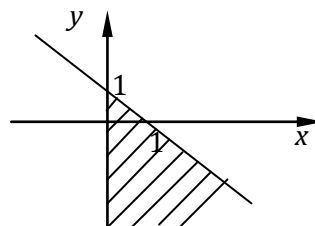
г)



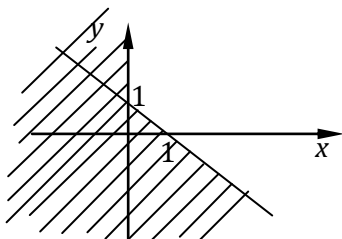
д)



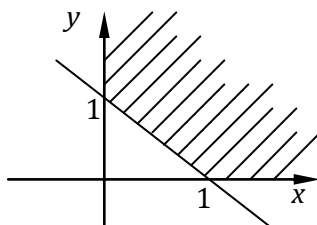
е)



ж)



з)



Глава 2

2.1. а) 40320; б) 35; в) 5.

2.2. 24.

2.3. 12; 6.

2.4. 16; 5.

2.5. а) $(n-1) \cdot n$; б) $\frac{1}{(2m-2)!}$; в) $(n-3)(n-2)$.

2.6. а) 4940; б) $(n+4)(n+3) \cdot \dots \cdot 8 \cdot 7$.

2.7. а) $\frac{1}{15}$; б) $k(k+1)$, если $k \geq n$.

2.9. а) 6; 25; б) 6; в) 5; г) 3; 14; д) 5; е) 6; ж) 5; з) 8;
и) 5; к) 10, если $k \leq 10$; л) 3.

2.10. а) $x=12$; $y=5$; б) $x=20$; $y=8$.

2.11. 120.

2.12. 42.

2.13. 306.

2.14. 2520.

2.15. $2 \cdot 9!$

2.16. $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$.

2.17. 2800.

2.18. 1024.

2.19. 58537.

2.20. 242.

2.21. 30.

2.22. а) 870; б) 435.

2.23. 18; 10.

2.24. 18.

2.25. 4060.

2.26. а) 4650; б) 4806.

2.27. 5040.

2.28. 1487285800.

Глава 4

4.1. а), б), г), д), ж) — являются; в), е), з) — не являются.

4.2. б), г), е), ж), з), и) — истинно; а), в), д) — ложно.

4.8. а), в), г) — «или»; б) д) — «и».

4.9. а), д), з) — истинны; е), ж) — ложны.

4.10. а), б), д) — ложны, остальные истинны.

4.11. а) $x=1, y=0$; б) $x=0, y=1$; в) $x=1, y=1$; г) $x=0, y=0$.

4.13. а), б), в), г), ж), з), к) — истинные; д), е), и) — ложные.

4.16. а) $z \rightarrow x$; б) $x \vee y$; в) 0; г) 1; д) $\bar{x} \vee y \vee z$; е) 0; ж) $\bar{x}$; з) $x \vee y$; и) x .

4.17. а) $\overline{(x \wedge y)} \wedge \bar{y} \wedge z$; б) $\overline{(x \vee y)} \vee (\bar{x} \vee \bar{y})$; в) $\overline{((x \rightarrow y) \rightarrow (y \rightarrow x))} \rightarrow x$.

Глава 5

5.2. а) не зависит существенно от переменных; б) существенно зависит только от x ; в) существенно зависит только от y ; г) существенно зависит только и от x и от y ; д) существенно зависит только и от x и от y ;

5.3. а) СДНФ; б) ДНФ; в) СКНФ; г) ДНФ, СКНФ; д) КНФ.

5.4. а) $f(010) = 1, f(110) = 0, f(111) = 0$;

б) $f(010) = 1, f(110) = 1, f(111) = 1$;

в) $f(010) = 0, f(110) = 0, f(111) = 1$.

5.5. Ответ представлен в виде столбца, соответствующего исходной функции:

а) $(1101)^T$; б) $(1111)^T$; в) $(11110011)^T$; г) $(00010001)^T$; д) $f(x,y,z,t) = 1$;

е) $(1111000110011110)^T$;

5.6.

$$f_1 = \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xyz = (x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z);$$

$$f_2 = \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z$$

$$= (x \vee y \vee z)(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z});$$

$$f_3 = xyz \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} = (x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z});$$

$$f_4 = \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee xyz = (x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z).$$

5.7. а) $\bar{x}\bar{y}$;

б) $\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz$;

в) $\bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xyz$; г) $\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee xyz$;

д) $\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}t \vee \bar{x}\bar{y}z\bar{t} \vee \bar{x}\bar{y}zt \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}y\bar{z}t \vee \bar{x}yz\bar{t} \vee \bar{x}yzt \vee x\bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee x\bar{y}\bar{z}t \vee x\bar{y}z\bar{t} \vee x\bar{y}zt$.

5.8. а) $x \vee \bar{y}$; б) $(x \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})$;

в) $(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$.

5.9. а) $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$; б) $\bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3$; в) $x_1x_2x_3x_4$.

5.10. а) $(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$;

б) $(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$;

в) $(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)$.

5.15. СДНФ $A \equiv a \cdot \bar{b} \cdot c \vee a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \vee a \cdot b \cdot \bar{c} \vee a \cdot b \cdot c$.

5.16. а) СДНФ $A \equiv x \cdot y$; СКНФ $A \equiv (\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y})(x \vee y)$;

б) СДНФ $A \equiv x \wedge \bar{y} \vee x \cdot y \vee \bar{x} \wedge \bar{y}$; СКНФ $A \equiv x \vee \bar{y}$;

в) СДНФ $A \equiv x \cdot y \cdot z \vee x \cdot y \cdot \bar{z} \vee \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z$;

СКНФ $A \equiv (\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(x \vee y \vee z)(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})$;

г) ДНФ $A \equiv x \cdot \bar{y} \cdot z \vee x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \vee x \cdot y \cdot z \vee x \cdot y \cdot \bar{z} \vee \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z} \vee \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \vee \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z$;

СДНФ $A \equiv x \vee \bar{y} \vee \bar{z}$;

д) СКНФ ;

СДНФ $A \equiv (a \vee b \vee \bar{c})$.

5.17. а) $x \vee \bar{x}$; б) $x \cdot y \vee x \cdot \bar{y} \vee \bar{x} \cdot y \vee \bar{x} \cdot \bar{y}$;

в) $x \cdot y \cdot z \vee x \cdot y \cdot \bar{z} \vee x \cdot \bar{y} \cdot z \vee x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \vee \bar{x} \cdot y \cdot z \vee \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z} \vee \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z \vee \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$.

5.18. а) $x \wedge \bar{x}$; б) $(\bar{x} \vee \bar{y})(\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y})(x \vee y)$;

в) $(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z) \wedge$
 $\wedge (x \vee y \vee \bar{z})(x \vee y \vee z)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Алексеев В.В. Элементы теории множеств и теории графов: сборник задач и упражнений по курсу «Дискретная математика». – Саратов: СГФТИ, 2001. – 30 с.
2. Практикум по дискретной математике / Т.В. Бернштейн Т.В. Храмова – Новосибирск: СибГУТИ, 2011. – 131 с.
3. Дискретная математика. Учебное пособие / Н.Е. Хрипунова, Н.Р. Шурыгина, Л.Ф. Науменко – СПб: СПбВВУРЭ (Военный институт), 2006. – 165 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. Множества	4
1.1. Краткие теоретические сведения	4
1.2. Задачи для самостоятельного решения	7
2. Элементы комбинаторики	10
2.1. Краткие теоретические сведения	10
2.1.1. Размещения	10
2.1.2. Перестановки.....	13
2.1.3. Сочетания.....	14
2.1.4. Бином Ньютона	15
2.2. Задачи для самостоятельного решения	16
3. Отношения.....	19
3.1. Краткие теоретические сведения	19
3.2. Задачи для самостоятельного решения	23
4. Алгебра логики	26
4.1. Краткие теоретические сведения	26
4.2. Задачи для самостоятельного решения	28
5. Функции алгебры логики.....	33
5.1. Краткие теоретические сведения	33
5.2. Задачи для самостоятельного решения	40
Ответы.....	44
Библиографический список	50