

В. М. Пестриков

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
В ИНЖЕНЕРИИ**

Учебное пособие

**Санкт-Петербург
2023**

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«Санкт-Петербургский государственный университет
промышленных технологий и дизайна»
Высшая школа технологии и энергетики**

В. М. Пестриков

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
В ИНЖЕНЕРИИ**

Учебное пособие

Утверждено Редакционно-издательским советом ВШТЭ СПбГУПТД

Санкт-Петербург
2023

УДК 519.62+519.65

ББК 22.193

П 28

Рецензенты:

кандидат технических наук, доцент Высшей школы технологии и энергетики
Санкт-Петербургского государственного университета промышленных технологий и дизайна

Е. В. Хардинов;

кандидат технических наук, доцент Санкт-Петербургского государственного института
кино и телевидения

С. В. Перельгин

Пестриков, В. М.

П 28 Математические методы в инженерии: учеб. пособие / В. М. Пестриков. —
СПб.: ВШТЭ СПбГУПТД, 2023. — 158 с.
ISBN 978-5-91646-354-5

Учебное пособие соответствует программе и учебному плану дисциплины «Математические методы в инженерии» для студентов, обучающихся по направлению подготовки 15.04.02 «Технологические машины и оборудование».

В учебном пособии рассмотрены теоретические и практические аспекты использования математических методов в инженерной деятельности. Приводятся основные термины и определения моделирования, его классификация и особенности использования при решении научно-технических проблем. Показаны возможность и необходимость использования современного математического аппарата при постановке и обработке инженерных экспериментов. Рассмотрены вопросы построения эмпирических формул и обработки результатов косвенных измерений, а также анализ и интерпретация результатов исследования. Для решения представленных в пособии задач используется пакет прикладных программ Mathcad и среда Excel.

Учебное пособие предназначено для подготовки бакалавров и магистров очной и заочной форм обучения. Отдельные разделы пособия могут быть полезны аспирантам и специалистам, работающим в области расчета конструкций.

УДК 519.62+519.65

ББК 22.193

ISBN 978-5-91646-354-5

© ВШТЭ СПбГУПТД, 2023

© Пестриков В. М., 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	7
ГЛАВА 1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ	8
1.1. Основные понятия	8
1.2. Построение математической модели	10
1.3. Исследование математических моделей	11
1.4. Компьютерное моделирование	12
Контрольные вопросы	13
ГЛАВА 2. ИНЖЕНЕРНЫЕ ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ	14
2.1. Общие сведения	14
2.2. Теоретическое обоснование колебательного характера электрического разряда	15
2.3. Обобщенная модель взаимодействия биологических видов	17
2.4. Динамики популяций и уравнение Лотки–Вольтерры	19
Контрольные вопросы	22
ГЛАВА 3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	23
3.1. Общие замечания	23
3.2. Задача Коши	23
3.3. Метод Эйлера	24
3.4. Метод Рунге–Кутты	25
3.5. Конечно-разностные методы	26
3.6. О «жестких» обыкновенных дифференциальных уравнениях	28
3.7. Выбор алгоритма решения обыкновенных дифференциальных уравнений	29
3.8. Пакеты программ для моделирования инженерных систем	29
Контрольные вопросы	31
ГЛАВА 4. ИНЖЕНЕРНЫЕ ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ	31
4.1. Общие сведения	32
4.2. Проблемы дальней телефонной связи	33
4.3. Распространение тепла в твердом теле	36

4.4. Диффузионные процессы.....	39
Контрольные вопросы	41
ГЛАВА 5. РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОТЕХНИКИ, ИМЕЮЩИХ ЗНАЧЕНИЕ ДЛЯ ПРАКТИКИ	42
5.1. Стационарное распределение температуры в прямоугольном брусе	42
5.2. Охлаждение бесконечного стержня.....	45
5.3. Охлаждение тонкой пластины.....	49
Контрольные вопросы	53
ГЛАВА 6. ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ	54
6.1. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных	55
6.2. Подходы к решению дифференциальных уравнений в частных производных	57
Контрольные вопросы	59
ГЛАВА 7. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ.....	59
7.1. Метод конечных разностей.....	59
7.2. Формулы численного дифференцирования	60
7.3. Простейшие разностные схемы задачи Коши	62
7.4. Метод сеток для уравнений параболического типа	64
Контрольные вопросы	67
ГЛАВА 8. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕПЛОТЕХНИКИ В MATHCAD И EXCEL ...	68
8.1. Опция relax	68
8.2. Опция multigrid	69
8.3. Опция Pdesolve.....	70
8.4. Опция numol	72
8.5. Решение задачи теплопроводности в Excel	74
Контрольные вопросы	75
ГЛАВА 9. МЕТОДЫ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА.....	76
9.1. Специальные приемы планирования эксперимента	76
9.2. Методы экспертных оценок.....	80
9.3. Методы проведения экспертизы (формы организации экспертизы)	83
9.4. Обработка результатов экспертизы	84
Контрольные вопросы	86

ГЛАВА 10. ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ЧИСЛА ФАКТОРОВ	87
10.1. Планирование однофакторного эксперимента	87
10.2. Планирование двухфакторного эксперимента	90
10.3. Полный факторный эксперимент.....	92
10.4. Неполные и неортогональные планы	96
Контрольные вопросы	97
ГЛАВА 11. МНОЖЕСТВЕННЫЙ РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ	98
11.1. Регрессионные модели	98
11.2. Оценка качества модели регрессии	99
11.3. Обнаружение гетероскедастичности	102
11.4. Прогнозирование поведения исследуемого объекта	103
Контрольные вопросы	104
ГЛАВА 12. АППРОКСИМАЦИЯ, ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЙ.....	104
12.1. Аналитическое описание экспериментальных данных формулой.....	104
12.2. Построение формул для описания экспериментальных данных.....	106
12.3. Подбор параметров эмпирических формул	107
12.4. Нахождение коэффициентов аппроксимирующей функции, заданных в виде линейных произвольных функций	109
12.5. Интерполяция.....	110
12.6. Линейное и квадратичное интерполирование	111
12.7. Сплайны	113
12.8. Функции сглаживания данных	115
12.9. Экстраполяция	116
Контрольные вопросы	117
ГЛАВА 13. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ	118
13.1. О разрешимости алгебраических уравнений	118
13.2. Метод половинного деления	119
13.3. Метод Ньютона (метод касательных).....	120
13.4. Метод секущих.....	120
13.5. Графический метод решения уравнений.....	121
Контрольные вопросы	122

ГЛАВА 14. РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ В КОМПЬЮТЕРНЫХ СРЕДАХ.....	122
14.1. Решение нелинейного уравнения с помощью функции <i>root</i>	122
14.2. Решение нелинейного уравнения с параметром.....	123
14.3. Нахождение корней полинома	124
Контрольные вопросы	125
ГЛАВА 15. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ	125
15.1. Решение линейных систем уравнений.....	125
15.2. Решение системы линейных алгебраических уравнений в компьютерной среде	126
15.3. Решение системы нелинейных алгебраических уравнений.....	127
15.4. Решение системы нелинейных алгебраических уравнений в компьютерной среде	128
Контрольные вопросы	130
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	131
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	132
ПРИЛОЖЕНИЯ	136

ПРЕДИСЛОВИЕ

В учебном пособии рассмотрены теоретические и практические аспекты использования математических методов в инженерной деятельности.

Курс «Математические методы в инженерии» основывается на естественно-научной и инженерной подготовке студентов и тесно связан с преподаваемыми в вузе дисциплинами «Высшая математика» и «Информационные технологии». Без углубления в математические проблемы в предлагаемом пособии демонстрируются возможности современных методов планирования и математической обработки эксперимента на конкретных примерах. На этом фоне четко прослеживаются требования к современной технологии, которая должна быть подготовленной для использования методов планирования, сбора и обработки показателей новых технологий.

Приводятся базовые термины и определения моделирования, его классификация и особенности использования математических методов при решении научно-технических проблем. Рассмотрены основные понятия и методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений и в частных производных. Дана классификация уравнений в зависимости от их математической природы и физического смысла. Исследована постановка задач Дирихле и Неймана, а также понятия сходимости, устойчивости, погрешности метода конечных разностей при аппроксимации уравнений параболического, гиперболического и эллиптического типов. Приведены примеры решения обыкновенных дифференциальных уравнений и в частных производных с реализацией их решения на ЭВМ.

Уделено внимание методам построения эксперимента в зависимости от целей решаемых задач. Показаны возможность и необходимость использования современного математического аппарата при постановке и обработке инженерных экспериментов. Рассмотрены вопросы построения эмпирических формул и обработки результатов косвенных измерений, а также анализ и интерпретация результатов исследования. Для решения представленных в пособии задач используется пакет прикладных программ *Mathcad* и среда *Excel*.

Настоящее учебное пособие предназначено для глубокой проработки его разделов теоретического курса, а также для самостоятельной работы студентов при решении приведенных в нем практических заданий с использованием ЭВМ.

Данный материал пособия изучается бакалаврами направления подготовки 15.04.02 Технологические машины и оборудование согласно рабочей программе учебной дисциплины «Математические методы в инженерии».

ГЛАВА 1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Наука при изучении сложных процессов и явлений в физике, химии, биологии, экономике, социологии и т. д. использует соответствующий математический аппарат для их описания. Более точное математическое описание процессов и явлений приводит к появлению сложных математических задач, которые не всегда удастся решить аналитическими методами в явном виде. Для решения таких задач приходится прибегать к построению более простых математических моделей, которые с достаточной точностью описывают поставленную задачу.

1.1. Основные понятия

Под моделированием понимается замена сложного по своей природе объекта другим более простым, отображающего его основные свойства, с целью получения информации о важнейших свойствах объекта-оригинала с помощью объекта-модели. Таким образом, моделирование может быть определено как представление объекта моделью для получения информации об этом объекте путем проведения модельного эксперимента. Модели обычно делят на три типа: физические, вещественно-математические и логико-математические (или просто математические).

Математическое моделирование – это метод исследования реальных объектов при помощи постановки экспериментов на их моделях. Математическая модель представляет собой упрощенное подобие реального объекта, используемое для его исследования. Выбор модели для решения научно-технической проблемы определяется не только характером моделируемого объекта, но и спецификой самой задачи [1–3]. Исходя из этого, разрабатываются этапы модельного решения проблемы. Поскольку обычно нет общих правил для создания модели, то условно можно выделить три основных этапа моделирования поставленной задачи, которые должны привести к решению проблемы:

- построение математической модели;
- компьютерная реализация предложенной математической модели (компьютерное моделирование);
- оценка достоверности предложенной модели и возможность ее практического использования.

Вывод, анализ, численное моделирование и математические модели реальных процессов – основная задача современной прикладной математики. Даже если вас интересуют лишь частичные аспекты, обычно важно понимать значение и структуру лежащих в основе математических моделей.

В принципе, математическая модель может использоваться для описания любого вычисляемого (в детерминированном или стохастическом смысле) набора математических правил, уравнений и неравенств, которые предназначены для описания аспекта реального процесса. Необходимо помнить

с самого начала, что модель всегда является упрощением и что реальный процесс почти никогда не описывается во всей его сложности. Первое различие проводится в следующем:

– Качественные модели, т. е. модели, которые в основном должны описывать структуру процесса и позволять делать определенные качественные прогнозы (например, о долгосрочной скорости роста), но которые не предоставляют каких-либо явных значений для переменных системы.

– Количественные модели, т. е. модели, предназначенные для количественного прогнозирования значений определенных переменных.

Качественные модели часто используются в экономике (например, для понимания динамики ценообразования), а также в некоторых естественных науках, таких как экология. Иногда качественной модели бывает достаточно, чтобы понять, развивается ли экологическое равновесие или становится ли оно возможным, приходящим. Однако в целом в науке и технике предпочтение отдается количественным моделям.

Прежде чем разрабатывать математическую модель или применять существующие модели к специальному процессу, необходимо четко понимать масштабы (место и время), в которых рассматривается процесс, и масштабы, которые на него влияют. Например, квантово-механические эффекты вряд ли будут иметь значение для описания уличного освещения, с другой стороны, в случае турбулентного потока, например, очень маленькие водовороты могут сильно влиять на всю динамику. Сведение к так называемым релевантным масштабам важно для сохранения значимого размера модели, что также позволяет проводить численное моделирование за приемлемое время. Также важно моделировать только те эффекты, которые действительно влияют на процесс, чтобы модель и время вычислений были небольшими. Например, при моделировании потока можно также смоделировать проводимость в нем. Однако, поскольку небольшие колебания температуры оказывают незначительное влияние, этого часто не делают; объединение моделей возмущений и теплопроводности важно только для процессов с сильными колебаниями температуры (например, камеры сгорания газовой турбины).

Еще одним различием между математическими моделями является природа неизвестного. Например, дискретные модели состоят из конечного числа частиц (атомов, молекул и т. д.), свойства которых (положение, скорость, спин и т. д.) описываются моделью. В то время как модели континуума описывают плотности переменных, обычно как функции места и времени.

В отличие от чисто математической задачи при математическом моделировании нельзя предположить, что существует «правильный» ответ, можно только попытаться выбрать из множества возможностей тот, который лучше всего соответствует желаемым целям.

Достоверность математической модели зависит от теорем существования решений соответствующих дифференциальных уравнений. Дело в том, что математическая модель не всегда адекватна конкретному явлению и из существования решения реальной задачи (физической, химической,

биологической) еще не следует существование решения соответствующей математической задачи.

Если результаты моделирования подтверждаются и могут служить основой для прогнозирования процессов, протекающих в исследуемых объектах, то говорят, что модель адекватна объекту. При этом адекватность модели зависит от цели моделирования и принятых критериев.

1.2. Построение математической модели

Математическая модель изучаемого физического явления, как правило, формулируется в виде *уравнений математической физики*, которые описывают процесс и в которые в виде коэффициентов входят характеристики тел или веществ, участвующих в процессе. Чаще всего это нелинейные, многомерные системы уравнений, содержащие большое число неизвестных и параметров. Если математическая модель выбрана недостаточно тщательно, то какие бы мы не применяли методы для дальнейших расчетов, полученные результаты будут ненадежны, а в отдельных случаях и совершенно неверны:

1. Никогда нельзя быть уверенным в адекватности модели. Не существует строгого метода доказательства существования отношения гомоморфизма. Обычно гомоморфизм обосновывается индуктивно, что чревато ошибками.

2. Объект моделирования может быть подвержен изменениям. Модель, успешно работавшая в прошлом, не обязательно окажется полезной в настоящем.

3. Границы применимости модели, как правило, неизвестны. Результаты одних модельных экспериментов могут быть полезными, других – нет. Разработка и исследование модели могут оказаться намного дороже, чем предполагалось.

Исследуя полученные дифференциальные уравнения вместе с дополнительными условиями, которые обычно задаются в виде начальных и граничных условий, можно получить сведения о происходящем явлении, иногда может узнать его прошлое и будущее.

Изучение математической модели математическими методами позволяет не только получить качественные характеристики физических явлений и рассчитать с заданной степенью точности ход реального процесса, но и дает возможность проникнуть в суть физических явлений, а иногда предсказать и новые физические эффекты. Бывает, что сама природа физического явления подсказывает и подходы, и методы математического исследования.

Основными требованиями, предъявляемыми к математическим моделям, являются требования адекватности, универсальности и экономичности. Критерием правильности выбора математической модели является практика, сопоставление данных математического исследования с экспериментальными данными.

На первом этапе изучения любого явления производится качественное описание проблемы. На этапе моделирования качественное представление

переходит в количественное, определяются функциональные зависимости между переменными и выходные данные модели. Построение моделей является неформальным этапом, который всегда опирается на определенный опытный материал и очень сильно зависит от квалификации исследователя. Модель должна не только правильно отражать явление, но и быть удобной для использования. В связи с этим степень детализации модели, форма ее представления зависят от целей исследования.

Для представления математической модели в виде дифференциальных уравнений не требуется информация обо всем физическом процессе, а необходимо знать только локальные связи между основными характеристиками явления.

За последние сто лет было разработано множество методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Хотя значительная часть методов полезна только для теоретических целей, некоторые из них важны для решения реальных проблем, возникающих в науке и технике.

1.3. Исследование математических моделей

После построения математической модели переходят к ее исследованию, т. е. к решению поставленной математической задачи (рис. 1.1). На этом этапе моделирования, в зависимости от сложности рассматриваемой модели, применяют различные подходы к ее исследованию и различный смысл вкладывается в понятие решения задачи.



Рис. 1.1. Этапы математического исследования модели

На этапе формирования содержательной модели строят определенные предположения относительно того, какой математический аппарат будет далее использоваться, а также по возможности формулируются постулаты модели на адекватном языке. Поэтому класс методов, из которых будет выбираться способ решения данной конкретной задачи, в некотором плане уже предопределен. Однако и внутри этого класса существует множество различных подходов.

Прежде всего, надо выделить две основные группы решений – это аналитические методы и численные, с использованием ЭВМ. Заметим, что ценность аналитических результатов значительно выше ценности результатов численного счета. Это понятно каждому, кто когда-либо сталкивался с проблемой анализа базы числовых данных решения сложной многопараметрической задачи. Но привлекательность аналитического решения, обусловленная относительной простотой его анализа, что в некоторой степени нивелирует трудности его получения. Поэтому в сложных задачах математического моделирования возникают не редко трудности в получении аналитического решения, что приводит к неизбежному использованию возможностей ЭВМ.

Использование ЭВМ в процессе математического исследования модели требует специфических, численных методов, т. е. такой «интерпретации» математической модели, которая может быть реализована на ЭВМ – назовем ее *дискретной* (или *вычислительной*) моделью. Поскольку ЭВМ выполняет только арифметические и логические операции, то для реализации вычислительной модели требуется разработка соответствующего *вычислительного алгоритма*, собственно *программирование*, *расчет* на ЭВМ, *обработка* результатов расчета.

Тем не менее в случае использования ЭВМ есть ограничения, поэтому, приступая к решению задачи, необходимо максимально продвинуться по пути аналитического решения. Это позволяет существенно сократить время счета, что очень важно при решении больших задач. При возможности желательно использовать комбинированный численно-аналитический метод с максимальной долей присутствия аналитики.

1.4. Компьютерное моделирование

В настоящее время под компьютерной моделью понимают: 1. Условный образ объекта (системы объектов), описанный компьютерными средствами (таблицами, диаграммами, гипертекстами и др.) и отображающий структуру элементов объекта и взаимосвязи между ними (структурно-функциональные модели); 2. Программный комплекс, позволяющий с помощью последовательности вычислений, воспроизводить процессы функционирования объекта (системы объектов) при воздействии на него различных, как правило, случайных факторов (имитационные модели). Компьютерное моделирование – метод решения задачи анализа или синтеза сложной системы на основе использования ее компьютерной модели.

Построение компьютерной модели так или иначе связано с построением математической модели: для описания структурно-функциональных моделей используется в основном аппарат дифференциальных уравнений; для описания имитационных моделей – аппарат логики-математических моделей.

Построение компьютерных моделей связано с выбором и изучением инструментальных средств моделирования. Широкое распространение различных программных комплексов ЭВМ позволяет получить решения

разнообразного круга инженерных и научных задач без обращения к традиционному программированию.

Подавляющая часть современных универсальных программных комплексов, получивших название Computer Aided Engineering (CAE), ориентировано на проведение инженерных расчетов [4]. Наиболее развитые системы CAE позволяют решать следующие задачи: механики твердого деформируемого тела (МТДТ) [5]; теплообмена; механики жидкостей и газов (МЖГ); электромагнетизма. Большинство из указанных систем позволяют также решать связанные задачи механики сплошных сред и задачи оптимизации.

Теоретические исследования проводятся, как правило, с использованием систем компьютерной математики (СКМ). Среди СКМ наибольшую известность получили системы MATHCAD, MATLAB, MATHEMATICA и MAPLE.

Благодаря высоким характеристикам СКМ MATHCAD полностью оправдывает термин «CAD» в своем названии (Computer Aided Design), подтверждающий принадлежность к классу наиболее сложных и совершенных систем автоматического проектирования – САПР. Система MATHCAD является типичной интегрированной системой, т. е. объединяющей в своем составе несколько обособленных программных средств для решения определенного круга самостоятельных задач.

MATHEMATICA и MAPLE – это наиболее развитые на сегодняшний день системы компьютерной математики. Обе системы имеют встроенные языки программирования высокого уровня. В отличие от MATHCAD и MATLAB системы MATHEMATICA и MAPLE ориентированы в первую очередь на проведение различных аналитических преобразований. Эти системы, в частности, позволяют: проводить алгебраические преобразования; находить в аналитическом виде производные и интегралы; решать аналитически типовые задачи на экстремум; решать аналитически некоторые классы краевых задач и задач Коши для систем дифференциальных уравнений; решать задачи линейной алгебры.

Системы компьютерной математики могут быть использованы при проведении инженерных расчетов, однако по сравнению с CAE возможности СКМ в этой области существенно ограничены. Более разумным представляется вариант, когда теоретические исследования проводятся на основе СКМ, а прикладные расчеты, основанные на предшествующих теоретических исследованиях, при помощи CAE [6, 7].

Контрольные вопросы

1. Что такое модель и моделирование?
2. Назовите цели моделирования.
3. Какие существуют виды моделирования?
4. Перечислите свойства моделей.
5. Какие формы представления моделей Вы знаете?
6. Назовите отличие экспериментального моделирования от реального.
7. Что такое математическая модель и математическое моделирование?

8. Перечислите признаки, по которым классифицируются математические модели.
9. В чем отличие простых моделей от сложных?
10. Какое основное отличие моделей прогноза от оптимизационных моделей?
11. Назовите основные этапы процесса построения математической модели.
12. С какой целью применяется проверка адекватности модели?
13. Назовите основные подходы к построению математической модели. В чем они заключаются?
14. Что означает корректность математической модели?
15. Назовите основные этапы цикла вычислительного эксперимента.
16. Что составляет основу вычислительного эксперимента?
17. Каким требованиям должен соответствовать вычислительный алгоритм?
18. Назовите этапы создания программы для расчетов на ЭВМ.
19. В чем преимущество вычислительного эксперимента.
20. В каких областях знаний применяется вычислительный эксперимент?
21. Приведите примеры математических моделей для описания известных Вам физических процессов.
22. Назовите простейшие математические модели в биологии.

ГЛАВА 2. ИНЖЕНЕРНЫЕ ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

На основе идеализации создаются модели исследуемых объектов и явлений. Для описания физических объектов, моделей и идеальных объектов используются физические величины. Эти величины позволяют установить связи между явлениями природы и представить их в форме физических законов. Во многих случаях бывает затруднительно установить закон, связывающий изучаемые величины, но в то же время можно записать математическую зависимость между ними и их производными или дифференциалами. Такое математическое выражение представляет собой дифференциальное уравнение определенного типа. Обыкновенные дифференциальные уравнения возникают тогда, когда неизвестная функция зависит лишь от одной независимой переменной.

2.1. Общие сведения

Одной из основных особенностей теории обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) является существование у этих уравнений таких решений, которые удовлетворяют начальным условиям Коши при единственности решения и его устойчивости. Под устойчивостью решения понимают малые изменения решения при малых изменениях дополнительных данных задачи и функций, определяющих само уравнение. Важными для приложений являются исследование характера решения, т. е. качественного поведения решения и нахождение методов численного решения уравнений.

Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы таких уравнений широко встречаются в математическом моделировании. ОДУ связывает между собой значения независимой переменной (аргумента) и искомой величины, а также функции этого аргумента и ее производных. Наибольший порядок производной определяет и порядок уравнения. ОДУ первого порядка широко встречаются в математических моделях динамических дискретных систем. ОДУ второго и высших порядков могут возникать и в моделях континуальных стационарных систем, если характеристики системы непрерывно меняются вдоль одной пространственной координаты. При интегрировании ОДУ появляется ряд неопределенных констант интегрирования, число которых совпадает с порядком уравнения. Для определения этих констант служат начальные и граничные условия. Начальные условия – это задание определенных связей для искомой функции при начальном значении аргумента (в начальный момент времени, в начальной точке какой-то линейно протяженной пространственной области). Задача отыскания решения одного или системы ОДУ первого порядка с заданными начальными условиями называется в математике задачей Коши. Граничные условия задаются при двух значениях аргумента.

2.2. Теоретическое обоснование колебательного характера электрического разряда

Английский физик Уильям Томсон (лорд Кельвин, 26.06.1824–17.12.1907) прочитал статью Гельмгольца [1], и в 1853 году опубликовал свою статью, в которой впервые математически обосновал возможность существования колебательных электрических разрядов [2, 3]. В статье, на основании закона сохранения энергии для электрической цепи, моделирование резонансного контура описано обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$i = \frac{dq}{dt}, \quad (2.1)$$

$$-d\left(\frac{1}{2} \frac{q^2}{C}\right) = d\left(\frac{1}{2} Li^2\right) + Ri^2 dt, \quad (2.2)$$

где начальные условия:

$$q = q_0 - \text{первоначальный заряд и } i = 0, \text{ когда } t = 0. \quad (2.3)$$

В выражениях (2.1) и (2.2) следующие обозначения: i – сила тока в разряднике, q – величина заряда в момент времени t , C – электроемкость конденсатора, R – сопротивление проводника, через который происходит разряд, L – индуктивность или коэффициент самоиндукции этого проводника.

После подстановки (2.1) в (2.2) и преобразований получено обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{CL} q = 0. \quad (2.4)$$

В результате решения дифференциального уравнения (2.4) с условиями (2.3) получена формула для определения величины заряда, появляющегося в конденсаторе при колебательном разряде, спустя t секунд после момента начала последнего:

$$q = \frac{q_0}{\varepsilon L} e^{-\frac{R}{2L}t} \left\{ \varepsilon L \cos(\varepsilon t) + \frac{R}{2} \sin(\varepsilon t) \right\}, \quad \text{где } \varepsilon = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (2.5)$$

Для определения величины периода полного электрического колебания T , т. е. продолжительность одного полного изменения заряда конденсатора в работе получена следующая формула:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}. \quad (2.6)$$

Когда проводник, через который происходит разряд, имеет очень малое сопротивление, т. е. тогда можно пренебречь величиной $\frac{R^2}{4L^2}$ в сравнении с величиной $\frac{1}{LC}$, то период полного электрического колебания можно записать в виде:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (2.7)$$

Относительная погрешность формулы (2.7) по сравнению с (2.6), приблизительно равна $\frac{R^2 C}{8L}$, т. е. порядка одной тысячной.

У. Томсон обнаружил, что решение дифференциального уравнения (2.4) критически зависит от относительных значений емкости, индуктивности и сопротивления в современной терминологии, и что при определенных обстоятельствах колебания вообще не происходят, т. е. в случае чрезмерного затухания.

Уравнение (2.4) обычно называют уравнением разряда конденсатора, при чем при выполнении условия $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ разряд будет колебательным, а в случае $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ – аperiодическим, случай $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ – называют критическим.

Теория Томсона показала, что разряд не представляет собой мгновенное явление, а наоборот он может происходить с различными периодами времени и процессами различного характера. Интересно отметить, что У. Томсону в момент публикации упомянутой выше фундаментальной статьи было 29 лет.

2.3. Обобщенная модель взаимодействия биологических видов

С середины XX века в связи с развитием интереса к экологии и с быстрым усовершенствованием компьютеров, позволившим численно решать и исследовать системы нелинейных уравнений, стало развиваться направление популяционной динамики, посвященное выработке общих критериев с целью установить, какого вида модели могут описать те или иные особенности поведения численности взаимодействующих популяций, в частности, устойчивые колебания.

Рассмотрим задачу о распространении эпидемии инфекционного заболевания в рамках одной популяции [4]. Пренебрегая неоднородностью распределения популяции по пространству, введем две функции $x(t)$ и $y(t)$, характеризующие число незараженных и зараженных особей в момент времени t . В начальный момент времени $t = 0$ известны начальные значения $x(0) = n$ и $y(0) = a$.

Для того чтобы построить математическую модель, воспользуемся гипотезой: инфекция передается при встрече зараженных особей с незараженными. Это означает, что число незараженных особей будет убывать с течением времени пропорционально количеству встреч между зараженными и незараженными особями, т. е. пропорционально произведению xy .

На основании принятого предположения выразим убыль Δx незараженных особей за промежуток времени Δt в виде:

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t) = -\beta xy \Delta t. \quad (2.8)$$

Величина β представляет собой коэффициент пропорциональности, который в принятой модели характеризует вероятность передачи инфекции при встречах больных и здоровых особей. В общем случае значение параметра β зависит от вида особи и типа болезни.

Перейдя в (2.8) к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}, \quad \frac{dx}{dt} = -\beta xy. \quad (2.9)$$

Для замыкания модели будем считать, что болезнь не приводит к смертности, следовательно, можно написать условие баланса:

$$a + n = x + y. \quad (2.10)$$

При известном $x(t)$ число $y(t)$ зараженных особей найдем из условия баланса (2.10):

$$y = a + n - x. \quad (2.11)$$

Подставив (2.11) в (2.9), получим:

$$\frac{dx}{dt} = -\beta x(a + n - x), \quad (2.12)$$

где $x(0) = n$ – начальное условие. (2.13)

Формулы (2.12), (2.13) представляют собой математическую модель динамики численности *незараженных* особей. Считая $\beta = \text{const}$, получим решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (2.12) в виде:

$$x(t) = \frac{n(n+a)}{n+ae^{\beta(n+a)t}}. \quad (2.14)$$

На рис. 2.1 приведены зависимости численности незараженных $x(t)$ и зараженных $y(t)$ в зависимости от времени, полученные из (2.11) и (2.14) при трех значениях параметра β . Начальные значения числа незараженных и зараженных особей приняты равными $n = 300, a = 150$. Как видно из графиков (рис. 2.1), построенных в *MachCad*, при увеличении β скорость передачи инфекции увеличивается, и численность незараженных особей падает быстрее.

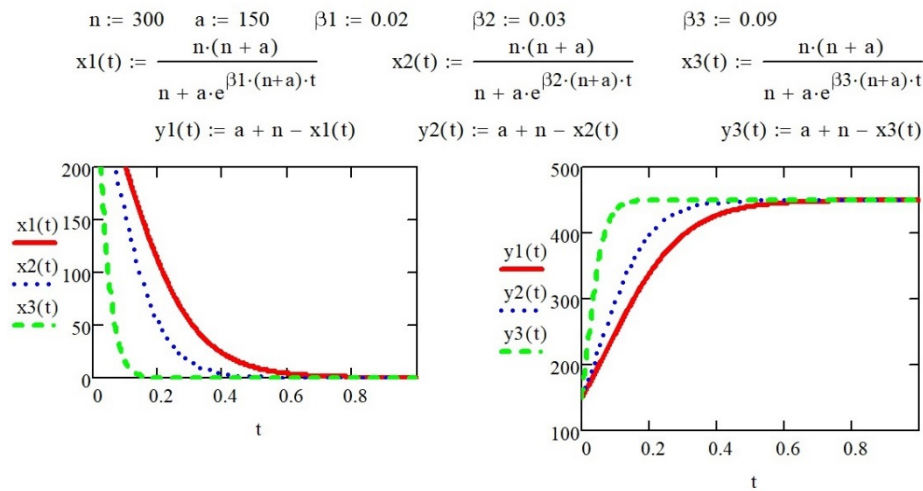


Рис. 2.1. Зависимости численности незараженных $x(t)$ и зараженных $y(t)$ в зависимости от времени, полученные из (2.11) и (2.14) при трех значениях параметра β

Изменим приведенную модель, добавляя в нее еще один процесс – выздоровление больных особей. Для этого введем новую функцию $z(t)$, выражающую число выздоровевших особей. Новая математическая модель может быть представлена системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\beta xy \\ \frac{dy}{dt} = -\beta xy - \gamma y, \\ \frac{dz}{dt} = \gamma y \end{cases} \quad (2.15)$$

где параметр γ характеризует степень выздоровления и определяется видом болезни и типом особи. Число выздоровевших особей в начальный момент времени равно нулю, поэтому начальные условия для системы (2.15) примут вид:

$$x(0) = n, \quad y(0) = a, \quad z(0) = 0. \quad (2.16)$$

Условие баланса (2.10) переписывается как:

$$x + y + z = n + a. \quad (2.17)$$

В системе (2.15) разделим второе уравнение на первое, получим:

$$\frac{dy}{dx} = -1 + \frac{\gamma}{\beta} \frac{1}{x}. \quad (2.18)$$

Полученное дифференциальное уравнение (2.18) относится к типу с разделяющимися переменными и его решение при начальных условиях (2.16) будет иметь вид:

$$y + x - \frac{\gamma}{\beta} \ln x = a + n - \frac{\gamma}{\beta} \ln n. \quad (2.19)$$

Подставив (2.17) в (2.19), получим:

$$x = n e^{-\frac{\beta}{\gamma} z}. \quad (2.20)$$

Выразив с помощью уравнений (2.17), (2.19) и (2.20) связь y через z и подставив в третье уравнение системы (2.15), после преобразований получим дифференциальное уравнение вида:

$$\frac{dz}{dt} = \gamma \left[n + a - z - n e^{-\frac{\beta}{\gamma} z} \right]. \quad (2.21)$$

Решение в *MathCad* дифференциального уравнения (2.21) с учетом начального условия (2.16) при различных значениях коэффициента выздоровления γ приведены в Приложении 1.

2.4. Динамики популяций и уравнение Лотки–Вольтерры

Математическая модель Лотки–Вольтерры (часто ее называют моделью «хищник–жертва») применима для описания различных процессов в биологии, экологии, медицине, в социальных исследованиях, в истории, в радиофизике и других науках.

По своей сути модель Лотки–Вольтерры есть математическое описание

дарвинского принципа борьбы за существование, который Чарльз Дарвин в своей автобиографии [5] излагает следующим образом: «Изучив множество обстоятельств, я пришел к выводу о существовании борьбы за существование. Однажды пришло мне в голову, что при подобных обстоятельствах благоприятные виды продолжили бы развиваться дальше, а неблагоприятные исчезли бы с лица Земли. Вот сейчас у меня и возникла теория, которой следует руководствоваться» [6].

Модель Лотки–Вольтерры описывает взаимодействие двух видов – популяции хищников и популяции жертв. Пусть $N(t)$ – численность жертв, $P(t)$ – численность хищников в момент времени t . Предполагаются следующие допущения:

- при отсутствии хищников жертвы размножаются неограниченно согласно уравнению $\frac{dN}{dt} = aN$, которое называют иногда уравнением Мальтуса;
- хищники при отсутствии жертв вымирают согласно уравнению $\frac{dP}{dt} = -dP$;
- слагаемые, пропорциональные произведению NP , рассматриваются как превращение энергии одного источника в энергию другого (эффект влияния популяции хищников на популяцию жертв, то есть результат их встречи, состоит в уменьшении скорости прироста $\frac{dN}{dt}$ численности жертв на величину NP , пропорциональную численности хищников).

Тогда модель Лотки–Вольтерры примет вид [7]:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = aN - bNP, \\ \frac{dP}{dt} = dP - cNP, \end{cases} \quad (2.22)$$

где a, b, c, d – положительные постоянные.

Введем новые переменные:

$$u(\tau) = \frac{N(t)d}{c}, \quad v(\tau) = \frac{P(t)b}{a}, \quad \tau = at, \quad \gamma = \frac{c}{d}. \quad (2.23)$$

Тогда система уравнений (2.22) с учетом (2.23) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = u - uv, \\ \frac{dv}{d\tau} = \gamma v(u - 1). \end{cases} \quad (2.24)$$

Система уравнений (2.24) имеет две неподвижные точки: $(0;0)$ – седло и $(1;1)$, для которой собственные значения матрицы Якоби:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} - \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\gamma}, \quad i = \sqrt{-1},$$

т. е. положение равновесия (1;1) негиперболическое, и нельзя сделать вывод о его устойчивости на основе линейного анализа. Фазовые траектории системы уравнений (2.23), как известно, являются интегральными кривыми уравнения:

$$\frac{dv}{du} = \gamma \frac{(u-1)v}{(1-v)u},$$

решение которого:

$$\gamma u + v - \ln u^\gamma v = H. \quad (2.25)$$

Можно показать, согласно [8, 9], что вблизи (1;1) линии уровня функции H представляют собой замкнутые кривые, соответствующие периодическим решениям системы уравнений (2.23), рис. 2.2. Постоянная H в выражении (2.25) определяется начальными условиями, например, $u(0) = u_0$ и $v(0) = v_0$.

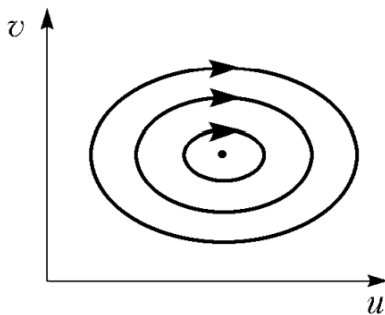


Рис. 2.2. Фазовые траектории, соответствующие соотношению (2.25)

В Приложении 2 приведено решение в *Excel* системы Лотки–Вольтерры, фазовый портрет системы при $a = 4, b = 2,5, d = 1$ и графики решения с начальным условием $x_1(0) = 3, x_2(0) = 1$.

Математическая модель, описываемая системой уравнений (2.23), структурно неустойчива, т. е. малое изменение правых частей в ней может приводить к качественному изменению поведения решения. В этом ее основной недостаток. Более того, именно поэтому трудно говорить о совпадении теории с экспериментом.

Одна из причин структурной неустойчивости модели в том, что она является консервативной, т. е. имеет первый интеграл. В работе [10] отмечено, что несмотря на указанный основной недостаток модели, система уравнений (2.22) позволяет сделать нетривиальные выводы, подтвержденные многочисленными наблюдениями. В частности, в [10] сформулирован принцип Вольтерра: если в системе «хищник–жертва», описываемой моделью (2.22), оба вида истребляются равномерно и пропорционально числу их индивидуумов, то среднее число жертв возрастает, а среднее число хищников убывает.

В работе [10] приведены два примера существования этого эффекта в природе. Один – общественный факт, который привел Вольтерра к его теории борьбы за существование [8]: во время первой мировой войны лов рыбы в Адриатическом море был сильно сокращен, что, к удивлению биологов, привело к увеличению хищников и уменьшению числа жертв. Второй пример менее известен. Согласно [10], принцип Вольтерра показывает двойственный характер

применения средств от насекомых (инсектицидов) для сохранения урожая на полях. Почти все такие химические вещества действуют не только на вредителей, но и на их естественных врагов, что зачастую приводит к увеличению числа вредителей и уменьшению, например, птиц, питающихся этими вредителями. Таким образом, согласно принципу Вольтерра, в экосистеме «хищник–жертва» популяция жертв более чувствительна к процессу пропорционального уменьшения особей в популяции.

По терминологии известного русского математика В. И. Арнольда, модель, описываемая системой уравнений (2.22), называется «жесткой» [11]. Раздел монографии В. И. Арнольда называется «Жесткие модели как путь к ошибочным предсказаниям» [12]. При малом изменении модели она становится мягкой, когда к правым частям (2.22) добавляются малые слагаемые, учитывающие, например, конкуренцию жертв за пищу или хищников за жертв (конкретные виды уравнений приведем ниже).

Контрольные вопросы

1. В чем отличие обыкновенных дифференциальных уравнений от других типов дифференциальных уравнений?
2. Что значит решить задачу Коши?
3. Что понимается под устойчивостью решения дифференциального уравнения?
4. Как определяется порядок обыкновенных дифференциальных уравнений?
5. Какой тип дифференциального уравнения использовался для моделирования резонансного контура?
6. Напишите формулу для определения величины периода полного электрического колебания, когда проводник, через который происходит разряд, имеет большое сопротивление.
7. Какие выводы сделал У. Томсон из своей теории колебательного разряда конденсатора?
8. Что собой представляет обобщенная модель взаимодействия биологических видов?
9. В чем суть модели Лотки–Вольтерры?
10. Что описывает модель Лотки–Вольтерры?
11. Какой математический вид имеет модель Лотки–Вольтерры?
12. Что значит структурная неустойчивость модели Лотки–Вольтерры?

ГЛАВА 3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Методы численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) применяются в случае, когда затруднено получение аналитического или приближенного решения. Преимуществом численных методов перед аналитическими и приближенными методами является их большая универсальность и удобство программирования в компьютерных средах.

3.1. Общие замечания

Обыкновенные дифференциальные уравнения используются для моделирования движения системы взаимодействующих материальных точек, химической кинетики, электрических цепей, сопротивления материалов и многих других задач. Во многих случаях такие уравнения не интегрируются в явном виде. Поэтому необходимо использовать методы, позволяющие получать приближенное решение задачи. Конкретная прикладная задача может приводить к дифференциальному уравнению любого порядка или к системе таких уравнений любого порядка.

Для решения обыкновенных дифференциальных уравнений применяются аналитические, приближенные и численные методы.

Аналитические методы позволяют получать решения дифференциальных уравнений через элементарные или специальные функции в конечном виде и являются эффективным средством исследования уравнений. Такие методы, однако, применимы лишь для ограниченного класса дифференциальных уравнений – линейных, с постоянными коэффициентами и др. Эти методы в основном реализованы в универсальных математических компьютерных пакетах *MathCad* (Приложение 3), *Maple* и других. Но в практических задачах они оказываются часто неприменимыми.

Приближенные методы используют различные упрощения исходных уравнений: линеаризацию, разложения в ряд по некоторому малому параметру, асимптотические методы и др. Тем не менее они также имеют ограниченную область применения, хотя и являются эффективным средством исследования решения.

Наиболее мощными и универсальными методами решения обыкновенных дифференциальных уравнений являются численные методы, позволяющие получать решения тогда, когда традиционные, классические методы не применимы [1].

3.2. Задача Коши

Задача Коши формулируется следующим образом. Требуется найти решение $y(x)$ дифференциального уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{при начальном условии} \quad y(x_0) = y_0, \quad (3.1)$$

где x_0, y_0 – заданные числа. Из курса дифференциальных уравнений известно, что если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой прямоугольной области $G = \{|x - x_0| \leq A, |y - y_0| \leq B\}$ и удовлетворяет в этой области условию Липшица по аргументу y , то можно указать отрезок $|x - x_0| \leq \delta$, на котором задача Коши (3.1) имеет единственное решение. Если вдобавок функция $f(x, y)$ имеет непрерывные производные по обоим аргументам до k -ого порядка включительно, то решение $y(x)$ имеет непрерывные производные до $(k+1)$ -ого порядка включительно. В ряде случаев задача Коши может быть решена аналитически, однако для большинства задач, представляющих практический интерес, такое решение найти невозможно. Поэтому, когда подобная задача встречается на практике, получают приближенное решение с помощью численных методов.

3.3. Метод Эйлера

Метод Эйлера основывается на разложения в ряд Тейлора функции $y(x)$ (интегральной кривой уравнения (3.1)) в окрестности точки x_i :

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) &= y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) = \\ &= y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + \frac{h^2}{2} y''(x_i), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где x_i лежит внутри отрезка $[x_i, x_{i+1}]$.

Будем считать, что все выписанные производные существуют. Если ограничиться первыми двумя членами разложения, то можно записать:

$$y_{i+1} \approx y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \dots, \quad (3.3)$$

где $x_i = x_0 + h \cdot i$, $x_0 = 0$.

Расстояния между точками, ради простоты, считаются равными $h = x_{i+1} - x_i = const.$

Полагая $i = 0$, с помощью соотношения (3.3) можно определить значение сеточной функции y при $x = x_1, y_1$:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0). \quad (3.4)$$

Требуемое здесь значение y_0 задано начальным условием $y(x_0) = y_0$. Аналогично могут быть определены значения сеточной функции в других узлах:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1), \\ &\dots\dots\dots \\ y_i &= y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1}). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Построенный алгоритм называется методом Эйлера. Разностная схема этого метода представлена соотношениями (3.3), (3.5). Они имеют вид рекуррентных формул, с помощью которых значение сеточной функции y_{i+1} в любом узле x_{i+1} вычисляется по ее значению y_i в предыдущем узле x_i . В связи с этим метод Эйлера относится к одношаговым методам.

Геометрически метод Эйлера означает, что на каждом шаге мы аппроксимируем решение (интегральную кривую) отрезком касательной, проведенной к графику решения в начале интервала.

Метод Эйлера обладает малой точностью и имеет порядок h , к тому же погрешность каждого нового шага систематически возрастает. Метод Эйлера представляет собой метод первого порядка, т. е. его точность растет линейно с уменьшением шага h . Наиболее приемлемым для практики методом оценки точности является в данном случае способ двойного счета с шагом h и с шагом $h/2$. Совпадение десятичных знаков в полученных двумя способами результатах дает естественные основания считать их верными.

3.4. Метод Рунге–Кутты

Рассмотренный метод Эйлера (3.5) является частным случаем методов первого и второго порядков, относящихся к классу методов Рунге–Кутты. Эти методы применяют для вычисления значения y_{i+1} ($i = 0, 1, \dots$) через y_i и $f(x, y)$, определенных при некоторых специальным образом выбираемых значениях $x \in [x_i, x_{i+1}]$ и $y(x)$. На их основе могут быть построены разностные схемы разного порядка точности. Одним из наиболее часто используемых методов является метод Рунге–Кутты четвертого порядка. Алгоритм метода записывается в виде:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad i = 0, 1, \dots, \quad (3.6)$$

где $k_1 = hf(x_i, y_i)$,

$$\begin{aligned} k_2 &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right), \\ k_4 &= hf(x_i + h, y_i + k_3). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Данный метод требует на каждом шаге четырехкратного вычисления правой части $f(x, y)$ уравнения (3.1). Суммарная погрешность этого метода есть величина $O(h^4)$. Метод Рунге–Кутты (3.6) требует большего объема вычислений по сравнению с методом Эйлера, однако это окупается повышенной точностью, что дает возможность проводить счет с большим шагом. Другими словами, для получения результатов с одинаковой точностью в методе Эйлера потребуется значительно меньший шаг, чем в методе Рунге–Кутты (3.6). Дополнительного повышения точности расчетов можно добиться, повысив порядок метода за счет увеличения количества операций на один шаг разностной сетки.

3.5. Конечно-разностные методы

Метод конечных разностей относится к численным методам решения дифференциальных уравнений и является сеточным методом. Метод основан на замене производных разностными схемами [1, с. 94, 95].

В основе метода конечных разностей используется следующее:

- 1) непрерывная область определения решения заменяется дискретным множеством точек, называемых сеткой;
- 2) производится замена непрерывных функций дискретными (сеточными), определенными на введенной сетке изменения аргумента;
- 3) производные, входящие в уравнение, записываются в виде конечных разностей.

В результате вместо дифференциального уравнения получается конечно-разностное уравнение, определенное в узлах разностной сетки. Решение такого уравнения сводится к отысканию значений сеточной функции в узлах сетки.

Достоинство конечно-разностных методов в том, что они позволяют свести решение краевой задачи к решению системы алгебраических уравнений.

При решении двухточечной краевой задачи:

$$y'' = f(x, y, y'), \quad (3.8)$$

при $y(a)=A$ и $y(b)=B$ интервал $[a, b]$ можно разделить на n равных частей:

$$x_i = x_0 + h \cdot i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.9)$$

где $x_0 = a$, $x_n = b$, а $h = \frac{b-a}{n}$.

В точках x_i , называемых узлами, стремятся получить значения решения y_i . Зная координаты узлов и пользуясь конечно-разностными выражениями для производных:

$$y'(x_i) = \frac{1}{2h}(y_{i+1} - y_{i-1}). \quad (3.10)$$

Для вывода второй производной в разностном виде воспользуемся тем, что $y''(x_i) = (y'(x_i))'$ и запишем первую производную (3.10) в промежуточных узлах $x_{i-1/2}$ и $x_{i+1/2}$:

$$\begin{aligned} y''(x_i) &= \frac{y'(x_{i+1/2}) - y'(x_{i-1/2}))}{h} = \\ &= \frac{\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} - \frac{y(x_i) - y(x_{i-1}))}{h}}{h} = \frac{1}{h^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Тогда выражение второй производной (3.11) имеет вид:

$$y''(x_i) = \frac{1}{h^2} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}). \quad (3.12)$$

Линейное дифференциальное уравнение вида:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \quad (3.13)$$

в виде разностного уравнения будет следующим:

$$\frac{1}{h^2} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) + p(x) \frac{1}{2h} (y_{i+1} - y_{i-1}) + q(x)y = r(x), \quad (3.14)$$

где $p(x)$, $q(x)$ и $r(x)$ – заданные функции.

Отметим, что существуют различные формы конечно-разностных выражений для производных.

Если записать разностное уравнение (3.14) для $i = 1, 2, \dots, n$ при двух краевых условиях, то задача сводится к решению системы $n - 1$ алгебраических уравнений с $n - 1$ неизвестными y_i . Если исходное дифференциальное уравнение линейное, то задача будет состоять в решении системы линейных алгебраических уравнений. Если же исходное дифференциальное уравнение нелинейное, задача сводится к решению системы нелинейных алгебраических или трансцендентных уравнений. Хотя методы решения таких линейных и нелинейных уравнений известны, привести решение краевой задачи методом конечных разностей к виду стандартной программы для ЭВМ трудно, так как формулировка каждой задачи зависит от вида рассматриваемого дифференциального уравнения.

Пример 3.1

Пусть требуется решить дифференциальное уравнение:

$$y'' = 2x + 3y,$$

при условиях:

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

и шаге $h = 0,2$.

Решение. В разностной форме это уравнение имеет вид:

$$\frac{1}{0,2^2} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) = 2x_i + 3y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Пользуясь этой формулой и граничными условиями, можно выписать следующую систему четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{aligned} -2,12y_2 + y_1 &= 0,016, \\ y_3 - 2,12y_2 + y_1 &= 0,032, \\ y_4 - 2,12y_3 + 2 &= -0,064, \\ -2,12y_4 + y_3 &= -0,936. \end{aligned}$$

В приведенной ниже табл. 3.1 решение этой системы уравнений сравнивается с точным решением:

$$y(x) = \frac{5}{3} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{3} x}{\operatorname{sh} \sqrt{3}} - \frac{2}{3}.$$

Таблица 3.1 – Сравнение численного и точного решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

x	y	
	численное решение	точное решение
0,0	0,0	0,0
0,2	0,0827 (y_1)	0,818
0,4	0,1912 (y_2)	0,1897
0,6	0,3548 (y_3)	0,3529
0,8	0,6088 (y_4)	0,6073
1,0	1,0000	1,000

3.6. О «жестких» обыкновенных дифференциальных уравнениях

Некоторые обыкновенные дифференциальные уравнения не решаются ни одним из рассмотренных выше методов. Чтобы понять, почему это так, необходимо тщательно изучить пути решения дифференциального уравнения. Если не удастся сохранить достаточно малый шаг, то решение становится неустойчивым. Хотя трудности, связанные с шагом устойчивости решения таких задач, получивших название «жестких», обычными методами, можно временно обойти, уменьшить шаг, но такой подход имеет два недостатка. Во-первых, если величина шага очень мала по сравнению с интервалом, для которого отыскивается решение, то для получения решения потребуется очень много времени. Во-вторых, накапливающиеся в процессе длительных вычислений погрешности округления и усечения могут привести к получению бессмысленного результата. С «жесткими» задачами инженер сталкивается при решении важных задач управления, электрических сетей, химических решений и прочих. В последнее время много внимания уделяется разработкам эффективных методов решения «жестких» задач.

Исторически интерес к жестким системам возник в середине XX века при изучении уравнений химической кинетики с одновременным присутствием очень медленно и очень быстро протекающих химических реакций. Тогда неожиданно оказалось, что считавшиеся исключительно надежными методы Рунге–Кутты стали давать сбой при расчете этих задач.

Под жесткой системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) понимают (не строго говоря) такую систему ОДУ, численное решение которой явными методами (например, методами Рунге–Кутты или Адамса) является неудовлетворительным из-за резкого увеличения числа вычислений (при малом шаге интегрирования) или из-за резкого возрастания погрешности (так называемого взрыва погрешности) при недостаточно малом шаге.

3.7. Выбор алгоритма решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Сформулировать общие правила выбора наилучшего метода решения того или иного обыкновенного дифференциального уравнения невозможно. Однако можно рекомендовать руководствоваться при этом следующими соображениями:

1. *Рассмотрение типа задачи.* Если это задача Коши, то можно воспользоваться одной из готовых программ, позволяющих получить решение. Если же это краевая задача, то, возможно, придется составлять собственную программу.

2. *Оценка степени сложности дифференциального уравнения.* Если задача Коши очень сложна и вычисление $f(x, y)$ связано с большими трудностями, то обычно предпочтение отдают одному из методов прогноза и коррекции, так как они требуют вычисления лишь двух значений $f(x, y)$ на шаге вместо четырех, как в методах Рунге–Кутты. Если же вычисление $f(x, y)$ не вызывает затруднений, то более удобным часто оказывается один из методов Рунге–Кутты.

3. *Оценка времени,* требуемого для решения задачи. Если же определяющим является время подготовки задачи к счету, то следует воспользоваться методом Рунге–Кутты.

4. *Оценка требуемой точности решения.* Вообще говоря, чем выше порядок точности метода, тем более точным будет полученный результат. Это утверждение справедливо лишь до некоторой степени, так как конечно-разностные аналоги производных по мере повышения порядка аппроксимации ведут себя все хуже и хуже. Поэтому погрешность метода при переходе от пятого порядка к более высоким порядкам точности (что к тому же связано и с дополнительными громоздкими вычислениями) практически не убывает. Поскольку обычно достигается некоторый компромисс между объемом и точностью вычислений, то следует уделять внимание как выбору порядка точности метода, так и выбору величины шага. Поэтому большое распространение получили алгоритмы, в которых автоматически изменяется шаг интегрирования или порядок точности применяемого метода.

5. *Учет имеющегося опыта.* Предшествующие успехи или неудачи в применении того или иного алгоритма для решения конкретной инженерной задачи могут предоставить ценный материал для суждения о целесообразности выбора подходящей программы. Это особенно важно в случае «жестких» систем дифференциальных уравнений, так как обычно неизвестно, является ли система жесткой до тех пор, пока пользователь не убедится на практике в неэффективной работе алгоритма.

3.8. Пакеты программ для моделирования инженерных систем

Почти все существующие компьютерные пакеты программ содержат по меньшей мере одну подпрограмму, позволяющую решать обыкновенные

дифференциальные уравнения и задачу Коши. В *MathCad* есть несколько таких подпрограмм. Все они решают задачу Коши для дифференциальных уравнений первого порядка, но каждая из них использует для этого свой метод. Для простых дифференциальных уравнений и состоящих из них систем не играет большой роли, какой метод использовать – все равно получается решение достаточно быстро и с высокой точностью. Для сложных или специфических систем бывает, что некоторые методы вообще не могут дать удовлетворительного решения за приемлемое время. Именно для таких сложных, но не редких случаев в *MathCad* и введено несколько различных методов решения дифференциальных уравнений.

- rkfixed – метод Рунге–Кутты с фиксированным шагом интегрирования. Самый простой и быстрый метод, но далеко не всегда самый точный. Полностью аналогичен использованию функции Odesolve с выбранным в контекстном меню методом Fixed.

- Rkadapt – метод Рунге–Кутты с переменным шагом интегрирования. Величина шага адаптируется к скорости изменения функции решения. Данный метод позволяет эффективно находить решения уравнений, в случае если они содержат как плавные, так и быстро меняющиеся участки. Полностью аналогичен использованию функции Odesolve с выбранным в контекстном меню методом Adaptive.

- Bulstoer – метод Булирша–Штера. Этот метод более эффективен, чем метод Рунге–Кутты, в случае если решение является плавной функцией.

В Приложении 4 приведены примеры решения обыкновенных дифференциальных уравнений в *MathCad*.

В *MathCad* предусмотрены три различные функции для решения жестких задач:

- Radau – метод RADAU для жестких систем. Полностью аналогичен использованию функции odesolve с выбранным в контекстном меню методом Stiff.
- Stiffb – метод Булирша–Штера, адаптированный для жестких систем.
- StiffR – метод Розенброка.

Функция Radau имеет тот же синтаксис, что и функции rkfixed, Rkadapt, Bulstoer – Radau (y, a, b, n, D). Все аргументы имеют то же назначение, и результат имеет ту же структуру, что было описано выше.

Использование функций Stiffb и StiffR выглядит следующим образом: $\text{Stiff}(y, a, b, n, D, J)$. Первые пять аргументов имеют то же назначение, что и в перечисленных выше функциях, но здесь есть еще один дополнительный аргумент – матричная функция $J(x, y)$. Аргументы этой функции те же, что и у функции D , а строится она следующим образом:

- для системы из n уравнений матрица J состоит из n строк и $n + 1$ столбцов;
- элементы первого столбца (столбца с индексом 0) матрицы $J_{i,0} = \frac{d}{dx} D_i(x, y)$, т. е. J – производные от элементов вектора $D(x, y)$ по независимой переменной x ;
- оставшаяся часть матрицы J (квадратная матрица $n \times n$) – матрица

$$J_{i,j+1} = \frac{a}{dy_j} D_i(x, y) \text{ Якоби системы уравнений.}$$

В Приложении 5 приведен пример решения жесткой системы дифференциальных уравнений в *MathCad*.

Контрольные вопросы

1. Для моделирования каких инженерных задач используются обыкновенные дифференциальные уравнения?
2. В чем особенность обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)?
3. Какие методы применяются для решения обыкновенных дифференциальных уравнений?
4. Какие упрощения в исходных ОДУ используют в приближенных методах для их решения.
5. Что такое задачи Коши?
6. Какими методами может быть решена задача Коши?
7. На чем основан метод Эйлера?
8. В чем суть геометрической интерпретации метода Эйлера?
9. Что собой представляет алгоритм метода Рунге–Кутты?
10. За счет чего можно добиться повышения точности расчетов по методу Рунге–Кутты?
11. Что лежит в основе метода конечных разностей для решения дифференциальных уравнений?
12. Какой вид имеет первая производная в разностном виде?
13. Какой вид имеет вторая производная в разностном виде?
14. В чем особенность «жестких» ОДУ?
15. Какой алгоритм решения обыкновенных дифференциальных уравнений?
16. Назовите известные компьютерные пакеты программ для решения ОДУ.
17. Какие функции предусмотрены в *MathCad* для решения ОДУ?
18. Какие функции предусмотрены в *MathCad* для решения жестких задач?

ГЛАВА 4. ИНЖЕНЕРНЫЕ ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Инженеру очень часто приходится сталкиваться с задачами, в которых искомая величина зависит от нескольких переменных. В этом случае решаемые уравнения содержат частные производные и называются дифференциальными уравнениями в частных производных.

4.1. Общие сведения

Теория уравнений с частными производными возникла на основе конкретных физических задач, приводящих к исследованию отдельных уравнений с частными производными, которые получили название *основных уравнений математической физики*. Важнейшими уравнениями математической физики являются: уравнение Лапласа, уравнение теплопроводности и волновое уравнение. В этих уравнениях функция Φ зависит от времени, а также, исходя из постановки задачи – может зависеть от одной, двух и трех переменных. В общем случае $\Phi = \Phi(t, x, y, z)$. Уравнение с частными производными – это соотношение между независимыми переменными, неизвестной функцией и ее частными производными до некоторого порядка. Аналогично определяется система уравнений, когда имеется несколько неизвестных функций.

Уравнение теплопроводности применимо к анализу распространения тепла в любой системе – от куска сыра до стенки атомного реактора. Поэтому при рассмотрении конкретных задач к уравнению надо добавить описание особенностей задачи, отличающих ее постановку от других задач теплопроводности. Эти особенности называют условиями однозначности. Сюда входит описание формы и указание размеров тела, указание значений его физических свойств. Наиболее важными среди условий однозначности являются краевые условия, разделяющиеся на пространственные (граничные) и временные (начальные). Их количество зависит от типа уравнений.

Дифференциальные уравнения в частных производных можно разделить на три типа: I. Эллиптические уравнения описывают стационарные (установившиеся) процессы в замкнутой области пространства. Они не содержат производных по времени и к ним ставятся только граничные условия (на границах рассматриваемой области), которые в свою очередь могут быть разного рода. Наиболее важные: а) условия I рода, когда на границах области задаются значения искомых величин; б) условия II рода, когда на границах задаются значения производных от искомых величин; в) условия III рода, когда на границах области задаются соотношения между значениями искомых величин и их производных. Например, формулировка задачи теплопередачи через цилиндрическую стенку δ с граничными условиями Ньютона–Рихмана имеет вид:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \lambda \frac{dT}{dr} \right) = 0, \quad \text{или} \quad \frac{d}{dr} \left(\lambda \frac{dT}{dr} \right) = 0, \quad r_0 < r < r_1 = r_0 + \delta;$$

$$r = r_0: \lambda \frac{dT}{dr} = \alpha_0 (T - T_0^{\text{cp}}); \quad r = r_1: \lambda \frac{dT}{dr} = \alpha_1 (T - T_1^{\text{cp}}),$$

где λ – коэффициент теплопроводности.

Примером эллиптического уравнения может служить уравнение Лапласа. II. Параболические уравнения описывают нестационарные процессы в замкнутой области. Они содержат первые производные искомых величин по

времени и краевые условия к ним, помимо граничных, включают еще и начальные – значения искомым величин в начальный момент процесса. Примерами параболических уравнений служат уравнения теплопроводности и диффузии.

III. Гиперболические уравнения описывают волновые процессы. В них входят вторые производные по времени; соответственно, в состав краевых условий входят два начальных – значения искомым величин и их производных в начале процесса. Пример гиперболического уравнения – волновое уравнение.

4.2. Проблемы дальней телефонной связи

В 1885 году компания AT&T (*American Telephone and Telegraph Company*) начала строить телефонные линии большой дальности. В 1892 году была проложена двухпроводная телефонная линия на расстояние 900 миль (1445 км), между Нью-Йорком и Чикаго (штат Иллинойс). Для уменьшения затухания передаваемого электрического сигнала в этой телефонной линии пришлось использовать достаточно толстый медный провод диаметром более 1/8" (3,2 мм) и весом около 900 фунтов (408 кг) на погонную милю (1,609 км) цепи! По существу, это был тот предел длины телефонной линии, при котором возможен был телефонный разговор без искажений и использования в ней специальных устройств.

Возникшая проблема на прямую была связана с искажениями звукового электрического сигнала в линии вследствие наличия распределенной индуктивности у проводников и распределенной емкости между проводниками. Поиском возникшей проблемы передачи электрического сигнала без искажений по кабельной линии связи заинтересовался английский физик Оливер Хевисайд (*Oliver Heaviside*, 18.05.1850–03.02.1925), который в свое время, с 1870 г. по 1874 г., проработал оператором-телеграфистом станции *Great Northern Telegraph Company* в городе Ньюкасле на северо-восточном побережье Великобритании.

Хевисайд вывел так называемые «телеграфные уравнения» [1], которые описывают распространение электромагнитных волн по кабелю связи. Телеграфные уравнения являются следствием уравнений Максвелла. В уравнениях Максвелла, как известно, переменными являются напряженности электрического и магнитного полей, в случае моделирования волн в линиях можно ввести интегральные характеристики в виде тока в проводах и напряжения между проводами. Как уравнения Максвелла, так и телеграфные уравнения описывают распространение волновых процессов в соответствующих средах. В первом случае – это свободное пространство, во втором – проводники линии передачи, но форма уравнений и их решение во многом сходны. Важно, однако, подчеркнуть, что уравнения Максвелла появились при решении задач фундаментальной физики, а телеграфные уравнения – это результат решения инженерной задачи прокладки и использования трансатлантического кабеля.

В цепях с сосредоточенными параметрами можно выделить элементы, в которых запасается энергия магнитного поля, электрического поля, происходят

необратимые преобразования электромагнитной энергии в другие виды энергии. Эти явления учитывают элементы резистивный, индуктивный, емкостный.

Под цепями с распределенными параметрами понимают такие цепи, в которых энергии электрического и магнитного полей, а также необратимые преобразования энергии (потери в виде тепла) распределены равномерно или неравномерно вдоль цепи (ее длины).

К цепям с распределенными параметрами, кроме линий телефонной связи, относят ЛЭП, антенны приемно-передающих устройств. Обмотки электрических машин и трансформаторов тоже можно считать цепями с распределенными параметрами.

Рассмотрим двухпроводную однородную линию электропередачи [2]. Однородной называют линию, параметры которой равномерно распределены вдоль ее длины. Это идеализированная линия, так как учитывают изменение параметров от влияния провиса проводов и неравномерности поверхности земли.

В цепях с распределенными параметрами напряжения и токи будут различны на каждом участке и могут меняться в пределах одного участка. Обозначим длину бесконечно малого участка линии через Δx . Этот участок протяженностью Δx можно представить в виде эквивалентной электрической схемы, приведенной на рис. 4.1а. Двухпроводная линия обладает индуктивностью $L_x \left[\frac{\text{Гн}}{\text{км}} \right]$, активным сопротивлением $R_x \left[\frac{\text{Ом}}{\text{км}} \right]$, межпроводной емкостью $C_x \left[\frac{\text{Ф}}{\text{км}} \right]$ и проводимостью утечки через изоляцию $G_x \left[\frac{\text{См}}{\text{км}} \right]$, рис. 4.1а. Индекс «х» указывает на то, что величины *отнесены к единице длины* линии, то есть погонные параметры. Такой элементарный участок обладает параметрами: $C_x dx, L_x dx, R_x dx, G_x dx$.

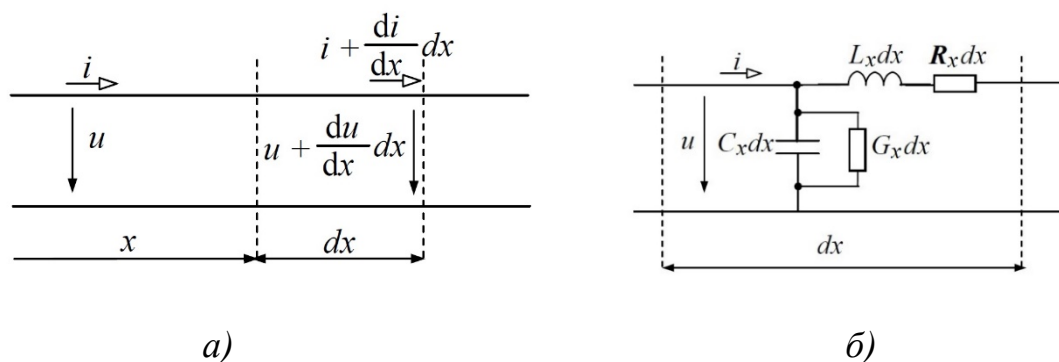


Рис. 4.1. Модель нагруженной длинной линии (а) и эквивалентная схема бесконечно малого отрезка длинной линии (б)

Тогда I и u – ток и напряжение в начале участка. Ток и напряжение на конце участка: $i + \frac{di}{dx} dx$ и $u + \frac{du}{dx} dx$.

Элементарный участок с параметрами представлен на рис. 4.1б. Каждый участок линии длиной dx можно представить в виде Г-образного четырехполюсника, а саму линию – в виде совокупности П- или Т-образных

четыреполюсников, включенных последовательно. Линию в целом можно рассматривать как симметричный четырехполюсник относительно входных и выходных зажимов.

Напряжение и ток линии зависят не только от времени, но и от пространственной координаты x (от точки линии): $u(x, t)$; $i(x, t)$. Координату x можно отсчитывать от начала линии, конца или любой точки, принятой за начало отсчета. Начало линии – точка подключения линии к генератору, конец линии – точка подключения нагрузки к линии. Будем вести отсчет координаты x от начала линии и считать, что вся нагрузка сосредоточена в конце линии, линия не имеет ответвлений. Исследовать линию – это значит найти зависимости $u(x, t)$ и $i(x, t)$ в любой точке линии в любой момент времени.

Падение напряжения на участке dx , согласно второму закону Кирхгофа, равно сумме падений напряжений на элементах этого участка, индуктивности и сопротивлению, то есть справедливо равенство:

$$\frac{du}{dx} dx + (R_x dx) \cdot i + (L_x dx) \frac{di}{dt} = 0.$$

После преобразований получим:

$$-\frac{du}{dx} = R_x i + L_x \frac{di}{dt}.$$

Из первого закона Кирхгофа (алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю) следует:

$$\frac{di}{dx} dx + (G_x dx) \cdot u + (C_x dx) \frac{du}{dt} = 0.$$

Отсюда

$$-\frac{di}{dx} = G_x u + C_x \frac{du}{dt}.$$

В результате получим систему уравнений, которую называют телеграфными уравнениями однородной длинной линии.

$$\begin{cases} -\frac{du}{dx} = R_x i + L_x \frac{di}{dt}, \\ -\frac{di}{dx} = G_x u + C_x \frac{du}{dt}. \end{cases} \quad (4.1) \quad (4.2)$$

Продифференцировав уравнение (4.1) по x , а уравнение (4.2) по t получим:

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = R_x \frac{\partial i}{\partial x} + L_x \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}, \\ -\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = G_x \frac{\partial u}{\partial t} + C_x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \end{cases} \quad (4.3) \quad (4.4)$$

Подставив в первое уравнение вместо смешанной производной ее выражение из второго уравнения, получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L_x C_x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - R_x \frac{\partial i}{\partial x} + L_x G_x \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Вместо производной $\frac{\partial i}{\partial x}$ подставим ее выражение (4.2):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L_x C_x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + R_x C_x \frac{\partial u}{\partial t} + R_x G_x u + L_x G_x \frac{\partial u}{\partial t}.$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L_x C_x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (R_x C_x + L_x G_x) \frac{\partial u}{\partial t} + R_x G_x u. \quad (4.5)$$

Аналогично получим уравнение для тока:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = L_x C_x \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (R_x C_x + L_x G_x) \frac{\partial i}{\partial t} + R_x G_x i. \quad (4.6)$$

Уравнения (4.5) и (4.6) также представляют собой телеграфные уравнения.

4.3. Распространение тепла в твердом теле

Существует три способа переноса тепла: теплопроводность, конвекция и излучение. В природе и технике все эти три способа теплообмена обычно сопутствуют друг другу и часто связаны с переносом массы (диффузией), т. е. имеет место сложный тепло- и массообменный процесс. Теплопроводность, как известно, представляет собой процесс распространения тепловой энергии при непосредственном соприкосновении отдельных частиц тела, имеющих различные температуры. Конвекция возможна только в текучей среде. Под конвекцией теплоты понимают процесс переноса тепловой энергии при перемещении объемов жидкости или газа в пространстве из области с одной температурой в область с другой. При этом перенос теплоты неразрывно связан с переносом самой среды. Тепловое излучение – это процесс распространения тепловой энергии с помощью электромагнитных волн. Процесс передачи тепла от горячего теплоносителя (греющего) к холодному (нагреваемому) через разделяющую их стенку называется теплопередачей.

Теория распространения тепла в твердом теле была разработана французским математиком Жаном Батистом Жозефом Фурье (*Fourier*, 21.03.1768–16.05.1830), которую он представил Парижской АН в 1807 г. и 1811 г. В 1822 г. опубликовал известную работу «Аналитическая теория тепла». В этой работе Фурье вывел дифференциальное уравнение теплопроводности с краевыми условиями и разработал для его решения метод разделения переменных, который он применял к ряду частных случаев (куб, цилиндр и др.).

Рассмотрим нестационарный процесс распространения теплоты теплопроводностью в трехмерном температурном поле. При этом примем следующие допущения: 1) тело однородное, изотропное (свойства тела одинаковы по всем направлениям); 2) внутренние источники теплоты в теле отсутствуют; 3) физические свойства тела постоянны (коэффициент теплопроводности (*примечание: коэффициент теплопроводности λ является теплофизической характеристикой вещества, которая характеризует способность тел проводить тепло. Коэффициент λ для веществ не является константой, а зависит от температуры, агрегатного состояния вещества, количества примесей, давления и т.п. Эта величина λ для конкретных веществ не поддается теоретическому определению, а определяется из эксперимента*) – $\lambda = \text{const}$, удельная теплоемкость – $c = \text{const}$, плотность – $\rho = \text{const}$). Для вывода дифференциального уравнения теплопроводности рассмотрим элементарный параллелепипед, выделенный из тела, с гранями dx, dy, dz (рис. 4.2). Уравнение выводится на основе закона сохранения энергии.

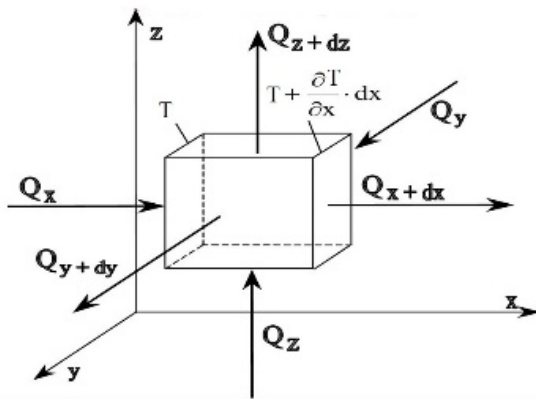


Рис. 4.2. Элементарный параллелепипед к выводу дифференциального уравнения теплопроводности

Количество тепла, входящего в параллелепипед через грань площадью $dydz$ в направлении оси x за время $d\tau$, по закону Фурье, составит:

$$dQ_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} dydzd\tau,$$

где λ – коэффициент теплопроводности, который представляет собой коэффициент пропорциональности и имеет размерность $\text{Вт}/(\text{м} \times \text{К})$.

Количество тепла, выходящего через противоположную грань параллелепипеда:

$$dQ_{x+dx} = -\lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right) dydzd\tau = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} dydzd\tau - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dydzd\tau.$$

Приток тепла в рассматриваемый объем $dV = dx dydz$ параллелепипеда в направлении оси x за время $d\tau$ будет:

$$dQ_x = dQ_x - dQ_{x+dx} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} dydzd\tau - \left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} dydzd\tau - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dydzd\tau \right) = \\ = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dydzd\tau.$$

Аналогично определяются притоки тепла в направлении осей y и z за время $d\tau$. Тогда для всех граней параллелепипеда приток тепла составит

$$dQ = dQ_x + dQ_y + dQ_z = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) dx dydzd\tau.$$

На основе закона сохранения энергии количество тепла dQ представляет тепло, которое идет на изменение энтальпии параллелепипеда за время $d\tau$:

$$dQ = c\rho V \frac{\partial T}{\partial t} d\tau = c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dx dydzd\tau.$$

Приравняв выражения и проведя преобразования, получим:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dx dydzd\tau = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) dx dydzd\tau$$

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right).$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \nabla^2 T,$$

где $a^2 = \frac{\lambda}{c\rho} \left[\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right]$ – коэффициентом температуропроводности;

$\nabla^2 T$ – лапласиан (примечание: справочные сведения об операторе Лапласа и лапласиане функции даны в Приложении б) температуры массива. Коэффициент a характеризует скорость изменения температуры в теле и его теплофизические свойства. Зависит от природы вещества и его физического состояния.

Выражение представляет собой дифференциальное уравнение теплопроводности для стационарного процесса при отсутствии внутренних источников тепла. Это уравнение иногда называют ещё уравнением диффузии тепла.

Дифференциальное уравнение теплопроводности имеет бесконечное множество решений. Например, если функция $T(x, y, z, t)$ удовлетворяет уравнению, то и функция $T(x, y, z, t) + \text{const}$ ему удовлетворяет. Чтобы из множества выбрать решение, характеризующее конкретный практический случай, надо задать геометрические условия (форму и размеры тела), теплофизические параметры ($a, c\rho, q$) и краевые условия. Под краевыми

условиями понимают совокупность начального и граничных условий. Начальное условие определяется заданием закона распределения температуры внутри тела в начальный момент ($t = 0$): $T(x, y, z, 0) = f(x, y, z)$.

Граничные условия отражают взаимодействие поверхности (границы) тела с окружающей средой. Из всего многообразия в расчетах процессов при сварке обычно используют так называемые граничные условия I, II и III родов. Граничное условие I рода состоит в задании распределения температуры по поверхности тела S в любой момент времени: $TS = \varphi(x, y, z, t)$, $x, y, z \in S$. Частным случаем является изотермическое граничное условие, когда $\varphi(x, y, z, t) = \text{const}$. Графическая интерпретация этого следующая. Тепловой поток пропорционален величине градиента температуры, который численно равен тангенсу наклона касательной к кривой распределения температуры вдоль нормали n к поверхности S , то есть $(\partial T / \partial n)_S = \text{tg} \gamma$. По заданному значению TS ($TS = \text{const}$) отыскиваются распределения T и тем самым наклоны касательной ($\gamma = \text{var}$) и количество теплоты, отдаваемое поверхностью тела.

4.4. Диффузионные процессы

Уравнение диффузии представляет собой частный вид дифференциального уравнения в частных производных. Процесс диффузии может быть стационарный и нестационарный, а отсюда для их описания и соответствующие дифференциальные уравнения в частных производных. Процесс диффузии идет самопроизвольно, поскольку он сопровождается увеличением энтропии системы. Равномерное распределение вещества в системе отвечает наиболее вероятному ее состоянию. Перенос массы в результате диффузии сходен с закономерностями переноса тепла или электричества – это легло в основу первого закона диффузии (А. Фик, 1855 г.).

В смысле интерпретации при решении уравнения диффузии речь идет о нахождении зависимости концентрации вещества (или иных объектов) от пространственных координат и времени, причем задан коэффициент (в общем случае также зависящий от пространственных координат и времени), характеризующий проницаемость среды для диффузии. При решении уравнения теплопроводности речь идет о нахождении зависимости температуры среды от пространственных координат и времени, причем задана теплоемкость и теплопроводность среды (также в общем случае неоднородной).

Физически в том и другом случае предполагается отсутствие или пренебрежение макроскопическими потоками вещества. Таковы физические рамки применимости этих уравнений. Также, представляя непрерывный предел указанных задач (т. е. не более, чем некоторое приближение), уравнение диффузии и теплопроводности в общем не описывают статистических флуктуаций и процессов, близких по масштабу к длине и времени свободного пробега, также весьма сильно отклоняясь от предполагаемого точного решения задачи в том, что касается корреляций на расстояниях, сравнимых (и больших) с расстояниями,ходимыми звуком (или свободными от сопротивления среды

частицами при их характерных скоростях) в данной среде за рассматриваемое время.

Это в большинстве случаев сразу же означает и то, что уравнения диффузии и теплопроводности по области применимости далеки от тех областей, где становятся существенными квантовые эффекты или конечность скорости света, т. е. в подавляющей части случаев не только по своему выводу, но и принципиально ограничиваются областью классической ньютоновской физики:

– В задачах диффузии или теплопроводности в жидкостях и газах, находящихся в движении, вместо уравнения диффузии применяется уравнение переноса, расширяющее уравнение диффузии на тот случай, когда пренебрежением макроскопическим движением недопустимо.

– Ближайшим формальным, а во многом и содержательным аналогом уравнения диффузии является уравнение Шрёдингера, отличающееся от уравнения диффузии множителем мнимая единица перед производной по времени. Многие теоремы о решении уравнения Шрёдингера и даже некоторые виды формальной записи его решений прямо аналогичны соответствующим теоремам об уравнении диффузии и его решениях, однако качественно их решения различаются очень сильно.

Если концентрация раствора в данном объеме не является постоянной величиной, происходит диффузия вещества от места с большей концентрацией к месту с меньшей концентрацией. Получим уравнение диффузии для случая диффузии соли в воде. Пусть соль занимает часть цилиндрической пробирки и диффундирует в воде (рис. 4.3). Концентрация в произвольном поперечном сечении x в момент t будем считать некоторой функцией вида $u(x, t)$.

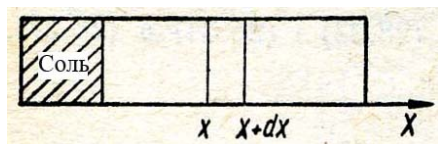


Рис. 4.3. Диффузия соли в воде, находящейся в цилиндрической пробирке

Согласно закону Нернста, масса соли, которая прошла за время dt через поперечное сечение x трубки равна:

$$dQ_x = -D \frac{\partial u}{\partial x} S dt,$$

где D – коэффициент диффузии, который считаем постоянным;

S – площадь поперечного сечения.

Согласно этому же закону, через сечение $x + dx$ за время dt проходит масса:

$$dQ_{x+dx} = -D \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right) S dt.$$

Увеличение количества соли в элементарном объеме $(x, x + dx)$ за время dt составляет:

$$dQ = dQ_x - dQ_{x+dx} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} S dx dt.$$

Увеличение количества соли приводит к изменению концентрации раствора во времени, т. е.:

$$dQ = \frac{\partial u}{\partial t} dt S dx.$$

Приравняв правые части двух последних выражений, получим:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (4.7)$$

Уравнение (4.7) описывает процесс диффузии соли в воде со временем. Это уравнение относится к параболическому типу, как было сказано выше, оно чаще встречается не только в задачах при изучении процессов диффузии, но также и в задачах теплопроводности.

Контрольные вопросы

1. В чем особенность уравнений с частными производными?
2. Дайте классификацию уравнений с частными производными второго порядка. Приведите примеры.
3. Как задаются краевые условия в уравнениях с частными производными?
4. Что описывают уравнения эллиптического типа?
5. Что описывают уравнения параболического типа?
6. Что описывают уравнения гиперболического типа?
7. С какими проблемами столкнулась дальняя телефония в конце 19 века?
8. Что описывают «телеграфные уравнения» Хевисайда?
9. К какому типу уравнений относятся «телеграфные уравнения» Хевисайда?
10. Назовите три способа переноса тепла.
11. На чем основан вывод уравнения диффузии тепла?
12. Сколько решений имеет дифференциальное уравнение теплопроводности?
13. Что отражают граничные условия в уравнении теплопроводности?
14. Что такое диффузия вещества?
15. Что представляет собой уравнение диффузии?
16. Каким может быть процесс диффузии?
17. Что находится при решении уравнения диффузии?
18. Назовите области или задачи, к которым принципиально ограничена применимость классической ньютоновской физики.
19. К какому типу уравнений относится уравнение диффузии и в каких областях техники оно используется?

ГЛАВА 5. РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОТЕХНИКИ, ИМЕЮЩИХ ЗНАЧЕНИЕ ДЛЯ ПРАКТИКИ

В главе рассматриваются задачи стационарного распределения температуры в прямоугольном бруске и тонкой пластине, а также распределение температуры при нагреве и охлаждении в стержне. Решения этих задач получены в аналитическом виде, т. е. в виде формул.

5.1. Стационарное распределение температуры в прямоугольном бруске

Рассматриваемая задача формулируется так: одна из граней длинного прямоугольного бруса (рис. 5.1) поддерживается при заданной температуре, а на остальных гранях Γ равна нулю. Требуется найти установившуюся температуру в произвольной точке внутри бруса.

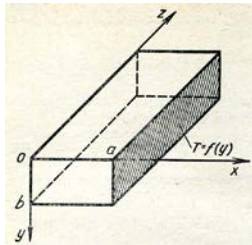


Рис. 5.1. Геометрические размеры бруса

Из симметрии бруса ясно, что температура от l не зависит и что можно ограничиться рассмотрением сечения в плоскости XOY [1]. Задача состоит в определении функции $T = T(x, y)$, удовлетворяющей:

$$\Delta T \equiv \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (5.1)$$

и двум парам краевых условий:

$$T|_{x=0} = 0, \quad T|_{x=a} = f(y); \quad (5.2)$$

$$T|_{y=0} = 0, \quad T|_{y=b} = 0. \quad (5.3)$$

Как обычно, ищем решение в виде:

$$T(x, y) = X(x)Y(y). \quad (5.4)$$

Дифференцируя (5.4) дважды по x и y и подставляя в (5.1), получаем:

$$\ddot{X} Y + X \ddot{Y} = 0,$$

где точка обозначает производную первого порядка.

Умножая последнее равенство на $\frac{1}{XY}$, разделим переменные:

$$\frac{\dot{X}}{X} = -\frac{\dot{Y}}{Y}.$$

Приравнивая обе части постоянной λ^2 , приходим к обыкновенным линейным дифференциальным уравнениям:

$$\dot{X} - \lambda^2 X = 0, \quad (5.5)$$

$$\dot{Y} + \lambda^2 Y = 0. \quad (5.6)$$

Решение уравнения (5.6) мы уже неоднократно записывали:

$$Y(y) = C \cos \lambda y + D \sin \lambda y. \quad (5.7)$$

Что касается уравнения (5.5), то его решение, как известно, отличается только тем, что вместо тригонометрических функций оно содержит гиперболические функции:

$$X(x) = A \cosh \lambda x + B \sinh \lambda x. \quad (5.8)$$

Выберем теперь постоянные A , B , C , D и λ так, чтобы удовлетворить граничным условиям (5.2) и (5.3). Удобнее начать с (5.3) как более простых. Итак,

$$Y(0) = C = 0.$$

Следовательно,

$$Y(y) = D \sin \lambda y. \quad (5.9)$$

Наложив второе граничное условие по y :

$$Y(b) = D \sin \lambda b = 0,$$

приходим к выводу, что:

$$\lambda b = n\pi, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots$$

Отсюда:

$$\lambda_n = n \frac{\pi}{b}.$$

Подставляя эти дискретные значения параметра λ в (5.8), получаем множество функций $X(x)$ на $Y(y)$:

$$X_n = A_n ch \frac{n\pi x}{b} + B_n sh \frac{n\pi x}{b},$$

$$Y_n = D_n \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Перемножив теперь $X_n(x)$ на $Y_n(y)$, находим совокупность функций $T_n(x, y)$, удовлетворяющих уравнению (5.1) и краевым условиям (5.3):

$$T_n(x, y) = \left(M_n ch \frac{n\pi x}{b} + N_n sh \frac{n\pi x}{b} \right) \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (5.10)$$

В данном случае осталось удовлетворить условиям (5.2). Первому из них, а именно $\dot{O}|_{\delta=0} = 0$, можно сразу удовлетворить, если положить $M_n = 0$. Таким образом, совокупность функций:

$$T_n = N_n sh \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (5.11)$$

удовлетворяет не только уравнению (5.1), но и трем (нулевым) краевым условиям. Чтобы удовлетворить последнему граничному условию $T|_{x=a} = f(y)$, составим бесконечную сумму:

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} N_n sh \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (5.12)$$

и подберем коэффициенты N_n таким образом, чтобы ряд при $x \rightarrow a$ сходил к функции $f(y)$:

$$T|_{x=a} = \sum_n N_n sh \frac{n\pi a}{b} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} = f(y).$$

Отсюда видно, что постоянные множители $N_n sh \frac{n\pi a}{b}$ должны являться коэффициентами f_n разложения в ряд Фурье функции $f(y)$ по синусам:

$$N_n sh \frac{n\pi a}{b} = f_n. \quad (5.13)$$

Отсюда:

$$N_n = \frac{f_n}{sh \frac{n\pi a}{b}}, \quad (5.14)$$

где

$$f_n = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy. \quad (5.15)$$

Подставляя значения коэффициентов N_n (5.14) в ряд (5.12), получаем окончательно:

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (5.16)$$

Полагая, как это обычно бывает, что этот ряд сходится достаточно хорошо, можно утверждать, что его сумма удовлетворяет всем условиям задачи и является ее решением. Если теперь определиться с видом функции $f(y)$, то можно построить график линий уровней температуры внутри бруса.

5.2. Охлаждение бесконечного стержня

Пусть температура тонкого теплопроводного стержня бесконечной длины в начальный момент была распределена по закону:

$$T|_{t=0} = f(x). \quad (5.17)$$

Определим температуру в каждой точке стержня в любой последующий момент времени $t > 0$ [1, с.127–131]. Ясно, что это частный случай задачи Коши, которая сводится к определению функции $T(x, \tau)$, удовлетворяющей уравнению:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (5.18)$$

и начальному условию (5.17). В уравнении (5.18) $\tau = \frac{\kappa}{c\rho} t$ (κ – коэффициент теплопроводности, c – теплоемкость, ρ – плотность материала).

С физической точки зрения эта задача аналогична рассмотренной в п. 5.1 этой главы с тем отличием, что здесь нет граничных условий. Поэтому понятно, что, разделяя переменные по методу Фурье, можно представить решение уравнения (5.18) в виде:

$$T(x, \tau) = (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x) e^{-\lambda^2 \tau}. \quad (5.19)$$

В случае стержня конечной длины l определяем из граничных условий дискретное множество возможных значений параметра λ :

$$\lambda_n = n \frac{\pi}{l},$$

где каждому значку n соответствуют некоторые коэффициенты A_n и B_n . Чем длиннее стержень, тем гуще множество значений λ_n (расстояние между λ_n и λ_{n+1} равно $\frac{\pi}{l}$ и стремится к нулю, когда $l \rightarrow \infty$). Поэтому для бесконечного стержня λ может иметь любое значение от 0 до ∞ .

Таким образом, каждому значению λ соответствует частное решение:

$$T_\lambda(x, \tau) = [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] e^{-\lambda^2 \tau}. \quad (5.20)$$

Общее решение получается из частных решений (6.20), не суммированием, а интегрированием по параметру λ :

$$T(x, \tau) = \int_0^\infty T_\lambda d\lambda = \int_0^\infty [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] e^{-\lambda^2 \tau} d\lambda \quad (5.21)$$

Полагая, что интеграл (5.21) сходящийся и дифференцируемый по x и τ (это обычно имеет место), можно быть уверенным в том, что функция $T(x, \tau)$ удовлетворяет уравнению (5.18). Но решение еще должно удовлетворять начальному условию:

$$T \Big|_{\tau=0} = \int_0^\infty [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda = f(x). \quad (5.22)$$

Отсюда видно, что задача свелась к разложению произвольной функции $f(x)$ в интеграл Фурье, являющийся обобщением понятия ряда Фурье. В теории интеграла Фурье доказывается, что любая непрерывная функция $f(x)$, удовлетворяющая условию:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

может быть представлена в виде интеграла от гармонических функций $\cos \lambda x$ и $\sin \lambda x$, частота которых λ пробегает непрерывную совокупность значений:

$$f(x) = \int_0^\infty [f_c(\lambda) \cos \lambda x + f_s(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda, \quad (5.23)$$

$$\text{где } f_c(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x dx, \quad f_s(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \lambda x dx. \quad (5.24)$$

Подставляя значения Фурье-преобразования $f_c(\lambda)$ и $f_s(\lambda)$ в интеграл (5.23), получаем:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\cos \lambda x \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi + \sin \lambda x \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi \right] d\lambda,$$

или

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) (\cos \lambda x \cos \lambda \xi + \sin \lambda x \sin \lambda \xi) d\xi. \quad (5.25)$$

Учитывая, что выражение в круглых скобках есть косинус разности, приходим к иному выражению для интеграла Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda(\xi - x) d\xi. \quad (5.26)$$

Таким образом, если в качестве коэффициентов $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ в (5.21) выбираем соответственно:

$$A(\lambda) = f_c(\lambda), \quad B(\lambda) = f_s(\lambda),$$

тогда интеграл:

$$T(x, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [f_c(\lambda) \cos \lambda x + f_s(\lambda) \sin \lambda x] e^{-\lambda^2 \tau} d\lambda \quad (5.27)$$

является решением рассматриваемой задачи.

Другая, эквивалентная форма этого решения получается из (5.25):

$$T(x, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 \tau} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda(\xi - x) d\xi. \quad (5.28)$$

Последний интеграл можно еще преобразовать, меняя порядок интегрирования:

$$T(x, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 \tau} \cos \lambda(\xi - x) d\lambda. \quad (5.29)$$

Обозначив $\xi - x = q$, можно внутренний интеграл свести к известному в математике определенному интегралу:

$$K(\tau, q) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\tau \lambda} \cos \lambda q d\lambda = \frac{1}{2\sqrt{\pi \tau}} e^{-\frac{q^2}{4\tau}}. \quad (5.30)$$

Заменяя обратно q через $\xi - x$ и подставляя (5.30) в (5.29), получаем окончательно:

$$T(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi \tau}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} d\xi. \quad (5.31)$$

Чтобы понять физический смысл полученного решения, допустим, что в начальный момент времени ($\tau = 0$) температура бесконечного стержня была равна нулю всюду, кроме окрестности точки $x = 0$, где $T = T_0$. Тогда можно представить, что в момент $\tau = 0$ элементу длины $2h$ стержня сообщили некоторое количество тепла $Q_0 = 2hc\rho T_0$, которое вызвало повышение температуры на этом участке до значения T_0 . Следовательно, формула (5.31) принимает вид:

$$T(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi \tau}} \int_{-h}^h T_0 e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} d\xi = \frac{Q_0}{4h\sqrt{\pi \tau c\rho}} \int_{-h}^h e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} d\xi.$$

Будем теперь уменьшать h , устремляя его к нулю, считая количество тепла Q_0 неизменным, т. е. введем понятие мгновенного точечного источника тепла напряжения Q_0 , помещенного в момент времени $\tau = 0$ в точке $x = 0$. При этом распределение температур в стержне будет определяться формулой:

$$T(x, \tau) = \frac{Q_0}{2c\rho\sqrt{\pi \tau}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} d\xi,$$

или

$$T(x, \tau) = \frac{Q_0}{2c\rho\sqrt{\pi \tau}} e^{-\frac{x^2}{4\tau}}. \quad (5.32)$$

В частности, если $Q_0 = c\rho$, то температура любой точки стержня в произвольный момент времени $t = \frac{\tau}{a}$ (a – коэффициент температуропроводности) может быть найдена по формуле:

$$T(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} e^{-\frac{x^2}{4at}}. \quad (5.33)$$

Графически решение из (5.33) для различных моментов времени представлено на рис. 5.2.

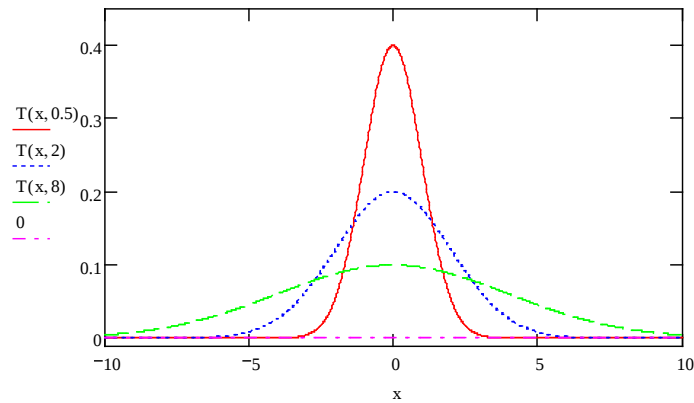


Рис. 5.2. Графики распределения температуры в стержне в разные моменты времени, построенные в MathCad

Заметим, что величина:

$$c\rho \int_{-\infty}^{\infty} T(x, t) dx$$

есть общее количество тепла, полученное стержнем к моменту времени t :

$$Q(t) = c\rho \int_{-\infty}^{\infty} T(x, t) dx = \frac{c\rho}{2\sqrt{\pi at}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4at}} dx. \quad (5.34)$$

В (5.34) последний (справа) интеграл есть интеграл Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Поэтому получаем, что $Q(t) = c\rho = Q_0 = \text{const}$, что согласуется с законом сохранения энергии.

5.3. Охлаждение тонкой пластины

Пусть в начальный момент у пластины, толщина которой значительно меньше длины и ширины (рис. 5.3), температура была распределена по закону $T|_{t=0} = F(x)$. Охлаждение пластины происходит по закону Ньютона, т. е. при $x = \pm a$.

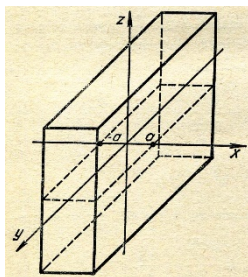


Рис. 5.3. Геометрические размеры полосы

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha T . \quad (5.35)$$

Определим температуру произвольной точки в любой последующий момент времени. Сформулируем задачу аналитически: необходимо найти функцию $T(x,y)$, удовлетворяющую одномерному уравнению теплопроводности:

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (5.36)$$

и условиям: начальному:

$$T|_{t=0} = F(x) \quad (5.37)$$

и граничному:

$$\frac{\partial T}{\partial x} + hT|_{x=\pm a} = 0 . \quad (5.38)$$

Решение задачи начнем со следующего. Прежде всего, как и в п. 5.1, введем новую независимую переменную $\tau = \frac{k}{c\rho} t$. Тогда уравнение (5.36) упростится:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} . \quad (5.39)$$

Ищем его интеграл в виде произведения:

$$T(x, \tau) = X(x)Y(\tau) . \quad (5.40)$$

Продифференцировав (5.40) по x дважды и τ один раз и подставив полученные выражения в (5.39), получим:

$$\frac{\ddot{X}}{X} = \frac{\dot{Y}}{Y} .$$

Приравнявая обе части одной и той же постоянной $-\lambda^2$, приходим к двум обыкновенным уравнениям:

$$\begin{aligned} \ddot{X} + \lambda^2 X &= 0 , \\ \dot{Y} + \lambda^2 Y &= 0 . \end{aligned}$$

Решения их нам хорошо известны:

$$X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x , \quad (5.41)$$

$$Y(\tau) = ce^{-\lambda^2 \tau}. \quad (5.42)$$

Поскольку в рассматриваемом случае граничные условия не являются нулевыми, то возникает новая ситуация. Так как условия слева и справа от плоскости $x = 0$ совершенно одинаковы, то в начальный момент времени температура должна была быть распределенной симметрично:

$$F(x) = F(-x).$$

Поэтому и в последующем распределение температуры должно оставаться симметричным. Таким образом, функция $X(x)$ должна быть четной, т. е.

$$X(-x) = X(x).$$

Отсюда вытекает, что коэффициент B в (5.41) равен нулю, а вид функции $X(x)$ упрощается:

$$X(x) = A \cos \lambda x. \quad (5.43)$$

Так как в краевое условие (5.38) входит только производная по x и $T(x, \tau) = X(x) \cdot Y(\tau)$, то функция $X(x)$ должна удовлетворять условию:

$$\dot{X}(a) + hX(a) = 0. \quad (5.44)$$

Используя (5.43), получаем:

$$-A\lambda \sin \lambda a + hA \cos \lambda a = 0,$$

откуда:

$$\operatorname{tg} \lambda a = \frac{h}{\lambda}, \quad (5.45)$$

Полученное равенство (5.45) является трансцендентным уравнением относительно неизвестной λ . Будем решать это уравнение графическим способом, для чего сначала умножим числитель и знаменатель правой части на число a :

$$\operatorname{tg} \lambda a = \frac{ha}{\lambda a}. \quad (5.46)$$

Обозначим $\lambda a = z$ и построим в системе координат (z, u) графики кривых $u_1 = \operatorname{tg} z$ и $u_2 = \frac{ha}{z}$ (рис. 5.4). Ясно, что гипербола u_2 пересечет семейство тангенсоид бесчисленное множество раз. Это значит, что уравнение (5.46) имеет бесконечное множество корней, причем с ростом $z = \lambda a$ точки пересечения z_n приближаются к $\lambda_n a = n\pi$ (где $n = 1, 2, \dots$), так как $\operatorname{tg} z_n \rightarrow 0$.

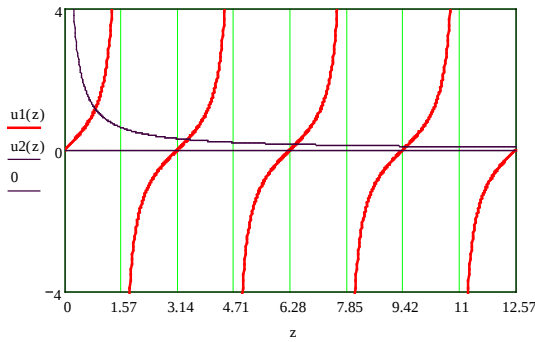


Рис. 5.4. Графическое решение уравнения (5.46), полученное в MathCad

Отметим, что λ_n суть корни уравнения (5.46). Отсюда получается множество функций $X(x)$, удовлетворяющих граничному условию (5.44):

$$X_n(x) = A_n \cos \lambda_n x. \quad (5.47)$$

Подставляя (5.46) и (5.42) в (5.40), получаем множество функций:

$$T_n = M_n \exp(-\lambda_n^2 \tau) \cos \lambda_n x,$$

которые удовлетворяют уравнению (5.36) и граничному условию (5.38). Чтобы получить решение, удовлетворяющее еще и начальному условию, составляем уже известным приемом бесконечную сумму:

$$T(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n = \sum_n M_n \exp(-\lambda_n^2 \tau) \cos \lambda_n x = F(x). \quad (5.48)$$

Выясним теперь, каковы должны быть коэффициенты M_n , чтобы при $\tau \rightarrow 0$, ряд, получающийся из функции T_n , сходил к заданной функции $F(x)$, т. е. чтобы:

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n \cos \lambda_n x = F(x). \quad (5.49)$$

Во всех предыдущих примерах мы сталкивались с разложением функции в ряд по синусам и косинусам кратных аргументов, т. е. с рядами Фурье. В левой части же равенства (5.49) стоит бесконечная сумма косинусов, аргументы которых отличаются нецелочисленными множителями λ_n . Несложно, однако, показать, что функции $\cos \lambda_n x$ и $\cos \lambda_m x$ являются взаимно ортогональными, т. е.:

$$\int_{-\bar{a}}^{\bar{a}} \cos \lambda_n x \cos \lambda_m x dx = 0.$$

С другой стороны, они не нормированы, т. е.:

$$\int_{-a}^a \cos^2 \lambda_n x dx \neq 1.$$

В теории рядов Фурье доказывается, что произвольную функцию $f(x)$ можно разлагать в ряд по семейству ортогональных ненормированных функций $X_1(x), X_2(x), \dots$:

$$f(x) = \sum_n f_n X_n(x).$$

Но в отличие от обычных рядов Фурье обобщенные коэффициенты Фурье f_n определяются по формуле:

$$f_n = \left[\int_{-a}^a X_n^2 dx \right]^{-1} \int_{-a}^a f(x) X_n(x) dx.$$

Таким образом, для удовлетворения условия (5.49) необходимо положить произвольные числа M_n равными обобщенным коэффициентам Фурье:

$$M_n = F_n = \frac{\int_{-a}^a F(x) \cos \lambda_n x \cdot dx}{\int_{-a}^a \cos^2 \lambda_n x \cdot dx}. \quad (5.50)$$

Подставляя теперь значения M_n в (5.48), получаем окончательное выражение для искомой функции $T(x, t)$:

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \exp\left(-\frac{k}{c\rho} \lambda_n^2 t\right) \cos \lambda_n x. \quad (5.51)$$

Формула (6.51) служит теоретической основой экспериментального определения коэффициента теплопроводности k методом регулярного режима.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте задачу о стационарном распределении температуры в прямоугольном брус.
2. Что требуется найти в задаче о стационарном распределении температуры в прямоугольном брус?
3. Какой тип дифференциального уравнения используется для описания стационарного распределения температуры в прямоугольном брус?

4. В чем состоит задача решения дифференциального уравнения для описания стационарного распределения температуры в прямоугольном бруске?
5. В чем состоит суть метода решения дифференциального уравнения для описания стационарного распределения температуры в прямоугольном бруске?
6. Какой вид ряда Фурье используется при решении дифференциального уравнения для описания стационарного распределения температуры в прямоугольном бруске?
7. Сформулируйте задачу об охлаждении бесконечного стержня.
8. Какой метод решения используется при решении задачи об охлаждении бесконечного стержня?
9. Что представляет собой интеграл Фурье?
10. В чем смысл решения задачи об охлаждении бесконечного стержня?
11. Сформулируйте задачу об охлаждении тонкой пластины, у которой толщина значительно меньше длины и ширины.
12. Что нужно найти в задаче об охлаждении тонкой пластины, у которой толщина значительно меньше длины и ширины?
13. Какой тип дифференциального уравнения используется в задаче об охлаждении тонкой пластины, у которой толщина значительно меньше длины и ширины?
14. Какой вид имеет решение дифференциального уравнения используется в задаче об охлаждении тонкой пластины, у которой толщина значительно меньше длины и ширины?

ГЛАВА 6. ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Математические модели, в основе которых лежат дифференциальные уравнения в частных производных, предназначены для решения задач, описывающих физические процессы прежде всего в гидродинамике, теплотехнике, аэромеханике и электродинамике. Следует отметить, что уравнения этого типа описывают процессы, которые могут протекать в бесконечном разнообразии тел, имеющих различные формы, размеры и свойства. Разработанные для них методы решения могут быть использованы при изучении различных классов инженерных задач.

6.1. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных

Дифференциальные уравнения в частных производных классифицируют либо в зависимости от их математической природы – эллиптические, параболические и т. п., либо в зависимости от физического смысла решаемых с их помощью задач – уравнение диффузии, волновое уравнение и т. п. Чтобы пользоваться математической литературой и литературой по прикладным дисциплинам, инженер должен быть знаком с обеими этими классификациями.

Дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных, с двумя независимыми переменными в общем виде может быть представлено так:

$$A(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + E(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) = 0, \quad (6.1)$$

где A , B и C некоторые функции, зависящие от переменных x и y .

В зависимости от значения определителя $B^2 - 4AC$, составленного из коэффициентов уравнения, вводят классификацию рассматриваемых уравнений:

- $B^2 - 4AC < 0$ – эллиптическое уравнение;
- $B^2 - 4AC = 0$ – параболическое уравнение;
- $B^2 - 4AC > 0$ – гиперболическое уравнение.

Зависимость функций A , B и C от x и y усложняет решение задачи, т. к. появляется возможность изменения типа уравнения при переходе из одной части рассматриваемой области в другую.

Эллиптические уравнения описывают установившиеся (стационарные) процессы. Задача решается для замкнутой области, и в каждой точке границы этой области задаются граничные условия.

Параболическими и гиперболическими уравнениями описываются эволюционные процессы (процессы «распространения»). В таких задачах на одной части границы ставятся начальные условия, на другой – граничные. Возможны также открытые области, в которые «распространяется решение».

Наиболее часто встречаемые в инженерной практике уравнения в частных производных, приведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1 – Известные типы дифференциальных уравнений в частных производных

Уравнение	Математическая форма	В каких технических задачах встречается
Лапласа	$\Delta f = 0$	Установившееся течение жидкости. Стационарные тепловые поля.
Пуассона	$\Delta f = -k$	Теплопередача с внутренними источниками тепла

Уравнение	Математическая форма	В каких технических задачах встречается
Диффузии	$\Delta f = \frac{1}{h^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial t}$	Нестационарная теплопроводность
Волновое	$\Delta f = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$	Распространение звуковых волн
Бигармоническое	$\Delta^2 f = F(x, y)$	Деформация пластин

К уравнению Лапласа сводятся самые разнообразные физические задачи различной природы:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (6.2)$$

Это уравнение (6.2) встречается в задачах электростатики, теории потенциала, гидродинамики, теории теплопередачи и многих других разделах физики, а также в теории функций комплексного переменного и в различных областях математического анализа. Если в уравнении (6.2) присутствует некоторая функция $f(x, y)$, то имеем так называемое уравнение Пуассона:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x, y). \quad (6.3)$$

Уравнение (6.3) является простейшим представителем широкого класса так называемых *эллиптических уравнений*.

Важное место занимает уравнение Лапласа в теплотехнике, где оно носит название *уравнение теплопроводности*.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad t > 0, 0 < x < l, \quad (6.4)$$

с краевыми условиями 1-го рода $u(0, t) = \mu_1(t)$, $u(l, t) = \mu_2(t)$, $u(x, 0) = u_0(x)$.

Это уравнение встречается в теории теплопередачи, в теории диффузии, а также в теории вероятностей. Оно является наиболее простым представителем класса так называемых *параболических уравнений*. Некоторые свойства решений уравнения теплопроводности напоминают свойства решений уравнения Лапласа, что находится в согласии с их физическим смыслом, т. к. уравнение Лапласа описывает, в частности, стационарное распределение температуры.

Уравнение теплопроводности было выведено и впервые исследовано в 1822 г. в работе Ж. Фурье «Аналитическая теория тепла», которая сыграла важную роль в развитии методов математической физики и теории тригонометрических рядов.

Различные волновые процессы, в частности, распространение звуковых волн описывается волновым уравнением. Это уравнение относится к классу так называемых *гиперболических уравнений* и играет важную роль в акустике.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0. \quad (6.5)$$

При решении дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных обычно задаются граничные или начальные условия, а также комбинация тех и других. Это значит, что кривая решения должна обязательно пройти через заданные граничные или начальные условия.

Другими словами, задача нахождения функции, удовлетворяющей заданному дифференциальному уравнению в некоторой области и определенным краевым условиям на границе этой области, носит название решение краевой задачи (т. н. задача Дирихле или первая краевая задача). В то время, как краевые условия задаются исключительно на граничных точках области, где ищется решение, начальные условия могут оказаться заданными на определенном множестве точек внутри области. Различают первую и вторую краевые задачи.

Первая краевая задача – задача отыскания решения эллиптического уравнения с краевыми условиями 1-го рода. Эту задачу также называют иногда *задачей Дирихле*.

Вторая краевая задача или задача Неймана – задача отыскания решения эллиптического уравнения с краевыми условиями 2-го рода. В простейших случаях, в частности, для уравнения Лапласа задача Неймана состоит в отыскании решения в некоторой области, имеющего на границе этой области заданную нормальную производную, т. е. производная градиента функции на направление нормали. Впервые подобного рода задачи систематически были исследованы в 1877 г. немецким математиком К. Нейманом.

На рубеже XIX века теория дифференциальных уравнений обогатилась теорией интегральных уравнений Фредгольма. Интегральное уравнение представляет собой функциональное уравнение с интегральным преобразованием над неизвестной функцией. Если интегральное уравнение содержит также производные от неизвестной функции, то говорят об интегро-дифференциальном уравнении. Примером интегро-дифференциального уравнения может служить уравнение роста трещины в вязкоупругом материале (полимер, бетон и т. д.).

6.2. Подходы к решению дифференциальных уравнений в частных производных

Очень многие из дифференциальных уравнений, к сожалению, не имеют аналитического решения, и чтобы решить их, приходится прибегать к численным методам. Если для решения обыкновенных дифференциальных

уравнений существует множество различных методов, то для решения дифференциальных уравнений в частных производных приходится выбирать лишь между методами конечных разностей и конечных элементов [1, 2].

При решении конкретных дифференциальных уравнений часто используются методы, обладающие большой общностью. Такими методами являются, например, метод Фурье, метод Рунге, метод Галёркина, методы теории возмущений и другие.

В настоящее время важную роль в развитии теории дифференциальных уравнений играет применение современных электронных вычислительных машин (ЭВМ). Использование концепции дифференциальных уравнений как средства моделирования и моделирования реального мира не всегда является легкой задачей. Применение ЭВМ и вычислительных методов имеет решающее значение, т. к. облегчает проведение вычислительного эксперимента при решении дифференциальных уравнений и позволяет выявить те или иные свойства их решений.

Целью вычислительного эксперимента является построение с необходимой точностью описания изучаемого физического явления за возможно короткое машинное время. В основе такого эксперимента часто лежит численное решение системы уравнений с частными производными. Отсюда происходит связь теории дифференциальных уравнений с вычислительной математикой и, в частности, с такими ее важными разделами, как метод конечных разностей, метод конечных элементов и другие.

В настоящее время теория дифференциальных уравнений с частными производными представляет собой широкую математическую область. Построена теория краевых задач для эллиптических операторов на основе недавно созданного нового аппарата – теории псевдодифференциальных операторов, решена проблема индекса, изучены смешанные задачи для гиперболических уравнений. Важную роль в современных исследованиях гиперболических уравнений играют интегральные операторы Фурье, которые обобщают оператор преобразования Фурье на тот случай, когда фазовая функция в показателе экспоненты, вообще говоря, нелинейно зависит от независимых переменных и частот. С помощью интегральных операторов Фурье изучен вопрос о распространении особенностей решений дифференциальных уравнений, ведущий начало от классических работ Гюйгенса. Найдены условия корректной постановки краевых задач, исследованы вопросы гладкости решений для эллиптических и параболических систем. Изучены нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка и широкие классы нелинейных уравнений первого порядка, исследована для них задача Коши, построена теория разрывных решений. Глубокому изучению были подвергнуты: система Навье-Стокса, система уравнений пограничного слоя, уравнения теории упругости, уравнения фильтрации и многие другие важные уравнения математической физики.

Контрольные вопросы

1. Что называется решением дифференциального уравнения в частных производных?
2. Что является частным решением дифференциального уравнения?
3. Чем отличается решение дифференциального уравнения от решения алгебраического?
4. Сколько частных решений имеет дифференциальное уравнение?
5. Какая классификация дифференциальных уравнений в частных производных исходя из коэффициентов уравнений?
6. Для решения каких задач используются эллиптические уравнения?
7. Для решения каких задач используются параболические уравнения?
8. Для решения каких задач используются гиперболические уравнения?
9. Приведите примеры известных типов дифференциальных уравнений в частных производных?
10. Каким уравнением описывается распределение температуры на плоскости пластины?
11. Какой ученый впервые получил и исследовал уравнение теплопроводности?
12. Что значит решить краевую задачу?
13. Что значит решить первую краевую задачу или задачу Дирихле?
14. Что значит решить вторую краевую задачу или задачу Неймана?
15. Какие методы используют при решении конкретных дифференциальных уравнений в частных производных?

ГЛАВА 7. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

При численном решении дифференциальных уравнений в частных производных наиболее часто используют метод конечных разностей (другое название – метод сеток), метод конечных элементов или спектральный метод. В данной главе рассматривается только метод конечных разностей.

7.1. Метод конечных разностей

В основе решения уравнений в частных производных методом конечных разностей лежит конечно-разностная аппроксимация производных. Это позволяет преобразовать исходное уравнение в частных производных (или систему таких уравнений) в систему алгебраических уравнений (или обыкновенных дифференциальных уравнений). Решение полученных систем уравнений производится известными математическими методами и обычно не представляет трудностей, особенно при наличии соответствующих компьютерных программ.

Аппроксимация осуществляется в три этапа. Сначала в области решения вводят равномерную сетку «узловых точек», соответствующую характеру задачи и граничным условиям. Затем решаемое уравнение в частных производных записывают в наиболее удобной системе координат и, представляя производные в конечно-разностной форме, приводят его к виду разностного уравнения. Полученное разностное уравнение используют в дальнейшем для описания функциональной связи между соседними узлами сетки. Разностное уравнение записывают для всех узлов сетки и получают в результате систему n уравнений с n неизвестными. На последнем этапе полученную систему n уравнений с n неизвестными решают одним из численных методов.

На первый взгляд эта процедура, состоящая из трех этапов, может показаться простой и прямо ведущей к решению. Однако на самом деле это не так – широкое разнообразие типов и размеров сеток, видов уравнений в частных производных, возможных конечно-разностных аппроксимаций этих уравнений и методов решения получаемых систем уравнений делают задачу численного решения уравнений в частных производных исключительно многогранным и интересным исследованием. Рассмотрим ниже этапы решения [1, 2].

7.2. Формулы численного дифференцирования

Пусть x – любой из узлов x_i интервала $[a, b]$. Тогда другие узлы могут быть вычислены по формулам:

$$x + kh, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7.1)$$

Приближенное вычисление производной функции $y(x)$:

$$\frac{d^s y}{dx^s}(x), \quad s \geq 1,$$

в узле x по значениям функции в узлах $y(x + kh)$ называется *численным дифференцированием*.

Предположим, что $y(x) \in C^2[a, b]$, $x < b$. Разложим $y(x + h)$ в ряд Тейлора до членов второго порядка. Имеем:

$$y(x + h) = y(x) + \frac{dy}{dx}(x)h + O(h^2).$$

Отсюда находим, что:

$$\frac{dy}{dx}(x) = \frac{y(x + h) - y(x)}{h} + O(h).$$

Учитывая, что x – это узел x_i , получаем двухточечную формулу для первой производной – дифференцирование вперед:

$$\frac{dy}{dx}(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} + O(h), \quad 0 \leq i \leq m-1. \quad (7.2)$$

Обычно под формулой численного дифференцирования понимают приближенное равенство:

$$\frac{dy}{dx}(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h}.$$

Разность:

$$R = \frac{dy}{dx}(x_i) - \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h},$$

вычисленная для функции $y(x) \in C^2[a, b]$, называется *погрешностью аппроксимации*. Для (7.2) имеем:

$$R = O(h), \quad h \rightarrow 0.$$

Точностью (или порядком точности) *аппроксимации* называется порядок степени h , с которым $R(h)$ стремится к нулю при $h \rightarrow 0$. Для (7.2) порядок точности – первый.

Аналогично выводится двухточечная формула для первой производной – дифференцирование назад:

$$\frac{dy}{dx}(x_i) = \frac{y(x_i) - y(x_{i-1}))}{h} + O(h), \quad 1 \leq i \leq m. \quad (7.3)$$

Более точной является двухточечная формула для первой производной – центральная разность:

$$\frac{dy}{dx}(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} + O(h^2), \quad 1 \leq i \leq m-1. \quad (7.4)$$

Формула (7.4) верна, если $y(x) \in C^3[a, b]$. Для первой производной можно выписать многоточечные формулы, например, трехточечная формула имеет вид:

$$\frac{dy}{dx}(x_i) = \frac{-y(x_{i-2}) + 4y(x_{i-1}) - 3y(x_i)}{2h} + O(h^2).$$

В общем виде многоточечная формула имеет (при достаточной гладкости $y(x)$) вид:

$$\frac{dy}{dx}(x_i) = \sum_{k=0}^m a_k y(x_k) + O(h^p),$$

где коэффициенты a_k выбираются так, чтобы порядок точности формулы был p . Аналогичный подход применяется и для высших производных.

Формула численного дифференцирования для второй производной может быть получена следующим образом. Разложим $y(x+h)$ и $y(x-h)$ в ряд Тейлора (примечание: ряд назван в честь английского математика Брука Тейлора, хотя ряд Тейлора был известен задолго до публикаций Тейлора – его использовали еще в XVII веке Грегори, а также Ньютон) до членов четвертого порядка:

$$y(x+h) = y(x) + \frac{dy}{dx}(x)h + \frac{1}{2} \frac{d^2y}{dx^2}(x)h^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3y}{dx^3}(x)h^3 + O(h^4),$$

$$y(x-h) = y(x) - \frac{dy}{dx}(x)h + \frac{1}{2} \frac{d^2y}{dx^2}(x)h^2 - \frac{1}{6} \frac{d^3y}{dx^3}(x)h^3 + O(h^4).$$

Сложив левые и правые части полученных выражений, после преобразований получим:

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2}.$$

Преобразуем полученную формулу к виду удобному для практического использования:

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} + O(h^2), \quad (7.5)$$

где для внутренних узлов $1 \leq i \leq m-1$.

7.3. Простейшие разностные схемы задачи Коши

Рассмотрим исходную задачу Коши на сетке x_i , $0 \leq i \leq m$:

$$\frac{dy}{dx}(x_i) = f(x_i, y(x_i)), \quad y(x_0) = y^{(0)}.$$

Заменяя левую часть дифференциального уравнения формулами (7.2)–(7.4), получаем:

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} = f(x_i, y(x_i)) + O(h), \quad 0 \leq i \leq m-1,$$

$$\frac{y(x_i) - y(x_{i-1}))}{h} = f(x_i, y(x_i)) + O(h), \quad 1 \leq i \leq m,$$

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} = f(x_i, y(x_i)) + O(h^2), \quad 1 \leq i \leq m-1.$$

Если отбросить погрешность аппроксимации производных в этих соотношениях, то получим разностные схемы:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i), \quad 0 \leq i \leq m-1, \quad y_0 = y^{(0)}; \quad (7.6)$$

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{h} = f(x_i, y_i), \quad 1 \leq i \leq m, \quad y_0 = y^{(0)}; \quad (7.7)$$

$$\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{h} = f(x_i, y_i), \quad 1 \leq i \leq m-1, \quad y_0 = y^{(0)}. \quad (7.8)$$

Разностные схемы (7.6), (7.7) аппроксимируют исходную задачу Коши для достаточно гладких функций на сетке с первым порядком точности, схема (7.8) – со вторым порядком точности.

Схема (7.6) называется явной разностной схемой, схемы (7.7), (7.8) – неявными. Термины связаны с тем, что формула (7.6) дает возможность вычислить значение y_{i+1} в следующей точке сети x_{i+1} по явной формуле:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i),$$

если известно значение y_i , в то время как формулы (7.7), (7.8) задают значения в следующей точке как неявную функцию от значений в предыдущих точках.

Схема (7.8) – незамкнутая разностная схема в том смысле, что система уравнений (7.8) имеет $m+1$ неизвестное y_i , $0 \leq i \leq m$, и только m уравнений. Замкнуть систему можно по-разному. Чтобы не потерять второй порядок точности аппроксимации, обычно заменяют:

$$f(x_i, y_i) = \frac{1}{2} [f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_{i+1}, y_{i+1})].$$

Шаг сетки увеличивают вдвое и получают следующую неявную схему:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{1}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})], \quad (7.9)$$

$$1 \leq i \leq m, \quad y_0 = y^{(0)}.$$

Разностная схема называется устойчивой на модельной задаче, если накопление погрешности по шагам не зависит от числа шагов, т. е.:

$$\left| \sum_{k=1}^i p^{i-k} e^{h\lambda(k-1)} \right| \leq c, \quad 1 \leq i \leq m, \quad (7.10)$$

где константа c не зависит от m .

Разностная схема называется *сходящейся на модельной задаче*, если $\max_{1 \leq i \leq m} |y_i - y(x_i)| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

7.4. Метод сеток для уравнений параболического типа

Рассмотрим смешанную задачу для уравнения теплопроводности, а именно: найдем функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (7.11)$$

начальному условию:

$$u(x, 0) = f(x) \quad (0 < x < s) \quad (7.12)$$

и краевым условиям:

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(s, t) = \psi(t). \quad (7.13)$$

К задаче (7.11)–(7.13) приводит, в частности, задача о распространении тепла в однородном стержне длины s [3]. Путем введения новой переменной $\tau = a^2 t$ в уравнение (7.1) приведем к виду:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Для простоты примем $a = 1$. Построим в полуполосе $t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq s$ (рис. 7.1) два семейства параллельных прямых:

$$x = ih \quad (i = 0, 1, 2, \dots), \quad t = jl \quad (j = 0, 1, 2, \dots).$$

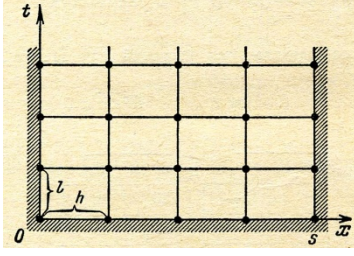


Рис. 7.1. Разбивка
полуполосы на узлы

Обозначим $x_i = ih$, $t_j = jl$, $u(x_i, t_j) = u_{ij}$ и приближенно заменим в каждом внутреннем узле (x_i, t_j) производную $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ разностным отношением:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{ij} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}. \quad (7.14)$$

Производную первого порядка $\frac{\partial u}{\partial t}$ представим одним из двух разностных отношений:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{ij} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{l}, \quad (7.15)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{ij} \approx \frac{u_{ij} - u_{i,j-1}}{l}. \quad (7.16)$$

Тогда для уравнения (7.11) при $a = 1$ получаем два типа конечно-разностных уравнений:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{l} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}, \quad (7.17)$$

$$\frac{u_{ij} - u_{i,j-1}}{l} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}. \quad (7.18)$$

Обозначив $\sigma = \frac{1}{h^2}$, приводим эти уравнения к виду:

$$u_{i,j+1} = (1 - 2\sigma) u_{ij} + \sigma (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}), \quad (7.19)$$

$$(1 + 2\sigma) u_{ij} - \sigma (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1} = 0. \quad (7.20)$$

Отметим, что для составления уравнения (7.17) была использована схема узлов — явная схема (рис. 7.2), а для уравнения (7.18) схема узлов взята неявная схема (рис. 7.3).

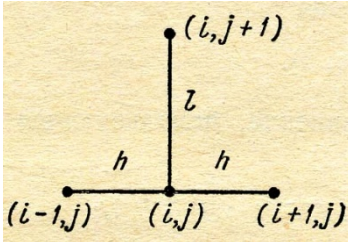


Рис. 7.2. Явная
схема узлов

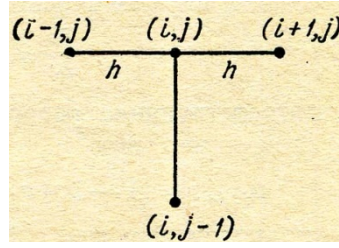


Рис. 7.3.
Неявная схема
узлов

При выборе числа σ в уравнениях (7.19), (7.20) следует учитывать два обстоятельства: 1) погрешность замены дифференциального уравнения разностным должна быть наименьшей; 2) разностное уравнение должно быть устойчивым. Уравнение (7.19) будет устойчивым при $0 < \sigma \leq 1/2$, а уравнение (7.20) – при любом σ . Наиболее удобный вид уравнение (7.19) имеет при $\sigma = 1/2$:

$$u_{i,j+1} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j}}{2}, \quad (7.21)$$

и при $\sigma = 1/6$:

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{6} (u_{i-1,j} + 4u_{i,j} + u_{i+1,j}). \quad (7.22)$$

Оценки погрешностей приближенных решений, полученных из уравнений (7.21), (7.22), (7.20) в полосе $0 \leq x \leq s$, $0 \leq t \leq T$, соответственно имеют вид:

$$|u - \tilde{u}| \leq \frac{T}{3} M_1 h^2, \quad (7.23)$$

$$|u - \tilde{u}| \leq \frac{T}{135} M_2 h^4, \quad (7.24)$$

$$|u - \tilde{u}| \leq T \left(\frac{l}{2} + \frac{h^2}{12} \right) M_1, \quad (7.25)$$

где $\tilde{u}$ – точное решение задачи (7.11)–(7.13),

$$M_1 = \max \{ |f^{(4)}(x)|, |\varphi''(t)|, |\psi''(t)| \}, \text{ при } 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq s,$$

$$M_2 = \max \{ |f^{(6)}(x)|, |\varphi^{(4)}(t)|, |\psi^{(4)}(t)| \}, \text{ при } 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq s.$$

Из приведенных оценок погрешностей видно, что уравнение (7.22) дает более высокую сравнению с уравнением (7.21). Но уравнение (7.21) имеет более простой вид, а, кроме того, шаг l по аргументу t для уравнения (7.22) должен быть значительно меньше, что приводит к большему объему вычислений. Уравнение (7.20) дает меньшую точность, но при этом шаги l и h выбираются независимо друг от друга. Уравнения (7.21) и (7.22) позволяют вычислить значения функции $u(x, y)$ на каждом слое по явным формулам через значения на предыдущем слое; уравнение (7.20) (неявная схема) этим свойством не обладает.

Методом сеток можно решать смешанную краевую задачу для неоднородного параболического уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t).$$

Тогда соответствующее разностное уравнение, использующее явную схему узлов, имеет вид:

$$u_{i,j+1} = (1-2\sigma) u_{ij} + \sigma (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + lF_{ij}. \quad (7.26)$$

Отсюда получаем при $\sigma = 1/2$

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{2} (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + lF_{ij}, \quad (7.27)$$

а при: $\sigma = 1/6$

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{6} (u_{i-1,j} + 4u_{ij} + u_{i+1,j}) + lF_{ij}. \quad (7.28)$$

В этом случае имеет место следующая оценка погрешности для уравнения (7.27):

$$|u - \tilde{u}| \leq \frac{T}{4} \left(M_2 + \frac{1}{3} M_4 \right) h^2.$$

Контрольные вопросы

1. Каковы особенности численного решения дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) эллиптического, гиперболического и параболического типа?
2. В чем заключается идея метода конечных разностей?
3. Как приближенно вычислить первую производную?
4. Как приближенно вычислить вторую производную?
5. Каковы этапы приближенного решения уравнения методом конечных разностей?
6. Как строится разностная схема?
7. Какие виды сеток используются в методе конечных разностей? Каким образом строят на этих сетках разностные аппроксимации и соответствующие им шаблоны?
8. Из каких соображений выбирают шаг сетки в методе конечных разностей?
9. К каким негативным последствиям может привести уменьшение интервалов расчетной сетки при реализации конечно-разностного решения?
10. Каковы источники погрешности при решении задачи с ДУЧП? Каким образом можно оценить погрешность результата численного решения?
11. В каких случаях может возникать неустойчивость решения задачи? Как влияет выбор параметров сетки на устойчивость?
12. Что понимают под сходимостью процесса решения задачи? Ответ поясните на примере решенной задачи.

ГЛАВА 8. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕПЛОТЕХНИКИ В MATHCAD И EXCEL

Для решения стационарных задач теплопроводности в MathCad, в зависимости от типа уравнения и задаваемых граничных условий, могут быть использованы опции *relax*, *multigrid* или *Pdesolve*. В других, более сложных случаях, приходится прибегать к программированию в MathCad. В Excel подобных опций MathCad нет, и поэтому необходимо тоже программировать с учетом особенностей электронной таблицы.

8.1. Опция *relax*

Для решения уравнения Пуассона или Лапласа на области, имеющей квадратную форму $D = \{(x, y): a < x < b, c < y < d\}$ в MathCad можно воспользоваться функциями **relax** и **multigrid** [1]. Функция **relax** использует метод релаксации для нахождения приближенного решения. При этом уравнение Пуассона или Лапласа представляется в виде конечных разностей:

$$a_{j,k}u_{j+1,k} + b_{j,k}u_{j-1,k} + c_{j,k}u_{j,k+1} + d_{j,k}u_{j,k-1} + e_{j,k}u_{j,k} = f_{j,k}. \quad (8.1)$$

Опция **relax** (**a**, **b**, **c**, **d**, **e**, **f**, **u**, **r**) содержит: **a**, **b**, **c**, **d**, **e** – квадратные матрицы одного и того же размера, содержащие коэффициенты разностного уравнения (8.1). Матрица **u** представляет собой квадратную матрицу, которая содержит значения искомой функции на границах области и начальные значения для поиска искомой функции внутри области. Опция **relax** ищет искомое решение итерационным методом, а параметр **r** является спектральным радиусом итерации Якоби. Этот параметр контролирует сходимость релаксационного алгоритма. Он принимает значение в интервале (0, 1), однако, его оптимальная величина зависит от конкретной задачи и может быть определена в зависимости от количества узлов n сетки из формулы $r = 1 - \frac{2\pi}{n}$. Однако на практике значение **r** обычно находится подбором. Этот параметр, как правило, имеет значение 0,95.

Пример 8.1. Найти распределение температуры $T(x,y)$ на тонкой квадратной пластине, рис. 8.1 [2]. Граничные условия, заданные на сторонах пластины, приведены в табл. 8.1.

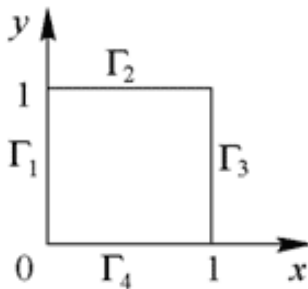


Рис. 8.1. Форма пластины

Таблица 8.1 – Задание граничных условий на сторонах пластины

		Верхняя сторона пластины			
		граничные условия $T(\Gamma_2) = 273 + 11\cos(\pi x/4)$ К			
Левая сторона пластины	граничные условия $T(\Gamma_1) = 273 + 67y^2$ К	Распределение температуры $T(x,y)$ на поверхности пластины описывается уравнением Лапласа $\Delta T = 0$		граничные условия $T(\Gamma_3) = 328 - 18y^2$ К	Правая сторона пластины
		граничные условия $T(\Gamma_4) = 380 - 20 \sin(\pi x/2)$ К			
		Нижняя сторона пластины			

Листинг программы решения уравнения Лапласа в *MathCad* приведен в Приложении 7.

8.2. Опция multigrid

Если на границах области решения поддерживаются нулевые граничные условия, более удобной является опция **multigrid** (M, n), где $M - 1 + 2^n$ – квадратная матрица, элементы которой равны функции источника в соответствующих точках *квадратной области*. Параметр n показывает число циклов на каждом уровне итерации опции multigrid. Обычно хорошее приближение к решению дает значение $n = 2$.

Рассмотрим пример решения стационарного уравнения теплопроводности с помощью опции multigrid. Решим численно двумерное уравнение Пуассона $\Delta T = -k$ с заданным расположением трех точечных источников тепла и нулевой температурой на краях пластины. При этом найдем стационарное распределение температуры T внутри пластины размером 32×32 м² содержится 3 точечных источника тепла: № 1 мощностью 25 кВт с координатами (24,8), № 2 мощностью -45 кВт с координатами (8,20) и № 3 мощностью -40 кВт с координатами (8,8). Один источник с положительной мощностью выделяет тепло, и в двух точках происходит локальный отток тепла. Листинг программы решения уравнения Пуассона с тремя источниками тепла в *MathCad* приведен в Приложении 8.

В Приложении 9 представлен листинг программы решения уравнения Пуассона с пятью источниками тепла в *MathCad*.

8.3. Опция Pdesolve

В качестве математической модели часто используется одномерное уравнение теплопроводности для тонкого стержня конечной длины. Такое уравнение, например, может быть использовано для описания процесса разогрева термоэмиссионного катода в газоразрядных приборах [3]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c \cdot \rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - k_1(T^4 - T_0^4) - k_2(T - T_0) + \frac{P_n}{S \cdot C \cdot \rho \cdot l}, \quad (8.2)$$

где T – температура катода; T_0 – температура окружающей среды; l, S – длина и площадь поперечного сечения стержня, соответственно; C – теплоемкость стержня; λ – коэффициент теплопроводности стержня; P_n – мощность нагрева; r – плотность материала стержня. Первый, второй и третий члены правой части уравнения связаны с тепловыми потерями за счет держателей катода, лучистого теплообмена и теплопроводности газа, соответственно, а четвертый член обусловлен мощностью нагрева.

Уравнение (8.2) принимает более простой вид, если пренебречь влиянием лучистого теплообмена и теплопроводности газа. В этом случае уравнение (8.2) имеет следующий вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \beta, \quad (8.3)$$

где $\alpha = \frac{\lambda}{c \cdot \rho}$ и $\beta = \frac{P_n}{S \cdot C \cdot \rho \cdot l}$.

Для решения дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа, а к нему относится и уравнение (8.2), в последних версиях *MathCad*, например, *MathCad 15*, имеется функция *Pdesolve*. Функция **Pdesolve**($u, x, xrange, t, trange, Nx, Nt$) включает следующие аргументы:

- u – имя функции $u(x, t)$, относительно которой решается уравнение. Для системы уравнений здесь должен быть вектор имен функций.
- x – имя пространственной переменной.
- $xrange$ – двухкомпонентный вектор, задающий начало и конец интервала изменения пространственной переменной.
- t – имя временной переменной.
- $trange$ – двухкомпонентный вектор. Этот вектор задает начало и конец временного интервала, на котором решается задача.
- Nx, Nt – количество точек, разбивающих для интегрирования пространственный и временной интервалы соответственно. Эти два параметра можно не указывать, тогда количество точек будет выбрано автоматически из соображений достаточной точности.

Варианты записи функции *Pdesolve*:

1. С вариантами разбивки пространственного и временного интервалов.

$Pdesolve\left(u, x, \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, t, \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}, Nx, Nt\right)$ – для решения одного уравнения:

$Pdesolve\left(\begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}, x, \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, t, \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}, Nx, Nt\right)$ – для решения системы из двух уравнений.

2. Без разбивки пространственного и временного интервалов:

$Pdesolve\left(u, x, \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, t, \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}\right)$ – для решения одного уравнения,

$Pdesolve\left(\begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}, x, \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, t, \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}\right)$ – для решения системы из двух уравнений.

Встроенная функция **Pdesolve** применяется в рамках вычислительного блока, начинающегося ключевым словом **Given**, и пригодна для решения различных гиперболических и параболических уравнений. Она предназначена для решения одномерного уравнения (или системы уравнений) в частных производных, с переменными по времени t и пространственной координате x . Опция **Pdesolve** имеет следующие особенности:

- уравнения в частных производных записывается с помощью булевских знаков равенства;
- все функции и производные должны определяться как функции двух переменных;
- в качестве граничных условий в точках 0 и L можно использовать как условия Дирихле, так и условия Неймана;
- для решения уравнения Пуассона или уравнения Лапласа данная опция непригодна (вместо нее следует использовать встроенные функции **multigrid** или **relax**);
- в качестве метода решения используется метод прямых;
- для решения систем дифференциальных уравнений в частных производных следует использовать опцию **numol**.

Для корректного использования функции **Pdesolve** предварительно, после ключевого слова **Given**, следует записать само уравнение и граничные условия при помощи логических операторов (панель «Булево»). Уравнение должно содержать имя неизвестной функции $u(x, t)$ вместе с именами аргументов. Для идентификации частных производных в пределах вычислительного блока следует использовать нижние индексы, например, $u_{xx}(x, t)$, для обозначения второй производной функции u по пространственной координате x .

Решение дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа с использованием функции **Pdesolve** состоит из следующих элементов:

1. Ключевое слово **given** – начало решения.

2. Уравнение, которое нужно решить должно быть записано в виде: $u_t(x, t) = f(x, t, u, u_x, u_{xx})$. Для ввода производных в данном случае нельзя использовать обычный оператор производной, а нужно пользоваться нижним индексом, как это обычно делается в литературе для записи уравнений в частных производных. При этом нижний индекс следует вводить не как элемент массива (клавиша $< [>$), а как текстовый нижний индекс (клавиша $< . >$). Для того чтобы ввести вторую производную от функции u по переменной x , следует набрать на клавиатуре: $u . x x$.

3. Граничные условия для функции $u(x, t)$. Если уравнение второго порядка по x , то и граничных условий должно быть два. Вы можете использовать как граничные условия Дирихле ($u(x_0, t) = w(t)$), так и граничные условия Неймана ($u_x(x_0, t) = w(t)$) или даже их комбинацию.

В Приложении 10 приведено решение одномерного уравнения теплопроводности (8.3) для тонкого металлического стержня конечной длины $L=1$ ед. длины в *MathCad*. Для построения трехмерного графика решения может быть использована опция **CreateMesh**($u, 0, L, 0, T, Nl, Nt$).

8.4. Опция numol

Для решения уравнений и систем *параболического* и *гиперболического* типов без создания группы решения (конечно, уравнения гиперболического типа должны быть приведены к системе уравнений первого порядка по времени) в *MathCAD* имеется встроенная функция **numol**. Решение задач с ее использованием осуществляется в таком порядке:

1. Строится векторная функция **pdef(x,t,u,ux,uxx)**. Эта функция является аналогом функции $D(x, y)$, которая используется при решении систем обычных дифференциальных уравнений (ОДУ). Количество элементов этого вектора равно сумме $npde + nprae$ ($npde$ – количество дифференциальных уравнений в частных производных, которые входят в систему, $nprae$ – количество алгебраических условий, связывающих между собой неизвестные функции). Первые $npde$ элементов вектора **pdef** задают правые части дифференциальных уравнений (подразумевается, что в левую часть уравнения перенесены производные по времени). Остальные элементы задают алгебраические уравнения, связывающие между собой неизвестные функции (в этих элементах подразумевается, что левая часть равна нулю).

2. Задаются начальные условия для неизвестных функций в виде векторной функции **init(x)**. Каждый элемент этого вектора должен содержать начальное условие для соответствующей функции.

3. Задаются граничные условия в виде матричной функции **bc(t)**. Эта матрица должна содержать три столбца и столько строк, сколько функций в системе. В первых двух столбцах этой матрицы задаются условия. Эти условия накладываются на ту или иную функцию в начальной и конечной точках отрезка интегрирования соответственно. Третий столбец определяет тип условий. Если для функции задаются условия Дирихле, то в третьем столбце соответствующей строки нужно ввести "D", а если условия Неймана – "N". Если в системе

отсутствует вторая производная от той или иной функции по пространственной переменной, тогда для нее нужно задавать только одно граничное условие, а вместо второго ввести "NA" (при этом в третьем столбце обязательно должно быть введено "D"). Если в системе, для функции отсутствуют производные по пространственной переменной, то граничные условия для нее не указывают, и соответствующая строка в матрице *bc* должна иметь вид: "NA", "NA", "D".

4. Для решения задачу вводим обозначения для **numol**:

sol := **numol**(**xend**, **xpts**, **tend**, **tpts**, **npde**, **npae**, **pdef**, **init**, **bc**), где еще не описанные аргументы встроенной функции:

- **xend** – двухкомпонентный вектор, элементы которого задают начало и конец пространственного отрезка интегрирования;
- **xpts** – количество точек, разбивающих пространственный интервал;
- **tend** – также двухкомпонентный вектор, но он задает границы временного интервала;
- **tpts** – количество точек, разбивающих временной интервал;
- **npde**, **npae** – эти числа задают количество уравнений и алгебраических условий в системе.

Результат решения системы уравнений с помощью функции **numol** представляется в виде матрицы, состоящей из **xpts** строк и **tpts**-(**npde** + **npae**) столбцов. Эта матрица объединяет несколько матриц размера **xpts** × **tpts**, каждая из которых содержит значения одной из неизвестных функций системы. Решение для любой функции может быть выделено из результата **numol** с помощью функции **submatrix**.

Заметим, что функция **numol**, не может быть использована для решения задач со смешанными граничными условиями, когда на одной границе интервала задается значение самой функции, а на другой – ее производной. Для решения подобных задач обычно применяется функция **Pdesolve**.

В Приложении 11 приведен пример решения волнового уравнения в *MathCad* с помощью встроенной функции **numol**.

Отметим, что функция **numol** имеет большее число аргументов, чем **Pdesolve**, благодаря чему позволяет автоматизировать применение метода сеток. Однако *пользоваться этой функцией намного сложнее*, чем вычислительным блоком. Это связано с тем, что уравнения и начальные и граничные условия должны быть записаны в специальном формате. Применение функции **numol** *оправданно* в том случае, когда необходимо включить решение уравнений в частных производных в более сложные вычисления в качестве подпрограммы, организовать серию расчетов с меняющимся параметром, подготовить анимацию графиков решения и т. п.

График решения параболических и гиперболических уравнений в частных производных с использование функции **numol** может быть оформлен в виде анимационного ролика, причем расчетное время следует выразить через константу **frame**, а затем применить команду **View / Animate (Вид / Анимация)**.

8.5. Решение задачи теплопроводности в Excel

Рассмотрим задачу для медного стержня длиной 10 см, на одном конце которого поддерживается температура 20 °С, а на другом 0 °С. Рассчитать изменение температуры в стержне со временем в Excel [4, 5]. Тепловыми потерями через боковую поверхность стержня пренебречь. Теплопередача энергии вдоль стержня описывается дифференциальным уравнением в частных производных в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (8.4)$$

Это уравнение в конечных разностях запишется в виде:

$$\frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta t} = \alpha \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2}, \quad (8.5)$$

где Δx – шаг сетки по пространству x , индекс i , а Δt – шаг сетки по времени, индекс j .

Разрешим это уравнение относительно температуры в будущий момент времени:

$$T_{i,j+1} = T_{i,j} + r(T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}), \quad (8.6)$$

где

$$r = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}. \quad (8.7)$$

Для обеспечения вычислительной устойчивости данного разностного уравнения коэффициент r при сумме температур не должен превышать 1/2:

$$r \leq \frac{1}{2}.$$

Если коэффициент $r = 1/2$, то разностное уравнение примет вид:

$$T_{i,j+1} = \frac{1}{2}(T_{i+1,j} + T_{i-1,j}). \quad (8.8)$$

Для медного стержня $\alpha = 1,155 \text{ см}^2 / \text{с}$. Тогда, получаем следующее соотношение между шагом сетки по времени Δt и по пространству Δx :

$$\Delta x^2 = 2,31 \cdot \Delta t. \quad (8.9)$$

Граничные условия задачи имеют вид:

$$T_{0,j} = 20^0 C \text{ при } x=0, T_{n,j} = 0^0 C \text{ при } x=20 \text{ см, } T(x) \Big|_{t=0} = 20^0 C. \quad (8.10)$$

Примем шаг по пространству 1 см, тогда шаг сетки по времени будет $\Delta t = 1/2,31 = 0,433 \text{ с}$. Заполнение электронной таблицы производим в таком порядке:

1. Делаем все надписи.
2. Делаем рамки.
3. Заносим в ячейки B6-L6 значения длины стержня с шагом 1 см.
4. Заносим в ячейки A7-A20 значения моментов времени с шагом 0,433 с.
5. Заносим в ячейку B7 граничное условие температуры 20^0 C и копируем его в ячейки B8-B20.
6. Заносим в ячейку L7 граничное условие температуры 0^0 C и копируем его в ячейки L8-L20.
7. Заносим в ячейку C7 значение температуры 0^0 C D7-K7.
8. В ячейку C8 вводим формулу $= 0,5*(B7+D7)$ и копируем ее в ячейки C8:K20.

После проделанных операций лист электронной таблицы имеет вид рис. 8.2.

Время, секунды	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,433	20	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,866	20	10	5	0	0	0	0	0	0	0	0
1,299	20	12,5	5	2,5	0	0	0	0	0	0	0
1,732	20	12,5	7,5	2,5	1,25	0	0	0	0	0	0
2,165	20	13,75	7,5	4,375	1,25	0,625	0	0	0	0	0
2,598	20	13,75	9,0625	4,375	2,5	0,625	0,3125	0	0	0	0
3,031	20	14,53125	9,0625	5,78125	2,5	1,40625	0,3125	0,15625	0	0	0
3,464	20	14,53125	10,15625	5,78125	3,59375	1,40625	0,78125	0,15625	0,078125	0	0
3,897	20	15,07813	10,15625	6,875	3,59375	2,1875	0,78125	0,429688	0,078125	0,039063	0
4,33	20	15,07813	10,97656	6,875	4,53125	2,1875	1,308594	0,429688	0,234375	0,039063	0
4,763	20	15,48828	10,97656	7,73906	4,53125	2,519322	1,308594	0,771484	0,234375	0,117188	0
5,196	20	15,48828	11,62109	7,73906	5,336914	2,519322	1,645703	0,771484	0,444336	0,117188	0
5,629	20	15,81055	11,62109	8,479004	5,336914	3,591309	1,645703	1,14502	0,444336	0,222168	0

Рис. 8.2. Теплопроводность в медном стержне. Решение в Excel

Контрольные вопросы

1. Какие функции в *MathCad* используются для решения уравнения Пуассона или Лапласа на области?
2. Какая должна быть форма области решения уравнения Пуассона или Лапласа, чтобы воспользоваться для из решения функциями **relax** и **multigrd** в *MathCad*?
3. Какой метод решения используется в функция **relax**?
4. Какой метод использует опция **relax** для поиска искомого решения?

5. В каких случаях при решении уравнений Пуассона или Лапласа более удобно применить опцию **multigrid** в *MathCad*?
6. Какой функцией следует воспользоваться при решении дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа в *MathCad*?
7. Какие аргументы включает функция **Pdesolve** в *MathCad* 15?
8. Укажите назначение аргументов функции **Pdesolve** при решении одномерного волнового уравнения.
9. Какие варианты записи функции **Pdesolve** Вы знаете?
10. Какие особенности имеет опция **Pdesolve** в *MathCad*?
11. Из каких элементов состоит решение дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа с использованием функции **Pdesolve**?
12. Какая встроенная функция в *MathCad* для решения уравнений и систем *параболического* и *гиперболического* типов?
13. Укажите назначение аргументов функции **numol** при решении одномерного волнового уравнения.
14. В каком порядке осуществляется решение в *MathCAD* при использовании функции **numol**?
15. Опишите метод численного решения одномерного волнового уравнения с использованием **solve block'a**.
16. Опишите метод численного решения одномерного волнового уравнения с использованием функции **numol**.
17. Какие особенности имеет решение задачи теплопроводности в Excel?
18. В каком порядке производится заполнение электронной таблицы при решении задачи теплопроводности в Excel?

ГЛАВА 9. МЕТОДЫ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

Под планированием эксперимента подразумевается выбор плана эксперимента, удовлетворяющего заданным требованиям, совокупность действий, направленных на разработку стратегии экспериментирования (от получения априорной информации до получения работоспособной математической модели или определения оптимальных условий).

9.1. Специальные приемы планирования эксперимента

Классическая теория планирования эксперимента представляет собой набор приемов составления матрицы дискретного эксперимента с конечным числом уровней факторов. В этом смысле планирование эксперимента с непрерывными значениями факторов принципиально невозможно и приходится искусственно вводить *дискретные* уровни. Если рассматриваемые факторы имеют вид простых измеримых параметров, то проблема состоит лишь в том, чтобы выбрать наименьшее число наиболее представительных значений в

качестве уровней. Куда более сложным представляется случай неизмеримых, качественных факторов [1]. Для их дискретизации необходимы неформальные процедуры, основанные на глубоком знании особенностей объекта. Приходится применять методы *ранжирования* и *экспертных оценок*.

1) Для многофакторных экспериментов большое число уровней может стать непреодолимым препятствием не только при планировании, но и при постановке отбора и обработке данных. Само по себе большое число факторов увеличивает лишь размерность задачи и усложняет ее трактовку. Хуже обстоит дело при многоуровневым факторами – план и эксперимент в этом случае теряют наглядность. Поэтому на практике стараются, прежде всего, уменьшить именно число уровней.

Конечно, это не является самоцелью. Объем эксперимента определяется выражением: $\prod_{j=1}^k h_j$, где k – число факторов, а h_j – число уровней каждого фактора. Если все факторы имеют одинаковое число уровней $h = h_j$, то объем эксперимента равен h^k . Проанализируем это выражение. При $h = 2$ увеличение k ведет к более слабому росту объема эксперимента, чем увеличение h . Поэтому при необходимости расширения двухуровневого эксперимента следует по возможности сохранить минимальное число уровней, может быть, даже за счет введения новых факторов. При $h = 3$ такая же ситуация наблюдается для $k \geq 4$, а при $h = 4$ – для $k \geq 7$. Т. е. при меньшем, чем указано количестве факторов выгоднее увеличивать на единицу число уровней, а не факторов. Иначе говоря, в каждом конкретном случае следует выбирать оптимальные значения k и h_j , исходя из особенностей объекта, а не только для минимизации объема эксперимента.

2) Еще одной серьезной проблемой при планировании эксперимента является выполнение требований дисперсионного анализа, особенно в части *независимости* исследуемых факторов (п. 6.3). На практике изучение сложных объектов обычно происходит в режиме пассивного наблюдения. При этом выбор изучаемых факторов часто бывает ограничен только теми, которые легко регистрировать. В этих условиях априори гарантировать независимость наблюдаемых параметров невозможно.

Решению этой проблемы помогает метод главных компонент, который позволяет выбрать исследуемые факторы на основе их *некоррелированности*. Поскольку для дисперсионного анализа непосредственное значение имеет именно отсутствие корреляции между исследуемыми параметрами, то последний факт можно использовать вместо громоздких и неформальных исследований их независимости. В конечном итоге можно даже удовлетвориться ненулевой, но относительно слабой корреляцией, оценку которой следует делать для каждой конкретной задачи отдельно.

Основная идея метода главных компонент состоит в замене переменных, характеризующих исследуемые факторы. Пусть исходная система из k

наблюдаемых входных факторов x_j ($j = 1, 2, \dots, k$) построена по итогам N наблюдений и представляется матрицей результатов эксперимента:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{N1} & x_{N2} & \dots & x_{Nk} \end{pmatrix},$$

в которой столбцами являются наблюдаемые значения входных факторов. (Нетрудно заметить тождественность этой матрицы с планом эксперимента – это и есть план, но пассивного эксперимента.) По этим данным можно рассчитать матрицу выборочных ковариаций (ковариационную матрицу), элементами которой являются:

$$l_{ij} = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{n=1}^N (x_{ni} - \bar{x}_i)(x_{nj} - \bar{x}_j),$$

и корреляционную матрицу $R = (r_{ij})$, составленную из выборочных оценок коэффициентов корреляции:

$$r_{ij} = \frac{1}{s_i s_j} \cdot \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{n=1}^N (x_{ni} - \bar{x}_i)(x_{nj} - \bar{x}_j),$$

где s_i – выборочная оценка среднего квадратического отклонения i -го фактора. Заметим, что диагональные элементы матрицы R равны единице, а сама матрица – симметричная:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1k} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{k1} & r_{k2} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Замена переменных:

$$z_i = \sum_{j=1}^k a_{ij} x_j,$$

подбирается таким образом, чтобы новые переменные z_i были некоррелированы. Для этого достаточно, чтобы матрица ковариаций новых переменных стала диагональной. Для того чтобы выбор шкал измерения факторов не привносил в расчеты своих масштабов, следует максимально унифицировать системы отсчета и нормировать переменные.

Математический метод решения такой задачи известен и реализуется с помощью стандартного программного обеспечения современных ЭВМ. Из уравнения $\det(R - vE) = 0$, где E – единичная матрица, находятся собственные значения матрицы R : $v_i = s^2(z_i)$, которые позволяют вычислить собственные векторы $\mathbf{a}_i$ той же матрицы из матричных уравнений $R\mathbf{a}_i = v_i\mathbf{a}_i$. В свою очередь, собственные векторы определяют матрицу искомого преобразования как матрицу, составленную из векторов $\mathbf{a}_i$ как столбцов: $A = (\mathbf{a}_{mi})$.

В процессе указанных математических преобразований могут встретиться затруднения в виде невозможности получения невырожденных решений некоторых матричных уравнений. Это будет свидетельствовать о неполноте исходного перечня факторов, их неустранимой зависимости или коррелированности. В этом случае представляются возможными два пути. Во-первых, расширение эксперимента и введение в рассмотрение дополнительных исходных факторов, из которых затем будут получены новые некоррелированные. А, во-вторых, без изменения исходной базы факторов подбор новых переменных со слабой (минимальной) корреляцией между собой. В этом случае приходится решать задачу оптимизации с громоздким критерием и множеством переменных. Однако принципиально такая задача разрешима.

После получения таким образом новых некоррелированных переменных дисперсионный анализ может быть проведен без каких-либо ограничений. По тем нескольким переменным, у которых дисперсия наибольшая, можно провести построение регрессионной модели. Но при применении этой модели могут встретиться трудности интерпретации новых переменных – некоррелированных факторов, которые определяются с помощью некоторых линейных комбинаций исходных. Иногда для обеспечения научно-технологического прорыва приходится ломать привычные стереотипы образного представления об изучаемом явлении и вводить новые понятия и факторы.

3) При планировании эксперимента немаловажное значение имеет удачный выбор факторов, который позволил бы уменьшить его объем. Задачу выбора наименьшего числа наиболее представительных (т. е., как мы теперь знаем, независимых – некоррелированных) факторов помогает решить факторный анализ. Если в методе главных компонент рассматривается простая замена k исходных факторов на k новых (аффинное преобразование типа поворота осей координат), то в факторном анализе количество новых факторов f_i ($i = 1, 2, \dots, m$) меньше количества исходных: $m < k$. Тогда исходные наблюдаемые факторы можно представить через новые в виде:

$$x_j = \sum_{i=1}^m l_{ji} f_i + \varepsilon_j, \quad j = 1, 2, \dots, k; \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

где ε_j – остаточная случайная поправка, действующая только на исходный, наблюдаемый фактор x_j , но не на новые f_i . Такое представление следует понимать, как предположение о наличии ненаблюдаемых, некоррелированных, «высших» факторов f_i , которые «объясняют» все наблюдаемые x_j (от которых

зависят все наблюдаемые). Т. е. можно сформулировать и решить задачу минимизации количества независимых (некоррелированных) факторов f_i .

На практике, однако, не решают такую сложную задачу оптимизации, а просто подбирают наиболее приемлемый набор «высших» факторов. Конечно, выбор здесь неоднозначен, поэтому пытаются отыскать наиболее легко интерпретируемые, комплексные факторы. Собственно *факторным анализом* и является такой поиск.

4) Существует еще один способ выявления наиболее значимых факторов изучаемого процесса – планирование отсеивающих экспериментов, состоящее в постепенном отсеивании несущественных факторов из первоначально выбранного большого их числа. Такое планирование можно осуществлять даже в условиях сверхнасыщенных планов, в которых число опытов меньше числа изучаемых факторов и, соответственно, числа коэффициентов регрессионной модели. Наиболее распространенным методом для этого является метод случайного баланса, в котором матрица плана с числом опытов N , меньшим числа факторов k , строится из случайных наборов уровней по столбцам. Можно строить матрицу и из случайного набора дробных реплик. При этом предполагается, что степень влияния факторов, расположенных в порядке убывания, представляется убывающей экспонентой. Задача отсеивающего эксперимента состоит в том, чтобы провести ранжирование всех факторов.

5) Из нескольких методических походов к планированию эксперимента для «хорошо организованных систем» рассмотрим задачу *уточнения* параметров модели, которую в теории математического моделирования называют задачей *идентификации* (п. 2.3). Примером такой задачи может служить уточнение характеристик летательного аппарата по результатам летных испытаний или расследование причин летных происшествий. В этих случаях считается априори известным аналитический вид функциональной зависимости выходного параметра от входных:

$$y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_k; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s) = \varphi(\mathbf{X}; \mathbf{\Lambda}),$$

где $\mathbf{\Lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$ – вектор параметров модели, для которых известны предварительные оценки их значений: $\mathbf{\Lambda}^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_s^{(0)})$. Задача формулируется так: необходимо подобрать план эксперимента из N опытов $\mathbf{X}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik})$, где $i = 1, 2, \dots, N$ чтобы по их результатам можно было бы уточнить параметры модели наилучшим образом. Под наилучшим здесь обычно понимают минимизацию обобщенной дисперсии оценок, т. е. критерий D-оптимальности.

9.2. Методы экспертных оценок

Методы экспертных оценок занимают в планировании эксперимента особое место благодаря тому, что их можно применять на любой стадии исследовательской работы и в самых разнообразных целях [2]. Здесь следует

упомянуть лишь самые распространенные вопросы, которые решаются с их помощью:

- формулировка постановки задачи исследований;
- выбор основных факторов;
- выбор наблюдаемых и регистрируемых параметров;
- структурирование сложных систем;
- ранжирование критериев и целей деятельности отдельных элементов сложных систем и т. д.

Группы экспертов (от 1 до 30 специалистов) создаются с учетом их квалификации по специально разработанным методикам.

Основным требованием всех методов экспертных оценок является строгая формулировка вопросов экспертизы, содержащих единообразно понимаемые и единичные (не распространенные или комплексные) темы.

Ниже приводится краткий обзор основных аспектов теории экспертных оценок.

Задачи экспертизы:

1. Оценивание имеющихся объектов по качественным и количественным характеристикам.
2. Построение множества объектов (составление списка).
3. Построение множества объектов и их оценивание.

Этапы экспертизы:

- формирование множества оцениваемых объектов;
- формирование экспертной комиссии;
- выбор процедуры экспертного оценивания (выбор метода);
- обработка результатов экспертного оценивания;
- анализ результатов экспертизы и принятие решения.

Классификация методов экспертизы:

- по количеству экспертов:
 - индивидуальные;
 - коллективные (следует учитывать, что при количестве экспертов менее 7 информация страдает неполнотой, а стабилизируются результаты экспертизы при 10–30 экспертах);
- по методу опроса (возможны сочетания методов):
 - индивидуальный;
 - очный (интервью) с обратной связью или без нее;
 - открытый (ответ в произвольной форме);
 - закрытый (ответ типа да/нет или выбор ответа из предложенного набора);
 - прямой (до экспертов доводится цель экспертизы);
 - косвенный (до экспертов не доводится цель экспертизы);
- по информированности экспертов:
 - с заданным множеством объектов оценивания;
 - с неопределенным множеством объектов оценивания;
- по организации процедуры:
 - простые;

- сложные (с декомпозицией проблемы на простые вопросы);
- по типу оценок:
 - качественные;
 - количественные.

Шкалы экспертных оценок:

- абсолютная шкала (измерение в принятых единицах) – позволяет получить самую тонкую количественную оценку;
- шкала отношений (измерение «во сколько раз») – дает относительную количественную оценку;
- шкала разностей (измерение в принятых единицах «на сколько» больше или меньше) – дает разностную количественную оценку;
- шкала интервалов (в принятых единицах выбор интервала, в котором находится оцениваемый параметр) – дает «мягкую» количественную оценку;
- шкала порядка (распределение по порядку без учета кратности предпочтения) – дает качественную оценку;
- номинальная шкала (разбиение на классы эквивалентности) – дает качественную оценку;
- балльная шкала (оценка в баллах по принятой размерности: непрерывно – от 0 до 1, или дискретно – целые от 0 до 5, или 10, или 100).

Процедуры экспертного оценивания альтернатив:

- ранжирование (наиболее предпочтительная оценка имеет ранг $R = 1$, остальные – бóльшие целые значения – ранг определяется последовательной нумерацией альтернатив в порядке убывания предпочтения);
- парное сравнение (построение матрицы парных сравнений элементов:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{– при } \alpha_i < \alpha_j, \\ 1 & \text{– при } \alpha_i \approx \alpha_j, \\ 2 & \text{– при } \alpha_i > \alpha_j, \end{cases}$$

где α_i – значение сравнимого признака i -го элемента);

- метод фон Неймана–Моргенштерна (матрица парных сравнений имеет непрерывные значения элементов $0 \leq \alpha_i \leq 1$);
- непосредственная оценка (дается балльная оценка (см. выше) каждой альтернативе, для эквивалентности используется одно общее значение);
- последовательное сравнение – метод Чёрчмена–Акофа – по рекуррентному алгоритму:
 - 1 – ранжирование альтернатив,
 - 2 – присвоение «1» первой альтернативе, остальным меньше 1,
 - 3 – сравнение предпочтительности первой альтернативы перед **всеми следующими вместе** и при необходимости увеличение (или уменьшение) оценки «1» до величины, большей (меньшей) суммы остальных,
 - 4 – повторение сравнения для второй и последующих альтернатив.

9.3. Методы проведения экспертизы (формы организации экспертизы)

Метод мозговой атаки (метод мозгового штурма) – коллективный открытый метод, при котором на поставленную цель экспертизы эксперты отвечают генерацией произвольных идей: без критики, без аргументации, может быть с развитием или с фантазией. Далее идеи лаконизируются; не соответствующие цели, отсеиваются; систематизируются; рассматриваются прямо противоположные; оценивается возможность реализации. В заключение, после отбора руководителями экспертизы нескольких идей, они могут подвергаться всей группой экспертов конструктивной критике по *конкретным* позициям: логичность, этичность, эстетичность, экологичность, социальность и т. п.

Метод дискуссии – коллективный открытый метод, при котором во время демократичного обсуждения заданной тематики происходит генерация идей, их формулировка и обобщение.

Метод комиссий – коллективный открытый метод, при котором предусматривается предварительный отбор состава экспертов и разбиение их на комиссии по направлениям, предоставление всей требуемой информации и в заключение коллегиальная оценка по принятой шкале.

Метод суда – метод, близкий к методу комиссий, но состав отбирается не административным образом, а с обеспечением противоположных мнений и интересов, и информация предполагается субъективной.

Метод деловых совещаний – коллективный открытый метод, при котором ведущий формулирует проблему, участники высказывают дополнительную информацию, альтернативы, идеи и оценки, а окончательный выбор решения или оценки делает и оглашает ведущий.

Анкетирование и интервьюирование – метод, который может быть любым по количеству экспертов и по методу опроса, предъявляет особые требования к лаконичности и однозначности вопросов и ответов, проводится в письменной или устной форме чаще всего независимым опросом экспертов.

Метод Дельфи – анонимное анкетирование в несколько этапов (2–3) с обратной связью, когда всем экспертам сообщаются результаты обработки (но не частные мнения) ответов предыдущего этапа с аргументацией крайних суждений.

Метод решающих матриц – предполагает декомпозицию сложной проблемы на несколько уровней, в которых возможны альтернативные решения, связанные с решениями на соседних уровнях; эксперты строят в конечном итоге матрицу оценок, сумма которых равна 1.

Метод прогнозного графа – многошаговый метод, предполагающий: составление списка целей, систематизацию их подчиненности, оценку возможности реализации подцелей и их уточнение (можно проводить другим составом экспертов), спуск по дереву целей до таких «заземленных», решение которых очевидно.

Очевидно, что перечисленные методы могут комбинироваться друг с другом.

9.4. Обработка результатов экспертизы

Обработка результатов экспертизы может быть проведена по следующей схеме, отдельные элементы которой могут не использоваться.

1) Показатели обобщенного мнения

1.1. Средняя балльная оценка $M_j = \frac{1}{m_j} \sum_{i=1}^{m_j} C_{ij}$, где m_j – число экспертов,

оценивших j -й вопрос, C_{ij} – оценка по балльной шкале $0 \leq C \leq B$ (где B наивысшая балльная оценка в принятой шкале), данная i -ым экспертом j -ому вопросу ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$).

1.2. Частота k -ой оценки j -го вопроса $K_j^k = \frac{m_j^k}{m_j}$.

1.3. Сумма рангов j -го вопроса $S_j = \sum_{i=1}^{m_j} R_{ij}$, где R_{ij} – ранг.

2) Показатели степени согласованности экспертов

2.1. Коэффициент вариации мнений по j -му вопросу $V_j = \frac{\sigma_j}{M_j}$, где

$$\sigma_j = \sqrt{\frac{1}{m_j - 1} \sum_{i=1}^{m_j} (C_{ij} - M_j)^2}; \text{ согласованность тем выше, чем меньше } V_j.$$

2.2. Коэффициент конкордации Кендалла (*примечание: коэффициент конкордации Кендалла – это некоторое число от 0 до 1, характеризующее степень согласованности мнений экспертов (в виде рангов) по совокупности*

$$\text{критериев.) } W = \frac{12}{m^2(n^3 - n) - m \sum_{i=1}^m T_i} \cdot \sum_{j=1}^n d_j^2, \quad \text{где} \quad d_j = S_j - \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n S_j;$$

$$T_i = \sum_{l=1}^L (t_l^2 - t_l), \quad t_l - \text{кратность } l\text{-го ранга; полная согласованность экспертов – при}$$

$W = 1$, согласованности нет при $W = 0$.

3) Статистическая значимость показателя согласованности W по критерию

$$\text{Пирсона: } \chi_n^2 = \frac{1}{mn(n+1) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m T_i} \cdot \sum_{j=1}^n d_j^2 \text{ с } n-1 \text{ степенями свободы.}$$

4) Коэффициент активности эксперта при ответе на j -ый вопрос:

$$K_{\Xi j} = \frac{m_j}{m}.$$

5) Учет компетентности экспертов может быть проведен с помощью следующих оценок.

5.1. Самооценка по балльной или шкальной системе таких объективных показателей, как уровень, широта и стаж специализации по вопросам экспертизы и смежным. Самооценка производится по специальным таблицам, не допускающим произвола и задающим каждому уровню фактора свою балльную оценку, например, по балльной шкале табл. 9.1 с вычислением коэффициента осведомленности $K_{oc} = B/10$.

Таблица 9.1 – Зависимость балльной самооценки от уровня фактора

Градация	Балл
не знаком с вопросом	0
плохо знаком, но вопрос входит в сферу знаний и деятельности	1, 2, 3
удовлетворительно знаком, тесно связан со смежной узкой специализацией	4, 5, 6
хорошо знаком, принимает практическое участие	7, 8, 9
вопрос входит в узкую специализацию	10

5.2. Самообъективная оценка вычисляется, как сумма оценок степени влияния всех видов источников информации по шкале табл. 9.2 (максимальное значение равно 1).

Таблица 9.2 – Зависимость оценки степени влияния от источников информации

Источники информации	Степень влияния источника		
	высокая	средняя	низкая
производственный опыт	0,5	0,4	0,2
проведенный теоретический анализ	0,3	0,2	0,1
обобщение отечественной литературы	0,05	0,04	0,03
обобщение зарубежной литературы	0,05	0,04	0,03
личное знакомство с состоянием вопроса за рубежом	0,05	0,04	0,03
интуиция	0,05	0,04	0,03

5.3. Коэффициент компетентности i -го эксперта ($i = 1, 2, \dots, m$) по j -ому вопросу ($j = 1, 2, \dots, n$) может быть вычислен по формуле:

$$k_{ij} = \frac{\sum_{v=1}^s \theta_{vi} R_{vj}}{\sum_{v=1}^s R_{vj}},$$

составляющие которой определяются следующей процедурой. Единым образом (руководителем, или каждым экспертом для себя, или взаимно) для каждого i -го эксперта определяются уровни осведомленности $0 < \theta_{vi} < 10$ (целые числа) по

каждой v -ой из s общепризнанных специализаций (дисциплин, сфер деятельности), к которым можно отнести все вопросы экспертизы. Каждый j -й вопрос экспертизы получает оценку R_{vj} ($0 \leq R_{vj} \leq 2$) по уровню важности для него каждой v -ой специализации с помощью двухбалльной непрерывной шкалы табл. 9.3.

Таблица 9.3 – Зависимость оценки от уровня важности специализации для вопроса

Уровень важности специализации для вопроса	Оценка
весьма существенно	2
полезно	1
несущественно	0

5.4. Исходная оценка на основе информации о предыдущих экспертизах и знании истины.

5.5. Взаимная оценка экспертов (исключая самооценку).

5.6. Мгновенная оценка по итогам данной экспертизы: $K_{ij} = 1 - \frac{|C_{ij} - M_j|}{B}$

– по j -ому вопросу i -го эксперта, $K_i = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n K_{ij}$ – по всем вопросам i -го эксперта.

5.7. Итоговая оценка на основании знания об истине: $\bar{K}_{ij} = 1 - \frac{|C_{ij} - \bar{M}_j|}{B}$,

где $\bar{M}_j$ – истинное значение балльной оценки.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение эксперимента.
2. Какие вопросы решает планирование эксперимента?
3. Как классифицируются эксперименты?
4. Дайте определение математической модели объекта исследования.
5. Что называют факторами, областью определения факторов?
6. Что называют функцией отклика и поверхностью отклика?
7. Назовите виды математических моделей.
8. Перечислите этапы проведения экспериментальных исследований.
9. Перечислите основные задачи эксперимента.
10. Дайте определение параметра оптимизации.
11. Перечислите требования, предъявляемые к параметру оптимизации.
12. Что называют обобщенным параметром оптимизации?
13. Назначение шкалы желательности.
14. Изобразите кривую желательности.
15. Требования, предъявляемые к факторам.
16. Что называют уровнями факторов и интервалом варьирования факторов?

17. Какие ограничения необходимо учитывать при выборе интервала варьирования?
18. Как зависит количество опытов в эксперименте от числа уровней факторов?
19. Дайте определение факторного пространства.

ГЛАВА 10. ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ЧИСЛА ФАКТОРОВ

При планировании эксперимента используются статистические методы, которые позволяют во многих случаях при минимальном числе опытов получать модели многофакторных процессов.

10.1. Планирование однофакторного эксперимента

В классической теории эксперимента рассматриваются планы, составленные с целью проведения дисперсионного анализа определенного вида. Поэтому естественно, что исходной посылкой служит цель исследования. Исходя из нее, формируется представление о виде предполагаемой математической модели явления, числе исследуемых факторов и их уровнях [1].

Простейшим в этом контексте следует считать *однофакторный эксперимент*, который призван установить факт зависимости результата эксперимента от значения исследуемого **единственного** фактора, т. е. влияние других факторов предполагается несущественным. Рассмотрим подробно последовательность действий для построения плана такого эксперимента на конкретном примере.

Пример 10.1. Исследование влияния срока хранения на качество ГСМ.

Подразумевается существование такого единственного измеримого параметра y , который характеризует качество ГСМ и который может зависеть от некоторых входных факторов X . Т. к. измерительная аппаратура имеет погрешность, то для исследования влияния срока хранения на параметр y необходимо производить многократные рандомизированные его замеры при различных сроках хранения, например, по n замеров в течение нескольких (m) месяцев. (Задавшись определенными требованиями к достоверности выводов, с помощью методик, рассмотренных в п. 7.3, можно определить необходимый объем эксперимента, т. е. значения n и m). Весь массив данных в таком случае удобно сформировать в виде (табл. 10.1) матрицы результатов эксперимента $Y = \{y_{ji}\}$, где $j = 1, 2, \dots, m$ – номер значения (уровня) исследуемого фактора (срока хранения – месяца), а $i = 1, 2, \dots, n$ – порядковый номер замера качества y (в течение каждого месяца). Таким образом, планируемый эксперимент оказывается многоуровневым – m -уровневым.

Таблица 10.1 – Матрица результатов эксперимента

№ замера (i)	Значения фактора – уровни (j)			
	1	2	...	m
1	y ₁₁	y ₂₁	...	y _{m1}
2	y ₁₂	y ₂₂	...	y _{m2}
...	...	...	...	...
n	y _{1n}	y _{2n}	...	y _{mn}
Средние по уровням	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_2$	...	$\bar{y}_m$

Для последующего дисперсионного анализа необходимо задать вид математической модели. Он определяется исследуемым явлением и той гипотезой, которая проверяется. Выдвинем гипотезу о том, что срок хранения T влияет на характеристику качества ГСМ y. Тогда естественно представить себе математическую модель для дисперсионного анализа (*дисперсионную модель*) исследуемого влияния в виде:

$$y_{ji} = \mu + T_j + \varepsilon_{ji},$$

где μ – математическое ожидание генерального значения параметра y за весь исследуемый срок, T_j – добавок к μ от влияния исследуемого фактора (срока хранения в течении j месяцев), ε_{ji} – нормально распределенная погрешность в каждом единичном опыте (i-ом замере в j-ом месяце).

В *унифицированном* виде, принятом в планировании эксперимента, матрица такого плана (табл. 10.2) содержит $n \times m$ строк, соответствующих единичным опытам.

Таблица 10.2 – Матрица однофакторного эксперимента

№ опыта	Уровни фактора	Результат замера
1	1	y ₁₁
2	1	y ₁₂
...	...	...
n	1	y _{1n}
n + 1	2	y ₂₁
...	...	...
m × n	m	y _{mn}

Этот план полностью *рандомизированного однофакторного многоуровневого эксперимента* позволяет произвести дисперсионный анализ и выявить влияние исследуемого единственного фактора. Для этого, как это принято в дисперсионном анализе, разбивают статистическую оценку общей дисперсии:

$$s^2 = \frac{1}{mn-1} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (y_{ji} - \bar{\bar{y}})^2,$$

где
$$\bar{\bar{y}} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \bar{y}_j, \quad \text{а} \quad \bar{y}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{ji},$$

на две части: *остаточную* – внутреннюю, отражающую разброс результатов единичных опытов вокруг средних по группам экспериментальных данных каждого месяца, обусловленную неконтролируемой погрешностью эксперимента:

$$s_0^2 = \frac{1}{m(n-1)} \cdot \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (y_{ji} - \bar{y}_j)^2,$$

и межгрупповую, отражающую разброс средних (месячных) экспериментальных данных между собой из-за влияния исследуемого фактора:

$$s_A^2 = \frac{n}{m-1} \sum_{j=1}^m (\bar{y}_j - \bar{\bar{y}})^2.$$

Далее оценку значимости фактора Т (зависимости качества ГСМ от срока хранения) получают с помощью критерия Фишера для сравнения двух дисперсий при уровне значимости α (строка 13 табл. 10). Если

$$\frac{s_A^2}{s_0^2} > F_{1-\alpha}[m-1, m(n-1)],$$

то значимое превышение s_A^2 над s_0^2 свидетельствует о значимости фактора Т, т. е. о существовании выраженной зависимости у от Т (качества ГСМ от срока хранения). В этом случае можно оценить дисперсию влияния исследуемого фактора величиной:

$$\frac{s_A^2 - s_0^2}{n}.$$

Если наоборот:
$$\frac{s_0^2}{s_A^2} > F_{1-\alpha}[m(n-1), m-1],$$

то s_A^2 значимо меньше s_0^2 , т.е. случайной погрешности эксперимента, поэтому влияние фактора Т на у несущественно и им можно пренебречь. В этом случае в качестве оценки погрешности (дисперсии) следует использовать выражение общей дисперсии s^2 , имеющей число степеней свободы большее, чем s_A^2 и s_0^2 . В случае, когда нельзя говорить о значимом превосходстве одной из дисперсий над другой, влияние исследуемого входного фактора сравнимо с погрешностью эксперимента или влиянием неучтенных факторов, поэтому конкретный вывод невозможен.

10.2. Планирование двухфакторного эксперимента

План двухфакторного эксперимента рассмотрим на примере задачи об испытаниях шин.

Пример 10.2. Пусть для испытания выделено 12 шин новой марки и 4 типа автомобиля: I, II, III, IV; а технические условия таковы, что перестановка колес во время испытания исключается.

В этом эксперименте предполагается наличие двух существенных факторов: T – автомобиль и S – место установки шины на автомобиле, распознаваемое по условным номерам: 1, 2, 3, 4. Таким образом, количество уровней каждого фактора оказывается равным 4. Легко видеть, что рассматриваемые факторы независимы, поэтому можно не исследовать третий фактор их совместного влияния. Математическая *дисперсионная модель* такого эксперимента может быть записана в виде:

$$y_{ij} = \mu + T_j + S_i + \varepsilon_{ij},$$

где y_{ij} – результат испытания шины на i -м месте j -го автомобиля; μ – средний ожидаемый результат (математическое ожидание); T_j – отклонение от μ , обусловленное влиянием типа автомобиля; S_i – отклонение от $\mu + T_j$, обусловленное влиянием места установки шины на автомобиле; ε_{ij} – нормально распределенная погрешность оценки результата эксперимента, обусловленная влиянием неучтенных факторов.

Естественное стремление поставить эксперимент наиболее полным образом для данного примера означает, что надо было бы испытать шины на каждом месте всех автомобилей. Т. е. провести полный факторный эксперимент, обеспечивающий всевозможные сочетания всех уровней и всех факторов, объемом %

$$\prod_{i=1}^k h_i = 4 \times 4 = 16$$

опытов, где $k = 2$ – число факторов, а $h_i = 4$ – число уровней каждого фактора. Наличие только 12 шин не позволяет построить полный план такого эксперимента. Как же следует разместить шины с наибольшей выгодой для наибольшей представительности результатов?

Если попытаться разместить шины, полностью укомплектовав первые 3 типа автомобилей, то последний окажется не у дел. В целях экономии средств это может быть и выгодно, но не позволит получить информацию об эксплуатационных свойствах шин на четвертом типе автомобиля. Однако с формальной точки зрения такой способ обладает существенным преимуществом перед другими – полнотой. Мы получаем *полный план двухфакторного эксперимента* для 3 уровней фактора типа автомобиля и 4 уровней фактора места расположения шин. В этом примере очевидно, что полнота плана без дополнительных усилий влечет за собой его сбалансированность –

симметричность распределения отдельных опытов в эксперименте, т. е. в нашем примере расположение шин на каждом из трех автомобилей симметрично. Кроме того, нет нужды заботиться о рандомизации – в рамках рассматриваемой задачи различие между шинами не исследуется, а сбалансированность полного плана ставит исследуемые факторы в равные условия.

Аналогичные рассуждения можно провести для размещения шин на трех определенных местах (например, за исключением 4-го) всех 4 автомобилей.

Эти неудачные попытки наводят на мысль о неизбежности построения *неполного* плана. Размещение 12 шин на 4 местах 4 автомобилей возможно только группами – *блоками* (сериями). Блоки можно рассматривать как по автомобилям, так и по местам расположения. В нашем примере блоки не могут быть *полными* – шины будут испытываться не на каждом месте каждого автомобиля: план эксперимента оказывается *неполноблочным*.

Стремление получить как можно более полную информацию подталкивает к построению *сбалансированных блоков*: на каждом автомобиле разместить по 3 шины так, чтобы любые два места расположения встречались одинаковое число раз. А рандомизацию исследуемых факторов можно обеспечить случайным распределением незанятых номеров мест между автомобилями или полным перебором таковых.

Таким образом, мы приходим к *неполноблочному сбалансированному плану двухфакторного четырехуровневого рандомизированного эксперимента*, изображенному в табл. 10.3. В ней номер строки (места) можно интерпретировать, как номер отдельного опыта для определения результата испытаний шин на данном месте установки.

Таблица 10.3 – Неполноблочный сбалансированный план двухфакторного четырехуровневого рандомизированного эксперимента

№ места (i)	№ автомобиля (j)				
	I	II	III	IV	
1.	+1	–1	+1	+1	S ₁
2.	–1	+1	+1	+1	S ₂
3.	+1	+1	+1	–1	S ₃
4.	+1	+1	–1	+1	S ₄
	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	μ

Аналогичные рассуждения допустимы и относительно номера столбца (автомобиля). Т. е. возникает множество возможностей изображать один и тот же план одного и того же эксперимента.

Исходным в нашем примере является представление об опыте, связанном с испытанием одной шины. Поэтому более естественным представляется изображение плана эксперимента в унифицированной форме, показанной в табл. 10.4. Матрица этого плана выглядит несколько непривычно для своего «названия», однако, она дает четкое изображение уровней всех исследуемых факторов для каждого опыта (т. е. где устанавливается каждая шина).

Таблица 10.4 – Матрица плана эксперимента в унифицированной форме

№ места (i)	№ автомобиля (j)			
	I	II	III	IV
1.	A	B	C	D
2.	D	A	B	C
3.	C	D	A	B
4.	B	C	D	A

10.3. Полный факторный эксперимент

Рассмотрим расширение примера предыдущего параграфа на случай трех факторов.

Пример 10.3. Для испытаний выделено по 4 шины 4 марок A, B, C, D и 4 типа автомобиля: I, II, III, IV. Перестановка колес во время испытаний исключается.

В этом эксперименте присутствуют 3 существенных фактора: T – тип автомобиля, S – место установки шины на автомобиле, распознаваемое по условным номерам: 1, 2, 3, 4, и Q – тип шины. Как и в предыдущем параграфе, количество уровней каждого фактора равно 4 и факторы независимы. Математическая *дисперсионная модель* такого эксперимента, не исследующего совместное влияние факторов, может быть записана в виде:

$$y_{ijm} = \mu + T_j + S_i + Q_m + \varepsilon_{ijm},$$

где y_{ijm} – результат испытания шины m-ой марки на i-м месте j-го автомобиля; Q_m – отклонение от $\mu + T_j + S_i$ (см. п. 7.5), обусловленное влиянием m-й марки шины; ε_{ijm} – погрешность эксперимента, обусловленная влиянием неучтенных факторов.

Полный факторный эксперимент в этом случае требует $4 \times 4 \times 4 = 64$ опыта, т. е. 64 шины. В нашем распоряжении их только 16, что позволяет полностью обеспечить ими все автомобили. Поэтому, несмотря на то, что весь план неполный, блоки в нем можно сделать полными и рандомизированными, т. е. установить на каждый автомобиль в случайном порядке все четыре типа шин. В таком случае составить сбалансированный рандомизированный план помогают *латинские квадраты*. Такой план в двух разных видах представлен в табл. 10.5 и 10.6.

Таблица 10.5 – Первый вид сбалансированного рандомизированного плана

№ опыта (шины)	Факторы	
	№ автомобиля	№ места
1	I	1
2	I	3
3	I	4
4	II	2

№ опыта (шины)	Факторы	
	№ автомобиля	№ места
5	II	3
6	II	4
7	III	1
8	III	2
9	III	3
10	IV	1
11	IV	2
12	IV	4

Таблица 10.6 – Второй вид сбалансированного рандомизированного плана

№ опыта (шины)	Факторы		
	№ автомобиля	№ места	№ марки шины
1	I	1	A
2	I	2	D
3	I	3	C
4	I	4	B
5	II	1	B
6	II	2	A
7	II	3	D
8	II	4	C
9	III	1	C
10	III	2	B
11	III	3	A
12	III	4	D
13	IV	1	D
14	IV	2	C
15	IV	3	B
16	IV	4	A

Как видно из рассмотренных примеров, образное представление многофакторных планов с числом уровней больше 2, весьма затруднено. Поэтому для изучения особенностей таких планов будем в дальнейшем рассматривать только *двухуровневые факторы*.

Для наглядности редуцируем рассмотренный пример трехфакторного четырехуровневого эксперимента к двум уровням по каждому фактору. Т. е. рассмотрим 2 типа шин A и B, 2 типа автомобилей I и II с 2 местами для испытания: 1 и 2. План в этом случае выглядит так, как показано в табл. 10.7. Этот же план в унифицированном виде представлен в табл. 10.8, где x_1 обозначает фактор T (тип автомобиля), x_2 – фактор S (место установки шины на

автомобиле), а $x_3 - Q$ (тип шины), +1 первые уровни всех факторов (1, I, A) и -1 – вторые уровни (2, II, B).

Таблица 10.7 – План эксперимента с двухуровневыми факторами

№ места (i)	№ автомобиля (j)	
	I	II
1.	A	B
2.	B	A

Не случайно план табл. 10.7 совпадает с планом в задаче о взвешивании. И тот и другой являются *сбалансированным полноблочным планом трехфакторного двухуровневого, полностью рандомизированного эксперимента* для дисперсионного анализа.

Нетрудно видеть, что план эксперимента табл. 10.7, обеспечивающий получение результатов y_1, y_2, y_3 и y_4 , предоставляет принципиальную возможность провести и другие виды статистического анализа: регрессионный и корреляционный. Прежде, чем перейти к обсуждению этой возможности, введем некоторые определения, характеризующие свойства плана.

Таблица 10.8 – План эксперимента с тремя факторами

№ опыта (i)	Факторы (j)			Результат опыта (i)
	x_0	x_1	x_2	
1.	+1	+1	+1	y_1
2.	+1	-1	-1	y_2
3.	-1	+1	-1	y_3
4.	-1	-1	+1	y_4

Обозначим элементы матрицы плана через x_{ij} . Тогда для столбцов $j = 1, 2, 3$ легко убедиться в следующем:

1) сумма элементов любого столбца равна нулю:

$$\sum_{i=1}^N x_{ij} = 0,$$

где N – число опытов; это свойство говорит о том, что *план симметричный*;

2) сумма квадратов элементов столбца (длина столбца) на единицу больше числа k факторов:

$$\sum_{i=1}^N x_{ij}^2 = k + 1,$$

– это условие нормировки, а $k + 1$ называется числом степеней свободы плана;

3) скалярное произведение любых двух различных столбцов плана равно нулю:

$$\sum_{i=1}^N x_{im}x_{in} = 0 \quad \text{при } m \neq n,$$

это свойство носит название ортогональности (оно приводит к независимости определения всех коэффициентов линейной регрессионной модели);

4) число опытов N совпадает с числом коэффициентов уравнения линейной регрессии $k + 1$ – в этом случае план называется насыщенным для выбранной линейной регрессионной модели. Действительно: по 4 результатам эксперимента можно определить все 4 коэффициента линейной по трем факторам регрессии исследуемого параметра y :

$$y = \lambda_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3.$$

Следует обратить внимание на то, что понятие насыщенности **связано** именно с линейной регрессионной математической моделью исследуемого явления.

В случае $N > k + 1$ план *ненасыщенный* – определение всех коэффициентов линейной регрессионной модели не исчерпывает собранную информацию, не использует все степени свободы плана. В этом случае кроме коэффициентов регрессии можно получить дополнительные статистические оценки, например, проверить гипотезу о равенстве нулю коэффициента регрессии совместного влияния пары факторов, или построить доверительные интервалы для коэффициентов регрессии, или провести параллельно дисперсионный анализ. При насыщенном плане это невозможно.

В случае $N < k + 1$ план *сверх насыщенный* и позволяет получить оценки только части коэффициентов линейной регрессии.

Заметим, что оценки для коэффициентов линейной регрессии $\tilde{\lambda}_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{ij} y_i$ получаются с дисперсией $\sigma^2 \{ \tilde{\lambda}_j \} = \frac{1}{N} \sigma^2 \{ y \}$, в N раз меньшей, чем

результат каждого опыта. Для определения $\tilde{\lambda}_0$ можно воспользоваться теми же соображениями, что и для других коэффициентов. Однако получающаяся формула свободного члена $\tilde{\lambda}_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$ нарушает единообразие. Поэтому

модернизируем план за счет дополнительного фиктивного фактора x_0 «прочих» влияний, которые всегда присутствуют, при всех опытах эксперимента. Новый вид плана представлен в табл. 10.9, где фигурной скобкой помечен собственно план. Симметричная матрица, представляющая этот план, в которой первый столбец, первая строка и главная диагональ состоят из $+1$, а все остальные элементы -1 , называется *матрицей Адамара*.

Таблица 10.9 – Сбалансированный полноблочный план трехфакторного двухуровневого, полностью рандомизированного эксперимента

№ опыта (i)	Факторы (j)				Результат опыта
	X ₀	X ₁	X ₂	X ₃	
1.	+1	+1	+1	+1	y ₁
2.	+1	+1	–1	–1	y ₂
3.	+1	–1	+1	–1	y ₃
4.	+1	–1	–1	+1	y ₄
		ПЛАН			

В заключение данного параграфа отметим, что составленный в табл. 10.4 *сбалансированный полноблочный план трехфакторного двухуровневого, полностью рандомизированного эксперимента* для дисперсионного анализа обладает свойствами симметричности, ортогональности и насыщенности для линейной регрессионной модели, для него также выполнено условие нормировки. Однако этот план не является полным, так как вместо

$$\prod_{j=1}^k h_j = 2^3 = 8$$

опытов содержит только 4. Но, несмотря на это, план позволяет провести линейный регрессионный анализ по всем трем факторам.

10.4. Неполные и неортогональные планы

В конце предыдущего параграфа было отмечено, что план эксперимента по табл. 10.9 неполный, хотя и позволяет построить линейную регрессионную модель, являясь для нее *насыщенным*.

Дополним его, для чего добавим всевозможные строки, в которых уровень +1 встречается дважды, и строку со всеми –1. В табл. 10.10 показан такой план.

Таблица 10.10 – Сбалансированный полноблочный план трехфакторного двухуровневого, полностью рандомизированного эксперимента с дополнением

№ опыта (i)	Факторы (j)				Результат опыта
	X ₀	X ₁	X ₂	X ₃	
5.	+1	+1	+1	+1	y ₁
6.	+1	+1	–1	–1	y ₂
7.	+1	–1	+1	–1	y ₃
8.	+1	–1	–1	+1	y ₄
9.	+1	+1	+1	–1	y ₅
10.	+1	+1	–1	+1	y ₆
11.	+1	–1	+1	+1	y ₇
12.	+1	–1	–1	–1	y ₈
		ПЛАН			

Вообще говоря, полный план можно составлять, руководствуясь следующим правилом, обеспечивающим полный перебор всевозможных комбинаций двух уровней основных факторов (кроме фиктивного x_0). В первом столбце знаки меняют через один. Во втором знаки встречаются парами, т. е. чередуются через 2. В третьем – четверками, чередуясь через 4. Далее, если необходимо – через следующие степени 2. Построенный по этому правилу полный план всегда обладает свойствами *симметричности* и *ортогональности*, что можно проверить непосредственно. Нетрудно видеть, что план табл. 10.9 соответствует этому правилу построения, если в нем изменить порядок строк (опытов) на следующий: 1, 7, 6, 4, 5, 3, 2, 8.

Новый план стал полным – его объем стал равняться $2^3 = 8$, чего мы и добивались, но теперь нарушилось свойство насыщенности для линейной регрессии. Для нее план стал *ненасыщенным*. Следовательно, есть возможность расширения регрессионной модели на столько членов, на сколько объем эксперимента (число опытов) N стал больше числа степеней свободы $k + 1$.

Контрольные вопросы

1. Планирование эксперимента, назначение. Свойства полного факторного эксперимента.
2. Составление матрицы планирования эксперимента. Свойства матрицы планирования.
3. Выбор верхнего и нижнего уровней факторов в эксперименте. Какие ограничения необходимо учитывать?
4. Для чего кодируются факторы при расчете коэффициентов уравнения регрессии?
5. Расчет параметров модели и оценка их значимости.
6. Оценка адекватности линейной модели.
7. Дробный факторный эксперимент и его назначение?
8. Понятия генерирующего соотношения и определяющего контракта, их назначение.
9. При отсутствии информации о взаимодействии факторов как выбирается реплика?
10. Если существует информация об эффектах взаимодействия, то как должна использоваться эта информация при выборе реплики.
11. При насыщенном планировании чему должна равняться статочная дисперсия модели $s_{ост}^2$. Для проверки какой гипотезы используется остаточная дисперсия?

ГЛАВА 11. МНОЖЕСТВЕННЫЙ РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

Регрессионный анализ предназначен для исследования зависимости исследуемой переменной от различных факторов и отображения их взаимосвязи в форме регрессионной модели.

11.1. Регрессионные модели

В регрессионных моделях зависимая (объясняемая) переменная Y может быть представлена в виде функции $f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_m)$, где $X_1, X_2, X_3, \dots, X_m$ – независимые (объясняющие) переменные, или факторы [1]. В качестве зависимой переменной может выступать практически любой показатель, характеризующий, например, функционирование сложной системы, деятельность предприятия или курс ценной бумаги. В зависимости от вида функции $f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_m)$ модели делятся на линейные и нелинейные. В зависимости от количества включенных в модель факторов X модели делятся на однофакторные (парная модель регрессии) и многофакторные (модель множественной регрессии).

Связь между переменной Y и m независимыми факторами можно охарактеризовать функцией регрессии $Y = f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_m)$, которая показывает, каково будет в среднем значение переменной Y , если переменные X_i примут конкретные значения.

Данное обстоятельство позволяет использовать модель регрессии не только для анализа, но и для прогнозирования процессов и результатов деятельности организаций.

Линейная модель множественной регрессии имеет вид:

$$Y_i = \alpha_0 + \alpha_1 X_{i1} + \alpha_2 X_{i2} + \dots + \alpha_m X_{im} + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (11.1)$$

Коэффициент регрессии α_j показывает, на какую величину в среднем изменится результативный признак Y , если переменную x_j увеличить на единицу измерения. Обычно предполагается, что случайная величина ε_i имеет нормальный закон распределения с математическим ожиданием равным нулю и с дисперсией σ^2 .

Анализ уравнения (11.1) и методика определения параметров становятся более наглядными, а расчетные процедуры существенно упрощаются, если воспользоваться матричной формой записи уравнения (11.1):

$$Y = X \alpha + \varepsilon, \quad (11.2)$$

где Y – вектор зависимой переменной размерности $n \times 1$, представляющий собой n наблюдений значений y_i ;

X – матрица n наблюдений независимых переменных $X_1, X_2, X_3, \dots, X_m$, размерность матрицы X равна $n \times (m+1)$;

α – подлежащий оцениванию вектор неизвестных параметров размерности $(m+1) \times 1$;

ε – вектор случайных отклонений размерности $n \times 1$.

Уравнение (11.1) содержит значения неизвестных параметров $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. Эти величины оцениваются на основе выборочных наблюдений, поэтому полученные расчетные показатели не являются истинными, а представляют собой лишь их статистические оценки. Модель линейной регрессии, в которой вместо истинных значений параметров подставлены их оценки (а именно такие регрессии и применяются на практике), имеет вид:

$$Y = Xa + e = \hat{Y} + e, \quad (11.3)$$

где a – вектор оценок параметров;

e – вектор «оцененных» отклонений регрессии, остатки регрессии $e = Y - Xa$;

$\hat{Y}$ – оценка значений Y , равная Xa .

Параметры модели множественной регрессии можно оценить с помощью метода наименьших квадратов. Формула для вычисления параметров регрессионного уравнения имеет вид:

$$a = (X^T X)^{-1} X^T Y \quad (11.4)$$

Одним из условий регрессионной модели является предположение о линейной независимости объясняющих переменных, т. е. решение задачи возможно лишь тогда, когда столбцы и строки матрицы исходных данных линейно независимы. Это условие выполняется не всегда. Линейная или близкая к ней связь между факторами называется *мультиколлинеарностью* и приводит к линейной зависимости нормальных уравнений, что делает вычисление параметров либо невозможным, либо затрудняет содержательную интерпретацию параметров модели.

Мультиколлинеарность может возникать в силу разных причин. Например, несколько независимых переменных могут иметь общий временной тренд, относительно которого они совершают малые колебания. Считают явление мультиколлинеарности в исходных данных установленным, если коэффициент парной корреляции между двумя переменными больше 0,8. Чтобы избавиться от мультиколлинеарности, в модель включают лишь один из линейно связанных между собой факторов, причем тот, который в большей степени связан с зависимой переменной.

11.2. Оценка качества модели регрессии

Качество модели регрессии оценивается по следующим направлениям:

- 1) проверка качества всего уравнения регрессии;
- 2) проверка значимости всего уравнения регрессии;
- 3) проверка статистической значимости коэффициентов уравнения регрессии;

4) проверка выполнения предпосылок МНК.

Для оценки качества модели множественной регрессии вычисляют коэффициент множественной корреляции (индекс корреляции) R и коэффициент детерминации R^2 :

$$R^2 = \frac{\text{объясняемая сумма квадратов}}{\text{общая сумма квадратов}} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}, \quad (11.5)$$

где y – фактическое значение зависимой переменной;

$\hat{y}$ – рассчитанное по уравнению регрессии значение зависимой переменной;

$\bar{y}$ – среднее арифметическое значение переменной y .

Чем ближе к единице значение этих характеристик, тем выше качество модели.

В многофакторной регрессии добавление дополнительных объясняющих переменных увеличивает коэффициент детерминации. Следовательно, коэффициент детерминации должен быть скорректирован с учетом числа независимых переменных. Скорректированный R^2 , или $\bar{R}^2$, рассчитывается так:

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{n-1}{n-k-1}, \quad (11.6)$$

где n – число наблюдений; k – число независимых переменных.

Проверка значимости модели регрессии

Для проверки значимости модели регрессии используется F -критерий Фишера, вычисляемый по формуле:

$$F = \frac{R^2/k}{(1-R^2)/(n-k-1)} \quad (11.7)$$

Если расчетное значение с $\nu_1 = k$ и $\nu_2 = (n - k - 1)$ степенями свободы, где k – количество факторов, включенных в модель, больше табличного при заданном уровне значимости, то модель считается значимой.

Анализ статистической значимости параметров модели

Значимость отдельных коэффициентов регрессии проверяется по t -статистике путем проверки гипотезы о равенстве нулю j -го параметра уравнения (кроме свободного члена):

$$t_{aj} = a_j / S_{aj}, \quad (11.8)$$

где S_{aj} – стандартное (среднеквадратическое) отклонение коэффициента уравнения регрессии a_j . Величина S_{aj} представляет собой квадратный корень из произведения несмещенной оценки дисперсии S_e^2 и j -го диагонального элемента матрицы, обратной матрице системы нормальных уравнений.

$$S_{aj} = S_{\varepsilon} \times \sqrt{b_{jj}}, \quad (11.9)$$

где b_{jj} – диагональный элемент матрицы $(X^T X)^{-1}$.

Если расчетное значение t -критерия с $(n - k - 1)$ степенями свободы превосходит табличное значение при заданном уровне значимости, коэффициент регрессии считается значимым. В противном случае фактор, соответствующий этому коэффициенту, следует исключить из модели, при этом оставшиеся в модели параметры должны быть пересчитаны.

Проверка выполнения предпосылок МНК

Проверка выполнения предпосылок МНК выполняется на основе анализа остаточной компоненты. Согласно общим предположениям регрессионного анализа, остатки должны вести себя как *независимые* (в действительности, почти независимые) одинаково распределенные *случайные* величины. В классических методах регрессионного анализа предполагается также *нормальный закон распределения остатков*.

Исследование остатков полезно начинать с изучения их графика. Он может показать наличие какой-то зависимости, не учтенной в модели. График остатков может также показать необходимость перехода к нелинейной модели (квадратичной, полиномиальной, экспоненциальной) или включения в модель периодических компонент.

График остатков показывает и резко отклоняющиеся от модели наблюдения – *выбросы*. Подобным аномальным наблюдениям надо уделять особо пристальное внимание, т. к. их присутствие может искажать значения оценок. Устранение выбросов может проводиться либо с помощью удаления этих точек из анализируемых данных (эта процедура называется *цензурированием*), либо с помощью применения методов оценивания параметров, устойчивых к подобным грубым отклонениям.

Независимость остатков можно проверить расчетом первого коэффициента автокорреляции:

$$r(1) = \left(\sum_{i=2}^n \varepsilon_i \varepsilon_{i-1} \right) / \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2. \quad (11.10)$$

Для принятия решения о наличии или отсутствии автокорреляции в исследуемом ряду фактическое значение коэффициента автокорреляции r (11.1) сопоставляется с критическим значением для 5 %-ного уровня значимости (вероятности допустить ошибку при принятии нулевой гипотезы о независимости уровней ряда). Если фактическое значение коэффициента автокорреляции меньше табличного, то гипотеза об отсутствии автокорреляции в ряду может быть принята, а если фактическое значение больше табличного – делают вывод о наличии автокорреляции в ряду динамики.

11.3. Обнаружение гетероскедастичности

Для обнаружения гетероскедастичности обычно используют три теста, в которых делаются различные предположения о зависимости между дисперсией случайного члена и объясняющей переменной: тест ранговой корреляции Спирмена, тест Голдфельда–Квандта и тест Глейзера [Доугерти].

При малом объеме выборки для оценки гетероскедастичности может использоваться метод Голдфельда–Квандта.

Данный тест используется для проверки такого типа гетероскедастичности, когда дисперсия остатков возрастает пропорционально квадрату фактора. При этом делается предположение, что, случайная составляющая ε распределена нормально.

Чтобы оценить нарушение гомоскедастичности по тесту Голдфельда–Квандта, необходимо выполнить следующие шаги:

1. Упорядочение n наблюдений по мере возрастания переменной x .
2. Разделение совокупности на две группы (соответственно с малыми и большими значениями фактора x) и определение по каждой из групп уравнений регрессии.
3. Определение остаточной суммы квадратов для первой регрессии

$$S_{1e} = \sum_{i=1}^{n_1} (y_i - \hat{y}_i)^2 \text{ и второй регрессии } S_{2e} = \sum_{i=n_1+1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

4. Вычисление отношений $\frac{S_{1e}}{S_{2e}}$ (или $\frac{S_{2e}}{S_{1e}}$). В числителе должна быть большая сумма квадратов.

Полученное отношение имеет F распределение со степенями свободы $k_1 = n_1 - m$ и $k_2 = n - n_1 - m$, (m – число оцениваемых параметров в уравнении регрессии).

Если $F_{\text{набл}} = \frac{S_{1e}}{S_{2e}}$, то гетероскедастичность имеет место, нарушена предпосылка о равенстве дисперсий остаточных величин.

Важную роль при оценке влияния факторов играют коэффициенты регрессионной модели. Однако непосредственно с их помощью нельзя сопоставить факторы по степени их влияния на зависимую переменную из-за различия единиц измерения и разной степени колеблемости. Для устранения таких различий при интерпретации применяются средние частные коэффициенты эластичности ε_j и бета-коэффициенты β_j , которые рассчитываются по формулам:

$$\hat{Y}_j = a_j \frac{x_j}{\bar{y}} \quad (11.11)$$

$$\beta_j = a_j \frac{S_{xj}}{S_y}, \quad (11.12)$$

где S_{xj} , S_y – среднее квадратическое отклонение соответственно фактора x_j и зависимой переменной y .

Коэффициент эластичности показывает, на сколько процентов изменяется зависимая переменная при изменении фактора x_j на один процент. Однако он не учитывает степень колеблемости факторов.

Бета-коэффициент показывает, на какую часть величины среднего квадратического отклонения S_y изменится зависимая переменная y с изменением соответствующей независимой переменной x_j на величину своего среднее квадратического отклонения при фиксированном на постоянном уровне значении остальных независимых переменных.

Указанные коэффициенты позволяют упорядочить факторы по степени их влияния на зависимую переменную.

Долю влияния фактора x_j в суммарном влиянии всех факторов можно оценить по величине *дельта-коэффициентов*:

$$\Delta_j = r_{yxj} \beta_j / R, \quad (11.13)$$

где $r_{y,xj}$ – коэффициент парной корреляции между фактором x_j ($j = 1, \dots, m$) и зависимой переменной y .

11.4. Прогнозирование поведения исследуемого объекта

Одна из важнейших целей моделирования заключается в *прогнозировании поведения исследуемого объекта*. При использовании построенной модели для прогнозирования делается предположение о сохранении в период прогнозирования существовавших ранее взаимосвязей переменных.

Для того чтобы определить область возможных значений результативного показателя, при рассчитанных значениях факторов следует учитывать два возможных источника ошибок: рассеивание наблюдений относительно линии регрессии и ошибки, обусловленные математическим аппаратом построения самой линии регрессии. Ошибки первого рода измеряются с помощью характеристик точности, в частности, величиной S_y . Ошибки второго рода обусловлены фиксацией численного значения коэффициентов регрессии, в то время как они в действительности являются случайными, нормально распределенными.

Различают два вида прогноза – точечный прогноз и интервальный прогноз. Точечный прогноз зависимой переменной $y_{пр}$ вычисляют с помощью уравнения регрессии подстановкой в него прогнозируемого значения факторных переменных. Интервальный прогноз зависимой переменной учитывает отклонения прогнозных значений от линии регрессии $y_{пр} \pm u$.

Для линейной модели регрессии доверительный интервал прогнозирования рассчитывается следующим образом:

$$u = S_{\varepsilon} t_{\alpha} \sqrt{V_{np}} = S_{\varepsilon} t_{\alpha} \cdot \sqrt{1 + X_{прогн}^T \cdot (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X_{прогн}}, \quad (11.14)$$

где $X_{пр}^m = (X_{1пр}, X_{2пр}, \dots, X_{kпр})$ – прогнозные значения факторных переменных.

Контрольные вопросы

1. Для чего может использоваться модель регрессии?
2. К чему приводит мультиколлинеарность факторных переменных при регрессионном анализе?
3. Что характеризуют коэффициенты регрессии?
4. Как оценивается значимость коэффициентов модели регрессии?
5. Как проверяется адекватность модели регрессии?
6. Что характеризует коэффициент детерминации?
7. По каким направлениям оценивается качество модели регрессии?
8. Как оценивается влияние отдельных факторов на зависимую переменную на основе модели?
9. Как проверяется выполнение предпосылок МНК?
10. Как прогнозируется поведение исследуемого объекта. Понятие точечного и интервального прогноза?
11. Какие этапы включает в себя нахождение регрессионной модели явления методом полного факторного эксперимента?
12. На основе чего производится проверка значимости коэффициентов регрессии, проверка адекватности регрессионной модели?

ГЛАВА 12. АППРОКСИМАЦИЯ, ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЙ

Методы компьютерного анализа и интерпретации данных экспериментальных наблюдений находят широкое применение в инженерной практике. Один из важнейших математических аппаратов, используемых при обработке экспериментальных данных, основан на теории аппроксимации (приближения) функциональных зависимостей. Общая концепция аппроксимации функции дает конкретные алгоритмы анализа данных в зависимости от выбранного вида приближающей зависимости и критерия, который определяет степень «близости» аппроксимирующей и аппроксимируемой функций.

12.1. Аналитическое описание экспериментальных данных формулой

Замена одних математических объектов другими в том или ином смысле близкими к исходным объектам называется *аппроксимацией* (приближением). Такая замена объекта позволяет исследовать числовые характеристики и качественные свойства объекта, сведя задачу к изучению более простых или

более удобных объектов. Такими объектами могут быть экспериментальные данные, сложные математические выражения и другое. Например, аппроксимация применяется в аналитической химии при построении градуировки методом наименьших квадратов. Суть метода заключается в поиске наиболее близкой к имеющимся экспериментальным точкам прямой, при этом получаемая прямая не обязательно должна проходить через все точки.

В математике есть разделы, которые полностью посвящены аппроксимации: приближение функции. Определение вида функциональной зависимости имеет свои определенные особенности. Табличные или графические данные могут быть представлены в виде $y = f(x)$, причем вид функции $f(x)$ может быть заранее неизвестен.

В этом случае задача обработки данных решается в два этапа:

1. Выбор функциональной зависимости (задача идентификации).
2. Оценка коэффициента выбранной функциональной зависимости (задача оценивания).

Применение компьютерных программ позволяет быстро решить задачу оценивания. В то время как решение задачи идентификации остается в общем виде нереализованным.

Известно несколько подходов, которые позволяют более или менее удовлетворить решенную задачу идентификации. Наиболее простой путь – визуальный, выбор модели в графическом виде в координатах XOY . Вероятность субъективного произвольного выбора в этом случае наиболее велика.

Различные исследования на основе одинаковых графиков могут привести к различным выводам в выборе типа адекватной модели. (*Примечание: адекватный – тождественный; вполне соответствующий, точно совпадающий, правильный*).

Другой путь идентификации известен из теории математической статистики и называется метод *последовательных разностей*. Метод заключается в получении разностей Δy или отношений $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ такой величины, пока они не станут примерно равными друг другу.

Например: Если $\Delta \lg \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = const$, то вероятна модель $y = a \cdot b^x$ или $\lg y = a + x \lg b$. Но в любом случае нельзя утверждать, что выбранная таким способом модель является наименьшим из всех возможных.

Когда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = const$, то модель (уравнение, завис.) $y = b + ax$.

К выбору формы кривой можно подойти иначе. Например, выбрать некоторые критерии и, основываясь на нем, произвести идентификацию данных. Обычно в качестве такого критерия принимают сумму квадратов отклонения исходных данных от расчетных по выбранной модели.

В некоторых случаях используют величину *max* абсолютного отклонения заданного значения функции от ее расчетного значения y . При решении задачи идентификации следует обратить внимание на то, что исходные экспериментальные данные подвержены случайным ошибкам, поэтому к выбору

функциональной зависимости следует отнестись осторожно, т. к. может получиться так, что связи между «х» и «у» нет.

12.2. Построение формул для описания экспериментальных данных

На практике обычно изучают влияние одного фактора на результат эксперимента «у». Перед построением функциональной аналитической зависимости $y = f(x)$ необходимо с помощью критерия математической статистики выявить, существует ли связь между «х» и «у». Т. е. необходимо проверить гипотезу о существовании связи между «х» и «у». Для проверки различных гипотез существуют ГОСТы. Мера зависимости между величинами характеризуется коэффициентом ковариации r_{xy} :

$$r_{xy} = \frac{C_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}},$$

$$D_x = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2\right) - (\bar{x})^2 \quad D_y = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2\right) - (\bar{y})^2 \quad C_{xy} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i\right) - \bar{x} \cdot \bar{y}.$$

Коэффициент ковариации может принимать значение от -1 до $+1$ ($-1 \leq r_{xy} \leq 1$):

– Если $r_{xy} = 0$, то X и Y независимые величины.

1. Если $|r_{xy}| \cdot \sqrt{n-1} > 3$, то связь между X и Y достаточно вероятна.

В *MathCad* коэффициент корреляции определяется несложно. Когда построены данные X и Y , то достаточно написать $r_{xy} =$.

После установления связи между X и Y переходят к построению функциональной аналитической зависимости $y = f(x)$. Построение формулы заключается в нахождении такого выражения, которое будучи составленным из простых, известных эмпирических формул или их комбинаций, могла с определенной точностью описать экспериментальные данные.

Обычно берут простые формулы, такие как:

1) $y = a \cdot x + b$;

2) $y = a \cdot b^x$;

3) $y = \frac{1}{a \cdot x + b}$, иррациональная дробь ;

4) $y = a \cdot \ln x + b$;

5) $y = a \cdot x^b$, $b = 0$ – линейная зависимость, $b = 2$ – парабола ,
 $b = 3$ – гипербола ;

6) $y = a + \frac{b}{x}$, гиперболическая зависимость;

7) $y = \frac{x}{a \cdot x + b}$, иррациональная дробь .

В среде *MathCad* выбор соответствующей аналитической зависимости по графику можно осуществить по-разному: субъективно из перечисленных выше зависимостей выбрать те, которые лучше отображают экспериментальные

данные. Строят график по этой зависимости, где параметры, входящие, a и b , отыскивают любым способом (подбирают). Лучше из выбранных зависимостей будет та, которая более достоверно отображает данные. Эта зависимость принимается за базовую аналитическую зависимость, в которой потом уточняют коэффициенты.

Нужно отметить, в разных областях научных исследований (механике, химии, биологии, экологии и т. д.) используют свои апробированные и проверенные в экспериментах виды аппроксимирующих функций, которые отвечают не только с достаточной точностью описывают полученные данные, но и отражают физическую сущность исследуемого явления.

12.3. Подбор параметров эмпирических формул

Когда выбран вид функций для аппроксимации экспериментальных данных, возникает следующая задача: необходимо найти параметры (коэффициенты), аппроксимирующие функцию любым способом, но результат должен быть таким, чтобы аппроксимирующая функция наилучшим образом описывала данные, среди известных методов выделяют следующие:

– Визуальный:

$a = 1; \quad b = 2; \quad c = 3$

$$y(x) = ax^2 + bx + c \qquad y = x^2 + 2x + 3$$

– средний (требует расчеты):

$$y(x) = ax^2 + bx + c \qquad \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta n}{n} = 0.01$$

– метод наименьших квадратов (расчетный).

Согласно этому методу, при определении коэффициентов аппроксимацией функции налагается условие следующего типа: что квадрат отклонения аппроксимируемых точек от экспериментальных должен быть минимальным.

Пусть функция $y = f(x, a_1, \dots, a_n)$, тогда сумма квадратов отклонений (разность) экспериментальных от теоретических будет следующим:

$$S = \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i, a_1, \dots, a_n)]^2,$$

где x_i – число из таблицы; a_1 – a_n – неизвестные коэффициенты

Чтобы функция S имела минимальное значение нужно, чтобы ее частная производная по неизвестным коэффициентам $a_1, \dots, a_n$ была равна 0:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial S}{\partial a_n} = 0 \end{array} \right.$$

В результате получаем систему алгоритмических уравнений, решая которую, находим неизвестные параметры (коэффициенты), аппроксимирующие функцию. При использовании этого метода в зависимости

от вида аппроксимации функции может получиться как линейная, так и нелинейная система алгоритмических уравнений.

Замечание! Вопрос о существовании решения системы и о существовании минимума функции решается в каждом случае отдельно.

Пример 12.1. Покажем, как по методу наименьших квадратов можно найти коэффициент для линейной и параболической зависимости вида $y = a \cdot x + b$

$$S = \sum_{i=1}^n [y_i - (a \cdot x_i + b)]^2.$$

Взяв частные производные по а и b, получим:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2 \cdot \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)] \cdot (-x_i) = 0 \\ 2 \cdot \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)] \cdot (-1) = 0 \end{cases}$$

В результате решения системы находим а и b.

1. $y = ax^2 + bx + c$, найти a, b, c

$$S = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]^2$$

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial c} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2 \cdot \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] \cdot (-x_i^2) = 0 \\ 2 \cdot \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] \cdot (-x_i) = 0 \\ 2 \cdot \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] \cdot (-1) = 0 \end{cases}$$

После преобразований получаем систему:

$$\begin{aligned} a \cdot \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^2 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot y_i \\ a \cdot \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \\ a \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i + c \sum_{i=1}^n x_i^0 &= \sum_{i=1}^n y_i \end{aligned}$$

Полученную систему решаем в матричном виде:

$$A = \begin{bmatrix} x_i^4 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \end{bmatrix} \quad X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad 3\text{-a, } 4\text{-b, } 5\text{-c}$$

Рассмотренная задача, т. е. определение коэффициента аппроксимации функции, может быть решена с меньшей трудоемкостью в *MathCad*, нежели в *Pascal*.

Пример 12.2. Найти коэффициенты аппроксимаций функции вида $y = ax + b$, с использованием *MathCad*:

Экспериментальные данные:

$$X := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.8 \\ 1 \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} 0.49 \\ 0.22 \\ 0.8 \\ 0.1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Коэффициенты a и b линейной аппроксимации:

$a := \text{slope}(x, y)$

$a = 1,336$

$b := \text{intercept}(x, y)$

$b = 0,08$

При решении задач аппроксимации в среде *MathCad* важное значение имеет вид выбранной функции. В зависимости от него в *MathCad* применяются соответствующие встроенные функции.

12.4. Нахождение коэффициентов аппроксимирующей функции, заданных в виде линейных произвольных функций

Линейная функция не во всех случаях подходит для описания зависимостей данных. Часто нужно искать зависимость в виде линейных комбинаций произвольных функций, ни одна из которых не является полиномом.

Общий вид линейной комбинации произвольных функций:

$$f(x) = a_0 \cdot f_0(x) + a_1 \cdot f_1(x) + \dots + a_n \cdot f_n(x),$$

где $a_0 \dots a_n$ – коэффициент, который нужно определить;

$f_0(x) \dots f_n(x)$ – выбранные функции.

Для определения коэффициентов такой функции в *MathCad* используется встроенная функция: $\text{linfit}(Vx, Vy, F)$, которая вычисляет коэффициент в соответствии с экспериментальными данными [1].

Пример 12.3. Найти коэффициенты аппроксимации функции $y = ax + bx^2 + \frac{c}{x+1}$ по экспериментальным данным.

Решение. Листинг программы по определению коэффициентов аппроксимации с помощью функции `linfit (Vx,Vy,F)` в *MathCad* приведен в Приложении 12.

В тех случаях, когда с помощью функции `linfit` не удастся найти коэффициент аппроксимации для функции заданной в более сложном виде, т. е. не в виде линейной комбинации, следует использовать встроенную функцию `genfit (Vx, Vy, Vg, F)`.

Примером такой сложной функции, у которой коэффициенты находятся с помощью функции `genfit`, может быть функция вида: $F(x) = 2\sin(a_1 \cdot x) + 3\operatorname{tg}(a_2 \cdot x)$

Пример 12.4. Найти аппроксимирующие коэффициенты u_0, u_1, u_2 функции $y = e^{u_0 + u_1 \cdot z + u_2 \cdot z^2}$, с помощью встроенной функции `genfit (Vx, Vy, Vg, F)` в *MathCad*.

Решение. Листинг программы по определению коэффициентов аппроксимации u_0, u_1, u_2 с помощью функции `genfit (Vx, Vy, Vg, F)` в *MathCad* приведен в Приложении 13.

12.5. Интерполяция

Под термином «интерполяция» (от лат. *Inter-polis* – «разглаженный, подновленный, обновленный; преобразованный») понимается нахождение промежуточных значений некоторой величины по известному дискретному набору ее значений по определенной методике. Термин «интерполяция» впервые употребил английский математик, один из предшественников создателей математического анализа. Джон Валлис в своем трактате «Арифметика бесконечных» (1656). В этом труде впервые появился «символ (или знак) бесконечности».

Набор значений исследуемой величины обычно получают в результате проведенного эксперимента. Часто бывает необходимо построить функцию, которая позволит предсказать получаемые значения исследуемой величины. Другими словами, необходимо доопределить функцию в промежутках между имеющимися дискретными значениями. Интерполяцию можно рассматривать как частный случай аппроксимации, при котором кривая построенной функции проходит точно только через имеющиеся точки данных.

Задача интерполяция функции решается путем построения некоторого аналитического выражения, которое совпадает со значениями, таблично заданной функции, в конечном числе табличных значений аргументов. Следовательно, задача интерполирования функции в некотором смысле обратная задачи табулирования функции: при табулировании от аналитического способа задания функции переходят к табличным, а при интерполировании – по табличным значениям функции строится некоторое аналитическое выражение,

т. е. формула, задающая искомую функцию приближенно. Величина ошибки интерполяции зависит от расположения узлов. Если узлы можно выбирать, то ситуация значительно улучшается. Можно минимизировать ошибку интерполяции.

Сформулируем задачу интерполирования: имеется таблично заданная функция $(X_i; Y_i)$. Требуется найти аналитическое выражение некоторой функции, которая приближала бы заданную функцию, т. е. в точке x_i , она бы принимала значение y_i . Геометрически это означает: некоторая кривая, проходит через данные табличные точки.

При решении задачи интерполирования искомая функция $p(x_i)$ выбирается из класса алгебраических многочленов, причем степень многочлена должна быть на единицу меньше числа точек x_i [2]. Интерполирование с помощью алгебраических многочленов называется параболическим интерполированием, а сам многочлен называется интерполяционным. Точки x_0 – x_n называются узлами интерполирования.

Задачи интерполяции часто возникают в инженерных и других практических приложениях. Допустим, что в результате экспериментальных измерений получена таблица значений некоторой функции. Требуется найти промежуточные значения этой функции, а также производные, определяющие скорость ее изменения. Это так называемая *задача о восстановлении функции*. Кроме того, при проведении расчетов сложные функции удобно заменять алгебраическими многочленами или другими элементарными функциями, которые достаточно просто вычисляются (*задача о приближении функции*). Интерполяцию используют для приближенного вычисления интегралов (*построение квадратурных формул*).

Заметим, что полученным интерполированным многочленом пользуются не только для приближения функции, но и в том случае, если функция задана в виде сложного аналитического выражения, которым не удобно пользоваться при расчетах, например, по данной функции находят производные и интегралы.

12.6. Линейное и квадратичное интерполирование

Рассмотрим простейшие случаи интерполирования многочленами первой и второй степени.

При $n = 1$:

$$P_1(x) = a_0x + a_1 \quad (12.1)$$

Пусть неизвестная функция задана в двух точках:

$$f(x_0) = y_0; \quad f(x_1) = y_1. \quad (12.2)$$

График функции (1) должен проходить через точки (2). Тогда неизвестные коэффициенты a_0 и a_1 найдем из системы уравнений:

$$\begin{cases} a_0x_0 + a_1 = y_0 \\ a_0x_1 + a_1 = y_1 \end{cases}$$

В результате решения получаем:

$$a_0 = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}; \quad a_1 = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{x_0 - x_1}$$

Тогда:

$$P_1(x) = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \cdot x + \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{x_0 - x_1} \quad (12.3)$$

После преобразований обычно (12.3) записывают в таком виде:

$$P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot y_1 \quad (12.4)$$

Следовательно, неизвестную функцию $f(x)$, заданную в 2-х точках можно приближенно представить выражением (12.4):

$$f(x) \approx P_1(x) \quad (12.5)$$

Уравнение (12.5) называется формулой линейного интерполирования. Линейной интерполяцией часто пользуются при работе с готовыми таблицами для отыскания значения функции в её промежуточных значениях аргумента, не содержащиеся в таблице.

Пример 12.5. Пусть $\sin 45^\circ 30' = 0,7133$, $\sin 45^\circ 40' = 0,7153$.

Найти $\sin 45^\circ 35' = ?$

Решение.

$$n = x_2 - x_1 = 10', \Delta x = x - x_1 = 45^\circ 35' - 45^\circ 30' = 5'.$$

$$\Delta y = y_2 - y_1 = 0,020, \Delta y = \frac{\Delta x}{n} \cdot y_1 = 0,010, \tilde{y} = y_1 + \frac{\Delta x}{n} \cdot \Delta y_1 = 0,7143.$$

$$\text{Получим } \sin 45^\circ 35' = 0,7143.$$

Отметим, что результат, полученный с помощью линейной интерполяции может считаться удовлетворительным, если значения функции, получаемые посредством интерполяции, будут иметь ту же точность, что и табличные данные. Это имеет место при малом шаге таблицы.

Для осуществления линейной интерполяции в среде *MathCad* используют встроенную функцию `linterp (Vx, Vy, X)`.

Эта функция предназначена только для интерполяции и не может быть использована для экстраполяции. В результате решение в *MathCad* получается ломанная линия.

Пример 12.6. Вычислить значения функции в точке 1,5, которой нет в таблице.

Решение приведено на рис. 12.1.

Вычисление значения функции в точке $x=2,3$, которой нет в таблице

$$V_x := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad V_y := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \\ 16 \\ 25 \end{pmatrix} \quad \text{linterp}(V_x, V_y, 2.3) = 5.5$$

+

Рис. 12.1. Листинг программы по определению значения функции в точке 1,5 с помощью функции `linterp (Vx, Vy, X)` в *MathCad*

Более точные результаты можно получить, если вместо линейной интерполяции воспользоваться квадратичной, т. е. дугу кривой между точками таблицы заменить не отрезком прямой, а параболой. В этом случае $n = 2$ и $P_2(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$

Если интерполирующая функция задана в трех точках.

$f(x_0) = y_0$; $f(x_1) = y_1$; $f(x_2) = y_2$, то для определения коэффициента интерполяции необходимо решить систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} a_0x_0^2 + a_1x_0 + a_2 = y_0 \\ a_0x_1^2 + a_1x_1 + a_2 = y_1 \\ a_0x_2^2 + a_1x_2 + a_2 = y_2 \end{cases}$$

Решение этой системы может быть произведено любым способом, лишь бы была достигнута, требуемая точность интерполяции.

12.7. Сплаины

Термин «*сплайн*» пришел в математику из машиностроения, где под ним понимается гибкая линейка, которую деформируют так, что по ней можно провести прямую через заданные точки. Металлическая линейка, будучи деформируемой таким образом, т. е. проложена между булавками, воткнутыми в чертеж, приобретает определенную форму, при которой запас энергии минимальный.

Используя теорию, при малых деформациях можно показать, что *сплайн* – это группа сопряженных кубических многочленов, места сопряжения которых 1, 2-я производная непрерывна. Чтобы построить кубический сплайн необходимо задать коэффициенты, которые единым образом определяют кубический многочлен в промежутке между данными точками. Например, в случае,

представленном на рис. 12.2, необходимо задать все кубические функции $q_1(x)$, $q_2(x)$, ..., $q_m(x)$. В наиболее общем случае эти многочлены имеют вид:

$$q_i(x) = K_i + K_{2i} + K_{3i} X^2 + K_{3i} X^3$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

$$K_i - \text{const}$$

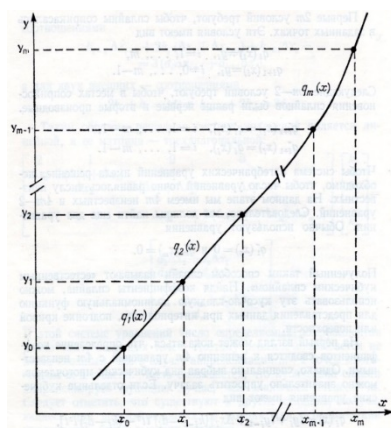


Рис. 12.2. Представление функциональной зависимости сплайнами

Определение коэффициентов сводится к решению $4m$ уравнений с $4m$ неизвестными. Данную задачу можно упростить, если использовать кубический сплайн. В результате получим линейную систему уравнений, которая решается обычными методами.

Часто оказывается, что кубический сплайн аппроксимирует функцию лучше, чем многочлен в степени « n ». Отметим, что существуют и другие виды сплайна, которые получаются при других условиях или при использовании многочленов более высокой степени.

В *MathCad* интерполирование может осуществляться линейными функциями, параболическими или кубическими сплайнами, при этом не нужно записывать вид функции [3]. Необходимо только воспользоваться определенными встроенными функциями.

Сплайн-интерполяция в *MathCad* реализуется несколько сложнее линейной. Перед применением функции *interp* необходимо предварительно определить первый из ее аргументов – векторную переменную s . Делается это при помощи одной из трех встроенных функций с использованием аргументов вектора данных (Vx , Vy):

- *ispline* (Vx , Vy) – вектор значений коэффициентов линейного сплайна,
- *pspline* (Vx , Vy) – вектор значений коэффициентов параболического сплайна,
- *cspline* (Vx , Vy) – вектор значений коэффициентов кубического сплайна.

Выбор конкретной функции сплайновых коэффициентов влияет на интерполяцию вблизи конечных точек интервала.

Пример 12.7. Требуется построить в *MathCad* интерполированные функции, с помощью линейного, параболического и кубического сплайнов по табличным данным, представленным в столбцах Vx и Vy . Найти первую и

вторую произвольные и сравнить с точным значением произвольной точки функции. Найти интегралы этих функций на отрезке $[-1; 4]$.

Решение примера сплайн-интерполяции в *MathCad* представлено в листинге в Приложении 14. Анализ решения показывает, что наилучшее приближение функции получается, когда в виде интерполированной функции используется кубический сплайн.

12.8. Функции сглаживания данных

Данные большинства экспериментов имеют случайность, поэтому часто возникает необходимость сглаживания данных, т. е. придерживаясь ряда критериев, некоторые данные выбросов не учитываются.

В *MathCad* имеется ряд функций, которые позволяют различными методами произвести сглаживание данных. В названии этих методов сглаживания $f(x)$ используется слово *smooth*:

- *medsmooth* (Vy, n) – сглаживание данных по методу скользящей медианы, где параметр « n » задает ширину окна сглаживания. Это число нечетное, меньшим, чем число элементов в Vy ,

- *ksmooth* (Vx, Vy, b), b – ширина окна сглаживания. Параметр b управляет окном сглаживания и должен быть установлен в несколько раз больше величины интервала между точками x .

- *supsmooth* (Vx, Vy) – сглаживание на основе метода наименьших квадратов. Элементы Vx должны быть расположены в порядке возрастания.

На рис. 12.3 показано применение функции *supsmooth* (Vx, Vy) для сглаживания экспериментальных данных, представленных в виде таблицы.

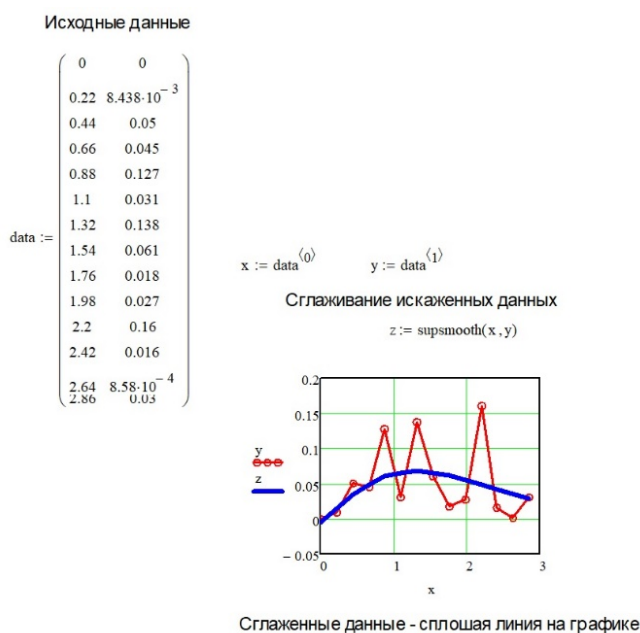


Рис. 12.3. Листинг программы сглаживания данных в *MathCad* с использованием функции *supsmooth*

Следует отметить, что любое применение метода наименьших квадратов тоже является «сглаживающей» процедурой. Этот метод используют в случае, когда применяется достаточно простая аналитическая формула для аппроксимации. Если эта формула оказывается сложной по своей структуре, и не возникает задача подбора для нее математического выражения, то лучше применять те или иные специальные сглаживающие процедуры в *MathCad*.

12.9. Экстраполяция

Под экстраполированием понимается продолжение функции за пределы ее области определения, при котором продолженная функция (как правило, аналитическая) принадлежит заданному классу. Термин «экстраполирование» происходит от лат. extra – сверх, вне и polio – приглаживаю, выправляю. Экстраполяция функций обычно производится с помощью формул, в которых используется информация о поведении функции в некотором конечном наборе точек (узлах интерполяции), принадлежащих ее области определения.

Понятие интерполирования функций употребляется в качестве противопоставления понятию экстраполяция функций (в узком смысле понимания этого термина), когда конструктивно восстанавливаются (быть может, приближенно) значения функций в областях их определения.

Пример 12.8. Если используется информация о значениях функции $f: [a, b] \rightarrow R$ в узлах $x_k \in [a, b], k = 0, 1, \dots, n$, то интерполяционный многочлен Лагранжа L_n , будучи определен на всей числовой оси, является, в частности, экстраполяции функции f вне отрезка $[a, b]$ в классе многочленов степени не выше n . Обычно, как и в рассмотренном примере, при экстраполяции функции используются ее значения не во всей области определения, а только в ее части, т. е. фактически производится экстраполяция значений сужения заданной функции на указанной части. В этом случае экстраполяционные формулы дают также значения (вообще говоря, приближенные) функции и в соответствующих точках ее области определения.

Экстраполирование бывает *вперед*, т. е. тогда функция продолжается за конечное ее решение или экстраполирование *назад*, когда функцию продолжения за начальную точку ее области определения. В *MathCad* для экстраполяции функций имеется встроенная функция *predict* [4].

Функция *predict* (data, m, n) возвращает n предсказанных значений, основанных на m последовательных значениях вектора данных data. Элементы в data должны представлять собой значения, взятые через равные интервалы. Функция *predict* использует последние m исходных значений данных, чтобы вычислить коэффициенты предсказания. Как только это сделано, она использует последние m точек, чтобы предсказать координаты $(m+1)$ -ой точки, фактически создавая скользящее окно шириной в m точек.

Функция *predict* обеспечивает высокую точность при монотонных функциях или функциях, представляемых полиномом высокой степени. Функция *predict* позволяет в странах со стабильной экономикой приемлемо описывать некоторые экономические явления.

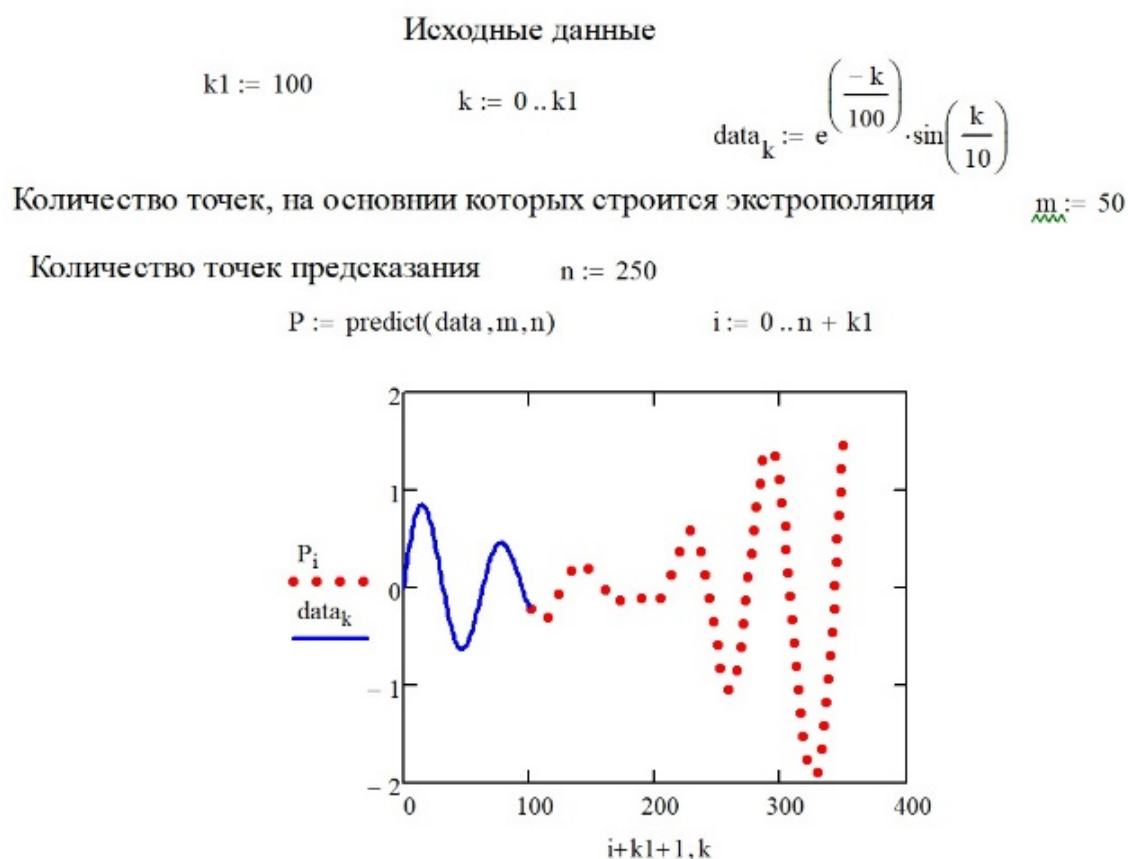


Рис. 12.4. Листинг программы экстраполяции данных при помощи функции предсказания *predict*

Как видно из рис. 12.4, функция предсказания может быть полезна при экстраполяции данных на небольшие расстояния. Вдали от исходных данных результат часто бывает неудовлетворительным. Кроме того, функция *predict* хорошо работает в задачах анализа подробных данных с четко прослеживающейся закономерностью, в основном осциллирующего характера. Если данных мало, то предсказание может оказаться бесполезным.

Контрольные вопросы

1. Какой оператор Mathcad выполняет линейную интерполяцию?
2. Какой оператор Mathcad выполняет кубическую интерполяцию?
3. Какой оператор Mathcad выполняет интерполяцию сплайнами?
4. В чем суть интерполяции?
5. Для какой функции применяют интерполяцию?
6. Каким образом можно улучшить интерполяционный многочлен?
7. Запишите вид интерполяционного многочлена.
8. От чего зависит ошибка интерполяции?
9. Что такое аппроксимация?

10. Какие виды аппроксимации вы знаете?
11. Запишите вид ошибки аппроксимации.
12. Какие условия должны выполняться при аппроксимации?
13. В чем суть линейной аппроксимации?
14. Что такое экстраполяция?
15. Какие функции используются экстраполяции в *Mathcad*?
16. Что значит экстраполяция вперед и назад?
17. Какой оператор *Mathcad* выполняет экстраполяцию?
18. Запишите систему уравнений по методу наименьших квадратов для двух параметрической модели.
19. Запишите вид кубического многочлена при сплайн-интерполяции.
20. Чему равны сплайны на концах отрезка?

ГЛАВА 13. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Решение некоторых теоретических и практических задач сводится к необходимости решить то или иное алгебраическое или трансцендентное уравнение. Выбор подходящего алгоритма решения таких уравнений зависит от характера рассматриваемой задачи.

13.1. О разрешимости алгебраических уравнений

В зависимости от того, какие функции входят в уравнение, уравнения делятся на два больших класса: линейные и нелинейные. Под линейными алгебраическими уравнениями понимают уравнения, которые содержат только постоянные коэффициенты и неизвестные в первой степени, а также отсутствуют члены, содержащие произведения неизвестных.

Нелинейные уравнения делятся, в свою очередь, на алгебраические и трансцендентные. Нелинейное алгебраическое уравнение содержит неизвестные во второй степени и выше. Если в это уравнение входят различные трансцендентные функции, то его называют нелинейным трансцендентным уравнением.

Для уравнений первой и второй степеней, как известно, существуют формулы вычисления корней. По этим формулам корни выражаются через коэффициенты посредством алгебраических действий. Для уравнений третьей и четвертой степеней также существуют формулы, но эти формулы довольно сложны. Что касается уравнений степени выше четвертой, то доказано, что корни таких уравнений вообще не могут быть выражены алгебраически через коэффициенты, поэтому общих формул для корней уравнений степени выше четвертой быть не может. Лишь в отдельных, частных случаях уравнения выше четвертой степени могут быть решены.

В настоящее время разработаны численные методы решения

алгебраических уравнений любой степени. Пользуясь численным методом, можно найти корни алгебраического уравнения с любой степенью точности. Численный метод является основным для решения уравнений высших степеней. В частности, уравнения третьей и четвертой степеней обычно также более удобно решать численным методом, чем алгебраическим.

Наиболее распространенными на практике численными методами решения алгебраических уравнений являются: метод половинного деления, метод касательных (Ньютона), метод секущих и другие [1].

13.2. Метод половинного деления

Данный метод состоит в следующем. Сначала вычисляются значения функции в точках, расположенных через равные интервалы на оси x . Это делается до тех пор, пока не будут найдены два последовательных значения функции $f(x_n)$ и $f(x_{n+1})$, имеющих противоположные знаки. Заметим, если функция непрерывна, то изменение знака указывает на существование корня. Далее по формулам:

$$x_{\text{ср}} = \frac{x_{n+1} + x_n}{2}$$

вычисляется среднее значение $x_{\text{ср}}$ в интервале значений $[x_n, x_{n+1}]$ и находится значение $f(x_{\text{ср}})$. Если знак $f(x_{\text{ср}})$ совпадает со знаком $f(x_n)$, то в дальнейшем вместо $f(x_n)$ используется $f(x_{\text{ср}})$. Если $f(x_{\text{ср}})$ имеет знак, противоположный $f(x_n)$, т. е. ее знак совпадает со знаком $f(x_{n+1})$, то на $f(x_{\text{ср}})$ заменяется это значение функции. В результате интервал, в котором заключено значение корня, сужается. Если $f(x_{\text{ср}})$ достаточно близко к нулю, процесс заканчивается, в противном случае процесс продолжается. Чаще применяется оценка сходимости по абсолютной величине разности двух последовательных приближений $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$.

Графический вид процедуры метода представлен на рис. 13.1. Хотя этот метод не обладает высокой вычислительной эффективностью, но с увеличением числа итераций он обеспечивает получение все более точного приближения значения корня. После того как впервые найден интервал, в котором заключен корень, его ширина после N убывает в 2^N раза.

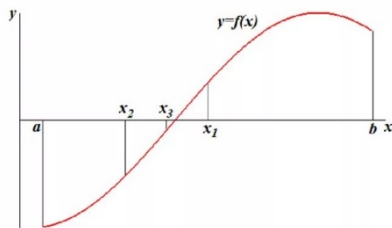


Рис. 13.1. Графический вид процедуры метода половинного деления

13.3. Метод Ньютона (метод касательных)

Этот метод очень широко используется при построении итерационных алгоритмов. Это связано с тем, что для определения интервала, в котором заключен корень, не требуется находить значение функции с противоположным знаком. В методе Ньютона вместо интерполяции по двум значениям осуществляется экстраполяция с помощью касательной к кривой в данной точке. В основе метода лежит разложение функции в ряд Тейлора:

$$f(x_{n+1} + h) = f(x_n) + h \cdot f'(x_n) + \frac{h^2}{2} \cdot f''(x_n) + \dots,$$

где один штрих над знаком функции обозначает первую производную по x , а два – вторую производную.

Для дальнейших вычислений используется приведенное выражение, в котором отброшены члены, содержащие h во второй степени и более высоких степеней. Предположим, что переход от x_n к x_{n+1} ($x_{n+1} = x_n + h$) приближает значение функции к нулю, таким образом, что $f(x_{n+1}) = 0$. Тогда:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Значение x_{n+1} соответствует точке, в которой касательная к кривой в точке x_n пересекает ось x . Так как кривая $f(x_n)$ отлична от прямой, то значение функции $f(x_{n+1})$ скорее всего не будет в точности равно нулю. Поэтому вся процедура повторяется, причем вместо x_n используется x_{n+1} . Счет прекращается по достижении достаточно малого значения $f(x_{n+1})$, рис. 13.2.

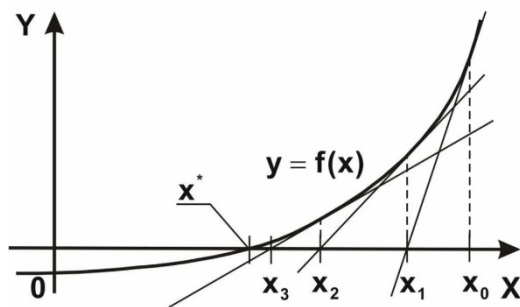


Рис. 13.2. Графический вид процедуры метода Ньютона

Быстрота сходимости метода Ньютона зависит в большой мере от удачного выбора исходной точки. При $f(x) = f'(x) = 0$ метод не обеспечивает сходимости. В случае бесконечно большого значения $f''(x)$ метод не эффективен.

13.4. Метод секущих

Одним из недостатков метода касательных является вычисление производной, особенно это не удобно, когда нахождение производной

затруднительно. В этом случае производную заменяют разностью последовательных значений функции, отнесенной к разности значений аргументов:

$$F'(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

Тогда получаем следующую итерационную формулу, использующуюся в методе секущих (метод хорд):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{F'(x_n)}.$$

В методе секущих, в сущности, для отыскания корня используется комбинация интерполяции и экстраполяции. Счет заканчивается тогда, когда последовательные значения x совпадают с некоторой приемлемой точностью или когда значение функции $f(x_n)$ становится достаточно близким к нулю, рис. 13.3.

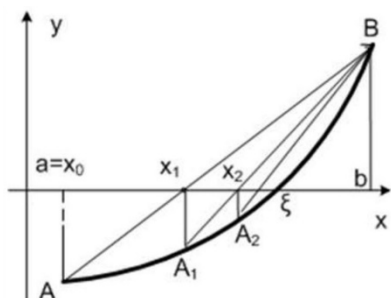


Рис. 13.3. Графический вид процедуры метода секущих (метод хорд)

Рассмотренный выше метод секущих (метод хорд) и метод касательных (каждый в отдельности) позволяют приблизиться к корню уравнения лишь с одной стороны: либо слева (приближение с недостатком), либо справа (приближение с избытком), причем всегда, если формула хорд дает приближение корня с недостатком, то формула касательных — с избытком, и наоборот. Одновременное применение этих двух методов на каждом шаге дает возможность искомым корень уравнения взять в вилку и не выпускать его из нее до достижения заданной точности.

13.5. Графический метод решения уравнений

Действительные корни уравнения можно определить графически как абсциссы точек пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью Ox , где $f(x)$ левая часть уравнения $f(x) = 0$. На практике бывает иногда более удобно заменить данное уравнение $f(x) = f_1(x) - f_2(x) = 0$ равносильным ему уравнением $f_1(x) = f_2(x)$. Построив графики функций $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$, найдем искомым корень уравнения как абсциссу точки пересечения этих графиков. Графическое решение уравнения можно рассматривать как первый этап общего решения уравнения, на котором определяется интервал изоляции корня. Второй этап решения уравнения подразумевает использование одного из численных методов для получения значения корня с заданной точности.

Контрольные вопросы

1. Дайте определения алгебраического и трансцендентного уравнений, линейного и нелинейного уравнений.
2. Что характерно для универсальных вычислительных алгоритмов приближенного решения уравнения? Что значит «отделить корень» и «уточнить корень»?
3. В чем заключается этап отделения корней при использовании численных методов решения уравнений?
4. Каким образом графическое отделение корней уточняется с помощью вычислений? Какие свойства функции одной переменной при этом используются?
5. Каким способом в схеме алгоритма половинного деления реализуется отбрасывание той половины отрезка, на которой строго монотонная функция не меняет знака, т. е. не имеет корня?
6. Перечислите различные методы решения уравнения с одной неизвестной. Дайте их краткую характеристику.
7. Какие предварительные исследования необходимо провести для уточнения корня уравнения методом хорд?
8. Составьте графическую схему и программу для уточнения корня уравнения методом хорд.
9. Сформулируйте правило для нахождения корня уравнения с заданной точностью методом касательных. Докажите сходимость метода касательных и получите оценку погрешности.
10. Сформулируйте правило применимости комбинированного метода хорд и касательных для вычисления корня уравнения с заданной точностью.
11. В чем преимущества комбинированного метода хорд и касательных перед методом как хорд, так и касательных.
12. Какое условие является критерием для достижения заданной точности ε при решении уравнения $x = f(x)$ методом простой итерации?

ГЛАВА 14. РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ В КОМПЬЮТЕРНЫХ СРЕДАХ

14.1. Решение нелинейного уравнения с помощью функции *root*

Для решения такого типа уравнений с одним неизвестным в *MathCad* используются специальные функции, например, $root(f(x), x, a, b)$ [1]. Аргументами этой функции являются выражение $f(x)$ и входящая в него переменная x , а также значения a , b концов интервала, в котором находится корень уравнения. Выражение $f(x)$ представляет собой левую часть заданного уравнения, которое преобразовано к виду $f(x) = 0$. В связи с этим, чтобы воспользоваться для решения уравнения функцией *root*, в начале необходимо заданное нелинейное уравнение записать в виде $f(x) = 0$. После этого построить

график функции $f(x)$ и посмотреть, сколько корней имеет уравнение. Другими словами, сколько имеется точек пересечения графика функции $f(x)$ с осью x , столько будет и корней в уравнении. Значения концов интервала, необходимо указывать таким образом, чтобы в нем находился только один корень уравнения, (рис. 14.1).

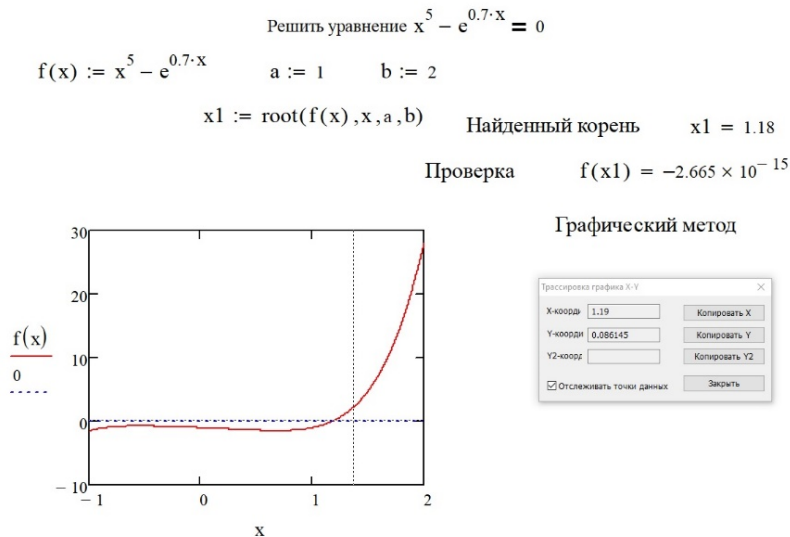


Рис. 14.1. Решение нелинейного уравнения в *MathCad* с помощью функции *root*

14.2. Решение нелинейного уравнения с параметром

Предположим, что необходимо решить алгебраическое уравнение при различных значениях, входящего в него некоторого параметра a . Рассмотрим пример решения уравнения $e^x = a \cdot x^2$ для нескольких различных значений параметра a . Самое простое решение такого типа уравнений состоит в определении функции:

$$f(a, x) := \text{root}(e^x - a \cdot x^2, x).$$

Для получения решения уравнения для конкретного значения параметра a поступают следующим образом. Присваивают значение параметру a и начальное значение переменной x как аргументам этой функции. Начальное приближение для каждого a есть корень, соответствующий предыдущему a . После этого находят искомое значение корня, вводя выражение $f(a, x) =$. На рис. 14.2 приведен пример использования функции *root* для нахождения корней исследуемого уравнения при различных значениях входящего в него параметра.

Решить уравнение с параметром $x^5 - a \cdot e^{0.7 \cdot x} = 0$

$$f(a, x) := x^5 - a \cdot e^{0.7 \cdot x} \quad g1(a, x) := \text{root}(f(a, x), x)$$

$$a := 1 \dots 6 \quad x_0 := 0 \quad x_a := g1(a, x_{a-1})$$

a =	x _a =
1	1.18
2	1.397
3	1.547
4	1.666
5	1.767
6	1.855

Рис. 14.2. Решение в *MathCad* нелинейного уравнения с параметром

14.3. Нахождение корней полинома

Напомним, что под полиномом понимают многочлен, состоящий из нескольких одночленов, соединенных между собой знаками сложения или вычитания. Для нахождения корней полинома вида:

$$a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

можно естественно воспользоваться функцией *root*, но лучше использовать имеющуюся в *MathCad* специально для этих целей функцию *polyroots*. В отличие от функции *root*, функция *polyroots* не требует начального приближения, помимо этого данная функция возвращает сразу все корни: как вещественные, так и комплексные. Пример нахождения корней полинома с помощью функции *polyroots* приведен на рис. 14.3.

При построении матрицы *v* следует обратить внимание на то, что матрица-столбец представляет собой коэффициенты со своими знаками при всех последовательно возрастающих показателях степеней полинома, если какая-то степень *x* отсутствует, то при ней коэффициент равен нулю. Например, на рис. 14.3, первый (верхний) элемент столбца матрицы *V* $a_{11} = 2$ и есть коэффициент полинома при x^0 , аналогично второй элемент $a_{21} = 0$, третий элемент $a_{31} = 3$, четвертый элемент $a_{41} = -10$ и пятый элемент $a_{51} = 1$. Количество корней полинома равно значению наибольшей степени *x*. В рассмотренном примере (рис. 14.3) наибольшая степень *x* равна 4 и корней тоже 4, два действительных корня и два комплексных корня. Для определения количества действительных корней полинома проще всего построить график этого полинома и посмотреть, сколько раз его график пересекает ось *Ox*.

$$\mathbf{V} := \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{polyroots}(\mathbf{V}) = \begin{pmatrix} -3.258 \\ 0.201 \\ 3.057 \end{pmatrix}$$

Контрольные вопросы

- ## ГЛАВА 15. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

15.1. Решение линейных систем уравнений

[illegible]

Как видно, каждый член уравнения системы содержит только одно неизвестное, и каждое неизвестное входит только в первой степени. Такая система уравнений называется *линейной*. Искомое решение системы уравнений представляет собой набор значений неизвестных, удовлетворяющих одновременно всем уравнениям. Если задана некоторая произвольная система уравнений, то без предварительного исследования нельзя сказать, имеет ли она какое-то решение, и, в случае, если решение существует, является ли оно единственным.

В матричной форме систему линейных уравнений можно записать в виде:

$$A \cdot X = B,$$

где A – заданная квадратная матрица порядка n , которая составлена из коэффициентов при неизвестных $A = \{a_{ij}\}, i \in 1:n, j \in 1:n$;

B – заданный вектор-столбец с n компонентами, составленный из свободных членов $B = \{b_i\}, i \in 1:n$, стоящих в правой части системы;

x – неизвестный вектор-столбец с n компонентами $X = \{x_i\}, i \in 1:n$.

Система линейных алгебраических уравнений имеет единственное решение, если $\det A \neq 0$. В случае, если же $\det A = 0$, то система несовместима или неопределенна. Решение системы линейных уравнений может быть получено несколькими способами, в частности, с помощью обратной матрицы, по формулам Крамера или обычной подстановкой.

Если в системе линейных уравнений $\det A = \Delta \neq 0$, другими словами, матрица A имеет обратную матрицу A^{-1} , то система имеет единственное решение, которое может быть записано в виде $X = A^{-1}B$. Это решение можно представить в покомпонентной записи (правило Крамера) в виде $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, где Δ_i – определитель полученный из определителя Δ заменой i -го столбца на столбец свободных членов (правых частей). В этом случае каждое неизвестное выписывается в виде частного двух определителей порядка n . Если элементы A рациональны, то неизвестные – тоже.

15.2. Решение системы линейных алгебраических уравнений в компьютерной среде

В *MathCad* системы линейных уравнений чаще всего решаются с помощью обратной матрицы или встроенной функция **lsolve** [1]. Для этих целей можно также применить блок **given-find**, но его использование в данном случае не рационально, так как в *MathCad* имеется специальная встроенная функция **lsolve (A, B)**, в которой A – квадратная матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных, а B – матрица-столбец, состоящая из свободных членов решаемой системы. При использовании встроенной функции **lsolve (A, B)** отпадает необходимость в задании начальных значений корней системы линейных уравнений, что очень удобно. На рис. 15.1 дан пример решения линейной

системы уравнений в *MathCad* с помощью специальной встроенной функции **solve (A, B)**.

В *Excel* решение системы линейных уравнений более громоздко, нежели в *MathCad*. Ко всему прочему, при решении требуется знание построения обратной матрицы. После построения матриц *A* и *B* необходимо построить обратную матрицу (функция **МОБР** (массив)), а потом ее умножить на матрицу *B* (функция **МУМНОЖ** (массив)). В результате умножения получится матрица-столбец из найденных корней.

$$\begin{aligned}
 &1,42x_1 + 2,3x_2 - 0,88x_3 + 0,53x_4 = 0,72 \\
 &0,71x_1 - 1,15x_2 + 0,53x_3 - 0,67x_4 = -0,18 \\
 &0,55x_1 - 0,93x_2 - 1,42x_3 + 1,32x_4 = 0,68 \\
 &0,44x_1 - 0,25x_2 + 1,92x_3 - 1,08x_4 = 0,43
 \end{aligned}$$

Рис. 15.1. Решение линейной системы алгебраических уравнений в *MathCad* с помощью специальной встроенной функции *lsolve* (*A*, *B*)

15.3. Решение системы нелинейных алгебраических уравнений

Для систем нелинейных уравнений, в отличие от систем линейных уравнений, не известны прямые методы решения. В связи с этим обычно используются итерационные методы. В наиболее общем случае систему нелинейных уравнений можно представить в виде:

[illegible]

Как видно, записанная система уравнений представляет собой n функций f_i от n неизвестных x_i . Задача состоит в нахождении решения такой системы. Наиболее распространенным методом решения систем нелинейных уравнений является метод Ньютона, который в сравнении с другими методами, дает гораздо быструю сходимость.

Метод Ньютона для решения систем нелинейных уравнений основывается на представлении всех n уравнений в виде ряда Тейлора:

уравнений, так и систем нелинейных алгебраических уравнений. Решение системы алгебраических уравнений осуществляется в следующей последовательности:

- Задаются начальные приближения всех неизвестных, входящих в систему. Это связано с тем, что для решения системы используются итерационные методы. На основе начальных приближений неизвестных строится последовательности, сходящиеся к искомому решению.

- Записывается ключевое слово **Given**. При написании этого слова можно использовать любой шрифт, прописные и строчные буквы.

- Ниже слова **Given** записывают в любом порядке уравнения системы. Между левыми и правыми частями уравнений ставится жирный символ “=”, взятый с панели инструментов **Boolean** или введенный комбинацией клавиш **[Ctrl]=**. Заметим, что между этими частями уравнений может стоять любой из символов $<$, $>$, $\leq$ и $\geq$.

- Записывается слово **Find** с неизвестными, например, **Find (x,y)**. Для написания этого слова можно использовать шрифт любого размера, произвольный стиль, прописные и строчные буквы. После этого ставится знак “=” с панели **Calculator** или клавиатуры. В результате появляется матрица-столбец, элементами которой являются значения корней данной системы уравнений.

- Если значения корней решаемой системы уравнений используются в дальнейших вычислениях, то **Find** следует переобозначить, например, $\begin{pmatrix} vx \\ vy \end{pmatrix} := Find(x, y)$. После этого решение получают после написания $vx=$ и $vy=$.

На рис. 15.2 представлен пример решения нелинейной системы алгебраических уравнений в *MathCad* с помощью блока *Given–Find*.

Начальные приближения корней	
$x1 := 1 \quad x2 := 1 \quad x3 := 1 \quad x4 := 1$	
Given	
$x1^{0.14} + x2^{0.3} + x3 + x4^{0.5} = 1.2$	
$x1^2 + x2 + x3^3 + x4^{0.5} = 21$	
$\ln(x1 \cdot x4) + x2 \cdot \cos(x3) + e^{x4+1} = 13$	
$x1 + x2 \cdot \ln(x4) + x4^2 = 11$	
$\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{pmatrix} := Find(x1, x2, x3, x4)$	Полученные корни решения
	$x1 = 6.302 \quad x2 = 3.809$
	$x3 = -2.877 \quad x4 = 1.662$

Рис. 15.2. Решение нелинейной системы алгебраических уравнений в *MathCad* с помощью блока *Given–Find*

Контрольные вопросы

1. Что значит решить систему уравнений?
2. Какие методы относятся к прямым и приближенным методам решения систем линейных алгебраических уравнений?
3. Какие вы знаете группы методов решения систем линейных алгебраических уравнений?
4. Перечислите известные вам методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Какие из них могут быть реализованы в пакете *Mathcad*?
5. Какие встроенные в *Mathcad* функции могут использоваться для решения систем уравнений?
6. Какие встроенные функции могут быть использованы для реализации метода Крамера?
7. Назовите функции для решения систем уравнений в *MathCad* и особенности их применения.
8. Опишите структуру блока решения уравнений.
9. Какой знак равенства используется в блоке решения?
10. Как решать матричные уравнения?
11. Опишите способы использования функции *Find*.
12. В каких случаях *MathCad* не может найти решение системы уравнений?
13. Каким образом графическое отделение корней уточняется с помощью вычислений?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленный в учебном пособии материал после его усвоения должен помочь студенту в выборе научно обоснованного подхода в решении поставленной научно-технической задачи. Перед ее решением необходимо сделать литературный обзор по теме данной проблемы. Это даст возможность после анализа научных источников информации представить подробную характеристику предмета и объекта исследования, степень их изученности в настоящее время. Понятие предмета и объекта позволяет раскрывать тему и выбрать модель исследования.

В учебном пособии отражены математические методы решения различных практических технических задач. Описывающие их математические модели представлены обыкновенными дифференциальными уравнениями и в частных производных. В их решении важную роль играют численные методы, т. к. область применения аналитических методов существенно уже. Для решения рассмотренных задач использованы такие программные продукты, как *MathCad* и *Excel*. Однако для решения более сложных задач возможностей встроенных функций *MathCad* может не хватить, т. к. они способны решать только определенный класс задач. В этом случае следует прибегнуть к программированию метода сеток в *MathCad* или другой среде, например, Бейсик, Паскаль или Питон.

Что касается решения дифференциальных уравнений в частных производных в *Excel*, то в этой среде могут быть решены в основном одномерные уравнения. Решение двух и трехмерных уравнений в этой среде вызывает большие трудности при программировании, что представляется нерациональным с практической точки зрения, т. к. программа получается довольно громоздкой и сложной.

В Приложении 15 для закрепления изученного материала приведены для самостоятельного решения варианты заданий, состоящие из 5 задач.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Глава 1

1. Пестриков, В. М. Математическое моделирование теплотехнических задач в программируемых средах [Текст]: учебное пособие / В. М. Пестриков; ГОУВПО СПбГТУРП. – СПб., 2009. – С. 4–5.
2. Юдович, В. И. Математические модели естественных наук [Текст]: лекции по курсу / В. И. Юдович. – Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2008. – 338 с.
3. Юдович, В. И. Математические модели естественных наук [Текст]: учебное пособие / В. И. Юдович. – Санкт-Петербург: Лань, 2011. – 336 с.
4. Ахмеров, Р. Р. Введение в математическое моделирование. [Электронный ресурс]. – URL: <http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/matmodel/index.html> (дата обращения: 17.04.2023).
5. Кусяков, А. Ш. Инструментальные средства инженерных расчетов и научных исследований / А. Ш. Кусяков // Гаудеамус. – 2012. – № 2 (20). – С. 220–221.
6. Пестриков, В. М., Морозов, Е. М. Механика разрушения [Текст]: курс лекций / В. М. Пестриков, Е. М. Морозов. – СПб.: Профессия, 2012. – С. 70–73.
7. Пестриков, В. М., Морозов, Е. М. Механика разрушения на базе компьютерных технологий [Текст]: практикум / В. М. Пестриков, Е. М. Морозов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 464 с.

Глава 2

1. Пестриков, В. М. Эволюция безламповых радиосистем передачи информации [Текст]: монография / В. М. Пестриков; Министерство культуры Российской Федерации, Санкт-Петербургский государственный институт кино и телевидения. – СПб.: СПбГИКиТ, 2019. – С. 15–16.
2. Helmholtz, H. Messungen über fortpflanzungsgeschwindigkeit der reizung in den nerven-zweite reihe. Arch Anat Physiol Wiss Med. 1852. S. 199–216.
3. Томсон, В. О преходящих электрических тока [Текст] / В. О. Томсон // Из предыстории радио: сб. оригинальных статей и материалов / сост. проф. С. М. Рытов; под ред. Л. И. Мандельштама. – М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1948. – С. 247–257.
4. Зарипов, Ш. Х. Введение в математическую экологию [Текст]: учебно-методическое пособие / Ш. Х. Зарипов. – Казань: Издательство Казанского федерального университета, 2010. – С. 15–19.
5. Darwin, Charles. Autobiography. Collins clear-type press: London and Glasgow. 1958. S. 120.
6. Браун, Дж. Чарльз Дарвин. Происхождение видов [Текст] / Дж. Браун; [пер. с англ. Ю. Сковпень]. – М.: АСТ, 2009. – 220 с. – (10 книг, изменивших мир).

7. Трубецков, Д. И. Феномен математической модели Лотки–Вольтерры и сходных с ней [Текст] / Д. И. Трубецков // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2011. – Т. 19. – № 2. – С. 70–72.

8. Вольтерра, В. Математическая теория борьбы за существование [Текст] / В. Вольтерра; [пер. с франц.]. – М.: Наука, 1976. – 288 с.

9. Базыкин, А. Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций [Текст] / А. Д. Базыкин. – Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 368 с.

10. Братусь, А. С., Новожилов, А. С., Платонов, А. П. Динамические системы и модели биологии [Текст] / А. С. Братусь, А. С. Новожилов, А. П. Платонов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 400 с.

11. Арнольд, В. И. «Жесткие» и «мягкие» модели [Текст] / В. И. Арнольд // Природа. – 1998. – № 4. – С. 3.

12. Арнольд, В. И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели [Текст] / В. И. Арнольд. – М.: МЦНМО, 2014. – С. 15.

Глава 3

1. Шуп, Т. Решение инженерных задач на ЭВМ [Текст]: практическое руководство / Т. Шуп; [пер. с англ.]. – М.: Мир, 1982. – С. 74–79.

Глава 4

1. Heaviside, O. Electromagnetic theory. London. The Electrician Company. Vol.1. 1893. 466 P.

2. Пестриков, В. М. Проблемы дальней телефонии на рубеже 19 и 20 веков и поиски их решения [Текст] / В. М. Пестриков // Инфокоммуникационные и радиоэлектронные технологии. – 2022. – Т. 5. – № 1. – С. 117–151.

Глава 5

1. Несис, Е. И. Методы математической физики [Текст]: учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / Е. И. Несис. – М.: Просвещение, 1977. – 121–124 с.

Глава 6

1. Кальницкий, Л. А., Добротин, Д. А., Жевержеев, В. Ф. Специальный курс высшей математики для вузов [Текст]: учеб. пособие / Л. А. Кальницкий, Д. А. Добротин, В. Ф. Жевержеев. – М.: Высшая школа, 1976. – 389 с.

2. Олейник, О. А. Роль теории дифференциальных уравнений в современной математике и ее приложениях [Текст] / О. А. Олейник. – М.: МГУ, 1996. [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.mmonline.ru/articles.php?mid=1367&topic=207> (дата обращения: 17.04.2023).

Глава 7

1. Боглаев, Ю. П. Вычислительная математика и программирование [Текст]: учеб. пособие для студентов вузов / Ю. П. Боглаев. – М.: Высшая школа, 1990. – 544 с.
2. Копченова, Н. В., Марон, И. А. Вычислительная математика в примерах и задачах [Текст] / Н. В. Копченова, И. А. Марон. – М.: Наука», 1972. – 367 с.
3. Семененко, М. Г. Математическое моделирование в MathCad [Текст] / М. Г. Семененко. – М.: Альтекс-А, 2003. – 208 с.

Глава 8

1. Кирьянов, Д. В. Mathcad 15/Mathcad Prime 1.0 [Текст] / Д. В. Кирьянов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2012. – С. 333–337.
2. Пестриков, В. М. Математическое моделирование теплотехнических задач в программируемых средах [Текст]: учебное пособие / В. М. Пестриков; ГОУВПО СПбГТУРП. – СПб., 2009. – С. 4–5.
3. Белова, И. К. Моделирование тепловых процессов идеального термокатода с использованием пакета прикладных программ MathCad [Текст] / И. К. Белова // Наука и инновации: инженерный журнал. – 2014. – Вып. 8. [Электронный ресурс]. – URL: <http://engjournal.ru/catalog/machin/energy/1276.html> (дата обращения: 17.04.2023).
4. Орвис, В. EXCEL для ученых, инженеров и студентов [Текст] / В. Орвис; [пер. с англ.]. – Киев: Юниор, 1999. – 528 с.
5. Ларсен, Р. У. Инженерные расчеты в Excel [Текст] / Р. У. Ларсен; [пер. с англ.]. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2002. – 544 с.

Глава 9

1. Мухачёв, В. А. Планирование и обработка результатов эксперимента [Текст]: учеб. пособие / В. А. Мухачёв. – Томск: ТГУСУиР, 2007. – 118 с.
2. Пестриков, В. М. Планирование и обработка результатов эксперимента [Текст]: учеб. пособие / В. М. Пестриков. – СПб.: СПбГИКиТ, 2018. – 85 с.

Глава 10

1. Налимов, В. В., Чернова, Н. А. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов [Текст] / В. В. Налимов, Н. А. Чернова. – М.: Наука, 1965. – 340 с.

Глава 11

1. Эконометрика [Текст]: учебник / под ред. И. И. Елисеевой. – 2-е изд.; перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2005. – 576 с.

Глава 12

1. Новиковский, Е. А. Работа в системе MathCad 15 [Текст] / Е. А. Новиковский. – Барнаул: АлтГТУ, 2013. – С. 81–84.
2. Шарый, С. П. Курс вычислительных методов [Текст] / С. П. Шарый. – Новосибирск: НГУ, 2022. – С. 58–88.
3. Павлова, Н. В. Расчеты в системе MathCAD 14. [Текст] / Н. В. Павлова. – Бийск: Изд-во Алт. гос. техн. ун-та, 2018. – С. 44–45.
4. Потапова, Н. Н., Забродина, О. М., Богомолова, О. А. Статистическая обработка данных в MathCAD [Текст] / Н. Н. Потапова, О. М. Забродина, О. А. Богомолова. – Волгоград: ВолгГАСУ, 2014. – С. 22–25.

Глава 13

1. Решение нелинейных уравнений [Текст]: методические указания к лабораторной работе / сост. Н. Н. Потапова, О. М. Забродина; М-во образования и науки Рос. Федерации, Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т. – Волгоград: ВолгГАСУ, 2013. [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.vgasu.ru/publishing/on-line/> (дата обращения 23.04.2023).

Глава 14

1. Полупанова, Т. И., Аверьянова, А. Н. Управление вычислениями в среде MathCad [Текст] / Т. И. Полупанова, А. Н. Аверьянова. – Екатеринбург: УрФУ, 2012. – С. 31–34. [Электронный ресурс]. – URL: https://study.urfu.ru/Aid/Publication/11785/1/Polupanova_Averianova.pdf (дата обращения 23.04.2023).

Глава 15

1. Осиновская, И. В. Численные методы решения алгебраических уравнений и их систем [Текст]: учеб. пособие / И. В. Осиновская, А. Г. Шляпугин, Я. А. Ерисов; Минобрнауки России, Самар, гос. аэрокосм, ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т). – Самара, 2012. [Электронный ресурс]. – URL: <http://repo.ssau.ru/bitstream/Uchebnye-posobiya/Chislennyye-metody-resheniya-algebraicheskikh-uravnenii-i-ih-sistem-Elektronnyi-resurs-elektron-ucheb-posobie-....pdf> (дата обращения 23.04.2023).

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Динамика численности выздоровевших особей по модели (2.15) $n = 300$, $a = 150$, $\beta = 0,01$, при двух коэффициентах выздоровления $\gamma_1 = 0,2$ и $\gamma_2 = 0,7$

$a := 150$ $n := 300$ $\beta := 0.01$ $\gamma_1 := 0.2$ $\gamma_2 := 0.7$ $z_0 := 0$ $t_1 := 0$ $t_2 := 1$

$$D1(t,z) := \gamma_1 \cdot \left(n + a - z - n \cdot e^{\frac{-\beta \cdot z}{\gamma_1}} \right)$$

$$D2(t,z) := \gamma_2 \cdot \left(n + a - z - n \cdot e^{\frac{-\beta \cdot z}{\gamma_2}} \right)$$

$G1 := \text{rkfixed}(z, t_1, t_2, 10, D1)$

$G2 := \text{rkfixed}(z, t_1, t_2, 10, D2)$

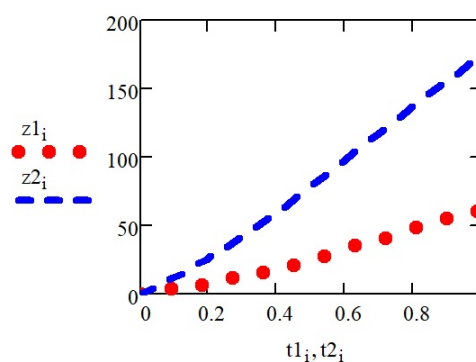
$z1 := G1^{(1)}$

$t1 := G1^{(0)}$

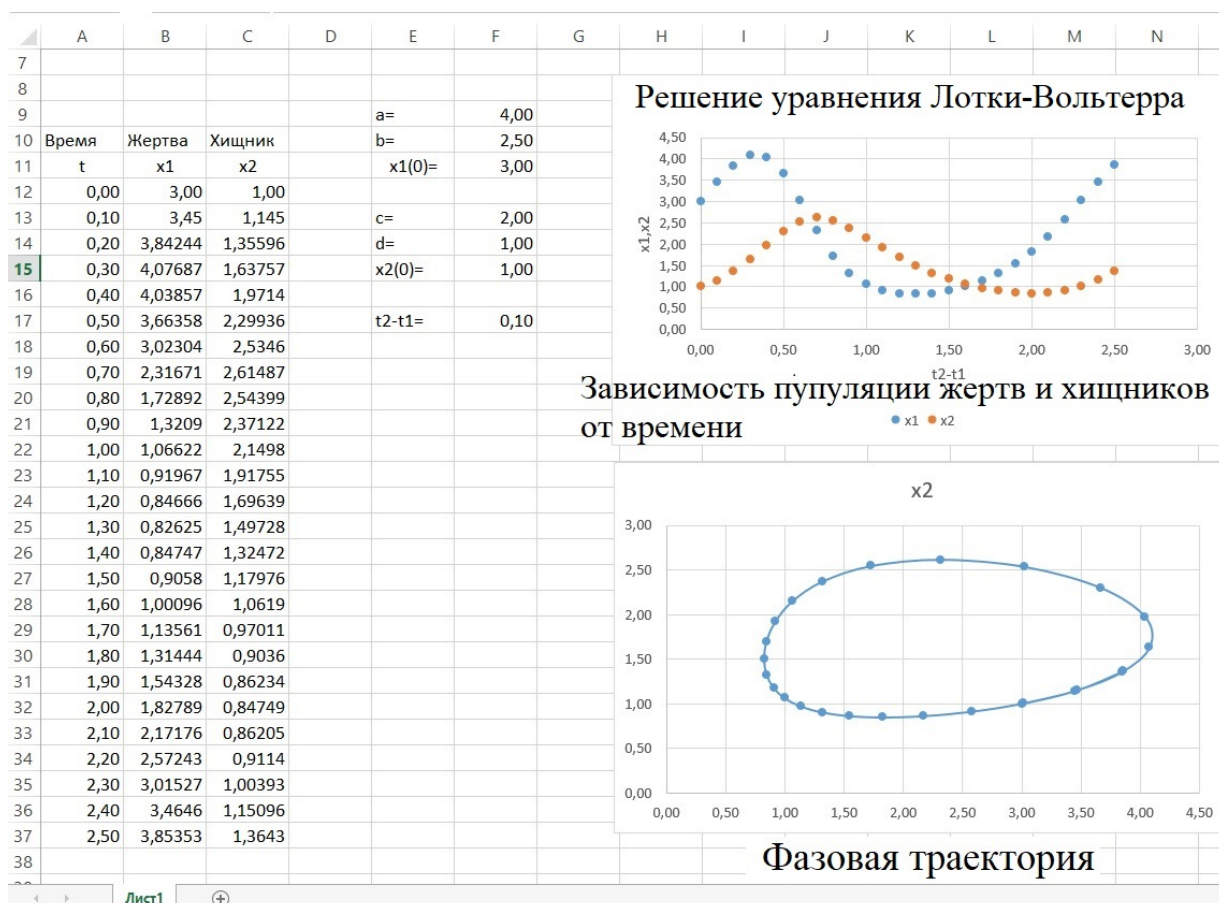
$i := 0..10$

$z2 := G2^{(1)}$

$t2 := G2^{(0)}$



Приложение 2



Клавиши для набора математических символов и операций

Математический символ или операция	Наименование клавиш на клавиатуре	Результат действия
Меню – Математика		
Создать матрицу или изменить размер имеющейся	[Ctrl] + [M]	Пиктограмма матрицы. Указать требуемое количество строк (rows) и столбцов (columns). Нажать ОК
Произвести пересчет или обновить результаты	[F9]	Пересчет
Поставить нижний индекс A_n	[	В указанном месте ставится требуемый нижний индекс
Поставить верхний индекс A^n	[Ctrl] + [6]	В указанном месте ставится требуемый верхний индекс
Транспонированная матрица A^T	[Ctrl] + 1	
Возвести в степень A^n	[Shift] + [^]	В указанном месте ставится требуемая степень
Взять выражение в скобки	[']	Слева и справа от выражения ставятся скобки
Деление или запись дроби	[/]	В указанном месте появляется дробь
Квадратный корень	[\]	В заданном месте ставится знак квадратного корня

Решить задачу Коши $y'=(1+xy)/(x^2x)$ при начальных условиях $y(1)=0$

$$y_0 := 0 \quad x1 := 1 \quad x2 := 2 \quad n := 10$$

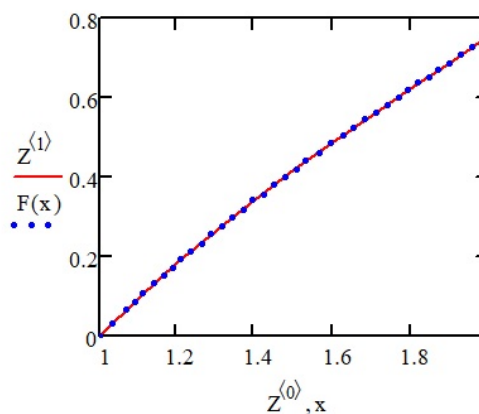
$$D(x, y) := \frac{(1 + x \cdot y)}{x^2}$$

Точное решение

$$F(x) := 0.5 \cdot \left(x - \frac{1}{x} \right)$$

$Z =$

	0	1
0	1	0
1	1.1	0.095
2	1.2	0.183
3	1.3	0.265
4	1.4	0.343
5	1.5	0.417
6	1.6	0.488
7	1.7	0.556
8	1.8	0.622
9	1.9	0.687
10	2	0.75



Решить уравнение $y''=y'+2y$ при начальных условиях $y(0)=1, y'(0)=3$

Задание начальных условий $y := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

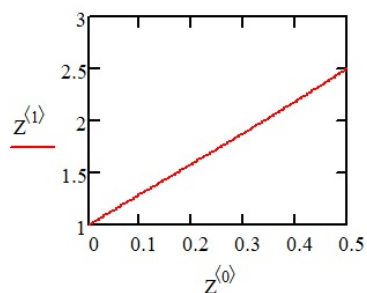
$$D(t, y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ -y_1 + 2 \cdot y_0 \end{pmatrix} \begin{matrix} < \text{Первая производная} \\ < \text{Вторая производная} \end{matrix}$$

$$Z := \text{rkfixed}(y, 0, 0.5, 400, D)$$

Решение в виде таблицы и графика

$Z =$

	0	1	2
0	0	1	3
1	$1.25 \cdot 10^{-3}$	1.004	2.999
2	$2.5 \cdot 10^{-3}$	1.007	2.998
3	$3.75 \cdot 10^{-3}$	1.011	2.996
4	$5 \cdot 10^{-3}$	1.015	2.995
5	$6.25 \cdot 10^{-3}$	1.019	2.994
6	$7.5 \cdot 10^{-3}$	1.022	2.993
7	$8.75 \cdot 10^{-3}$	1.026	2.992
8	0.01	1.03	2.99
9	0.011	1.034	2.989
10	0.013	1.037	2.988
11	0.014	1.041	2.987
12	0.015	1.045	2.986
13	0.016	1.049	2.985
14	0.018	1.052	2.984
15	0.019	1.056	...



Решение задачи Коши для жесткой системы дифференциальных уравнений с использованием функции Stiff в *MathCad*.

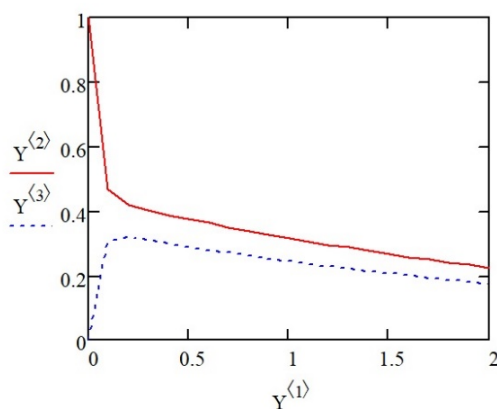
Найти на отрезке $[0;2]$
решение задачи Коши

$$\begin{cases} y_1' = -15y_1 + 19y_2, \\ y_2' = 9y_1 - 12y_2. \end{cases}$$

Начальные условия: $\begin{cases} y_1(0) = 1, \\ y_2(0) = 0. \end{cases}$

$$\underline{y} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad D(\underline{x}, \underline{y}) := \begin{pmatrix} -15 \cdot y_1 + 19 \cdot y_2 \\ 9 \cdot y_1 - 12 \cdot y_2 \end{pmatrix} \quad J(\underline{x}, \underline{y}) := \begin{pmatrix} 0 & -15 & 19 \\ 0 & 9 & -12 \end{pmatrix} +$$

$$Y := \text{Stiff}(\underline{y}, 0, 2, 20, D, J)$$



Y =

	1	2
1	0	1
2	0.1	0.467
3	0.2	0.417
4	0.3	0.401
5	0.4	0.387
6	0.5	0.374
7	0.6	0.362
8	0.7	0.35
9	0.8	0.338
10	0.9	...

Оператор Лапласа и лапласиан функции

Исходя из физических соображений, обоснуем необходимость введения сложного оператора div grad , который называют *оператором Лапласа*.

Согласно закону Фурье, тепловой поток q в середине массива пропорционален градиенту температуры:

$$\bar{q} = -k \text{grad} T, \quad (\text{П6.1})$$

где k – постоянный коэффициент теплопроводности.

Если теперь (П6.1) подставить в закон сохранения энергии в дифференциальной форме:

$$-\frac{\partial Q}{\partial t} = \text{div} \bar{q}, \quad (\text{П6.2})$$

то получим:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = k \text{div grad} T, \quad (\text{П6.3})$$

где Q – плотность тепловой энергии, а знак минус в (П6.2) указывает на уменьшение тепловой энергии во всем объеме V ;

$\bar{q}$ – мощность теплового потока.

Уравнение (П6.3) как раз и показывает необходимость введения оператора Лапласа div grad и соответствующего ему лапласиана функции. Пусть в пространстве существует скалярное поле $f(x, y, z)$. *Лапласианом* функции f называют выражение $\text{div grad} f$, которое обычно обозначают Δf (читается «лапласиан f »):

$$\Delta f \equiv \text{div grad} f. \quad (\text{П6.4})$$

В декартовых координатах это выражение запишется в виде:

$$\Delta f \equiv \frac{\partial}{\partial x}(\text{grad}_x f) + \frac{\partial}{\partial y}(\text{grad}_y f) + \frac{\partial}{\partial z}(\text{grad}_z f)$$

или

$$\Delta f \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

Окончательно имеем:

$$\Delta f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \quad (\text{П6.5})$$

Как видно из (П6.5), лапласиан в декартовой системе координат представляет собой сумму из трех частных производных второго порядка по координатам. Сам оператор Лапласа имеет вид:

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{П6.6})$$

и его можно рассматривать формально как скалярное произведение $\nabla \cdot \nabla$:

$$\nabla \cdot \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \right). \quad (\text{П6.7})$$

Если формально перемножить это выражение, то получим (П6.6), т. е. лапласиан.

Поскольку $\Delta = \nabla \cdot \nabla$, то скалярное произведение равняется квадрату модуля $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$. Отсюда видно, что лапласиан функции можно обозначать как символом Δf , так и символом $\nabla^2 f$.

В случае одной независимой переменной x (одномерный случай) лапласиан функции имеет вид:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \quad (\text{П6.8})$$

В случае двух независимых переменных x и y (двухмерный случай) лапласиан функции имеет вид:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \quad (\text{П6.9})$$

Оператор вида Δ^2 называют бигармоническим оператором. Этот оператор в случае двух независимых переменных он имеет вид:

$$\Delta^2 f = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}. \quad (\text{П6.10})$$

Рассмотрим запись уравнения теплопроводности с использованием лапласиана. Равенство (П6.3) запишем в виде:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = k \cdot \nabla^2 T ,$$

где $\nabla^2 T$ лапласиан температуры массива. Т. к. $dQ = C_V dT$, где $C_V = c\rho$ объемная теплоемкость массива. В этом случае:

$$C_V \frac{\partial T}{\partial t} = k \cdot \nabla^2 T \quad \text{или}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \cdot \nabla^2 T , \quad (\text{П6.11})$$

где $a^2 = \frac{\lambda}{c_V}$ – константа, а $T = T(x, y, z)$.

Выражение (П6.11) представляет собой *уравнение теплопроводности*, которое иногда называют еще *уравнением диффузии тепла*.

Диффузия вещества при малой концентрации раствора описывается аналогичным дифференциальным уравнением:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \cdot \nabla^2 u , \quad (\text{П6.12})$$

где u – концентрация раствора (отношение массы одного веществ раствора к полной массе в данном элементе объема);

D – коэффициент диффузии.

Распределение температуры $T(x,y)$ на тонкой *квадратной* пластине, согласно решению равнения Лапласа:

$$\Delta x := 0.1 \quad i := 0..4$$

$$\Delta y := 0.1 \quad j := 0..4$$

$$x_i := \Delta x \cdot i$$

$$y_j := \Delta y \cdot j$$

$$\Gamma 1(y) := 273 + 67 \cdot y^2$$

$$\Gamma 2(x) := 273 + 11 \cdot \cos\left(\pi \cdot \frac{x}{4}\right)$$

$$T_{j,0} := \Gamma 1(y_j)$$

$$T_{0,i} := \Gamma 2(x_i)$$

$$\Gamma 3(y) := 328 - 18 \cdot y^2$$

$$\Gamma 4(x) := 380 - 20 \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{x}{2}\right)$$

$$T_{j,4} := \Gamma 3(y_j)$$

$$T_{4,i} := \Gamma 4(x_i)$$

$$T = \begin{pmatrix} 284 & 283.966 & 283.865 & 283.696 & 328 \\ 273.67 & 0 & 0 & 0 & 327.82 \\ 275.68 & 0 & 0 & 0 & 327.28 \\ 279.03 & 0 & 0 & 0 & 326.38 \\ 380 & 376.871 & 373.82 & 370.92 & 368.244 \end{pmatrix}$$

$$a_{j,i} := 1$$

$$b_{j,i} := 1$$

$$c_{j,i} := 1$$

$$d_{j,i} := 1$$

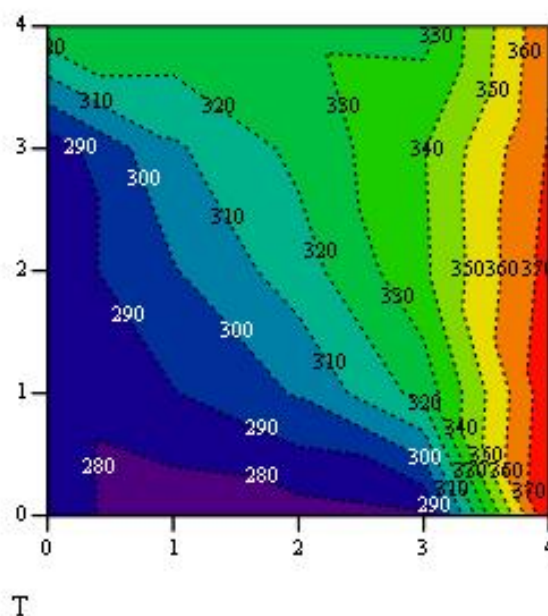
$$e_{j,i} := -4$$

$$f_{j,i} := 0$$

$$r := 0.95$$

$$T := \text{relax}(a, b, c, d, e, f, T, r)$$

$$T = \begin{pmatrix} 284 & 283.966 & 283.865 & 283.696 & 328 \\ 273.67 & 289.475 & 299.225 & 308.332 & 327.82 \\ 275.68 & 301.034 & 315.231 & 322.583 & 327.28 \\ 279.03 & 323.753 & 338.073 & 339.49 & 326.38 \\ 380 & 376.871 & 373.82 & 370.92 & 368.244 \end{pmatrix}$$



Решение уравнения Пуассона с тремя источниками тепла

Размер пластины $R := 32$

Краевые условия $M_{R,R} := 0$

Источник тепла №1

Источник тепла №2

Источник тепла №3

$$M_{\frac{3 \cdot R}{4}, \frac{R}{4}} := 25$$

$$M_{\frac{R}{4}, \frac{3 \cdot R}{4}} := -45$$

$$M_{\frac{R}{4}, \frac{R}{4}} := -40$$

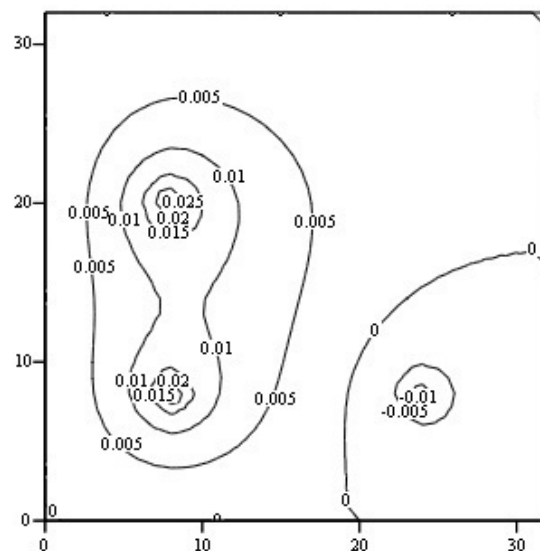
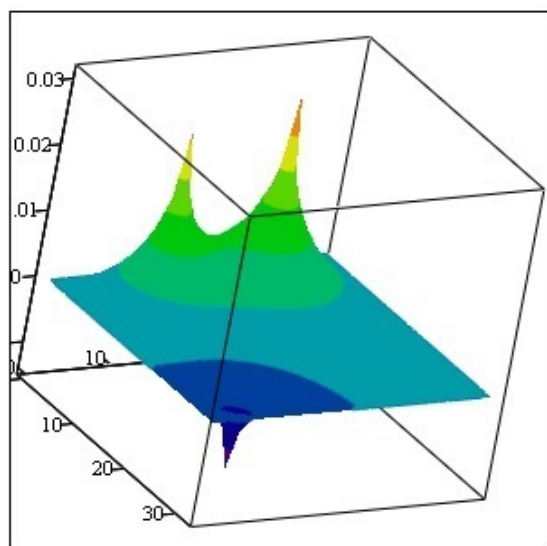
Решение уравнения $n := 2$

$S := \text{multigrid}(M, n)$

+

График температурных полей пластины

График температурных полей уровня



Решение уравнения Пуассона с пятью источниками тепла

Размер пластины $R := 32$

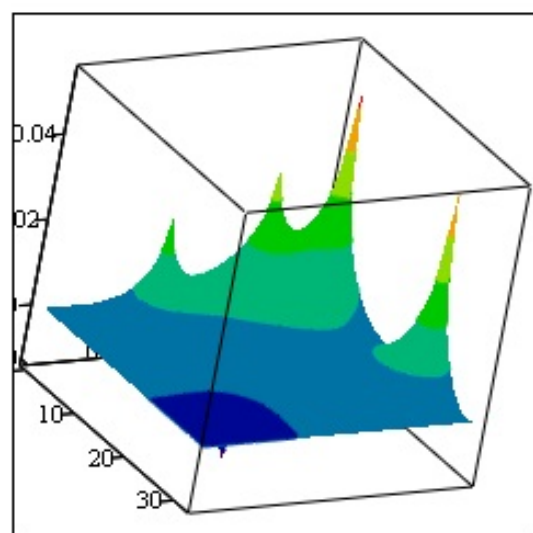
Краевые условия $M_{R,R} := 0$

$$M_{\frac{3 \cdot R}{4}, \frac{R}{4}} := 25 \quad M_{\frac{R}{4}, \frac{3 \cdot R}{4} - 4} := -45 \quad M_{\frac{R}{4}, \frac{R}{4}} := -40 \quad M_{\frac{R}{4}, \frac{3 \cdot R}{4} + 4} := -90 \quad M_{R-4, R-4} := -95$$

Решение уравнения $n := 2$

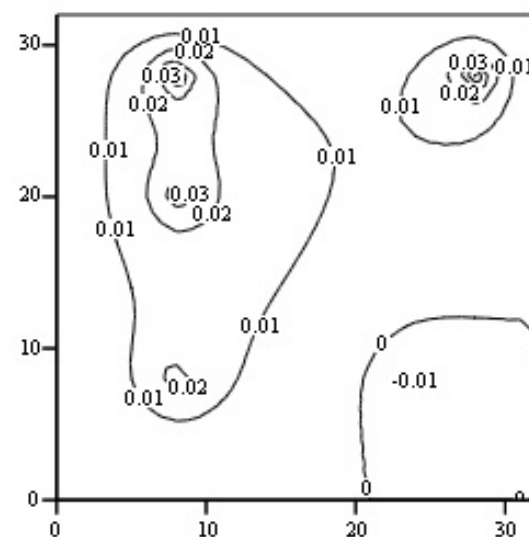
$S := \text{multigrid}(M, n)$

График температурных полей пластины



S

График температурных полей уровня



S

Решение одномерного уравнения теплопроводности
для тонкого стержня конечной длины

$$\underline{L} := 1 \quad \underline{T} := 100 \quad \alpha := 3.6 \quad \beta := 3.6$$

Given

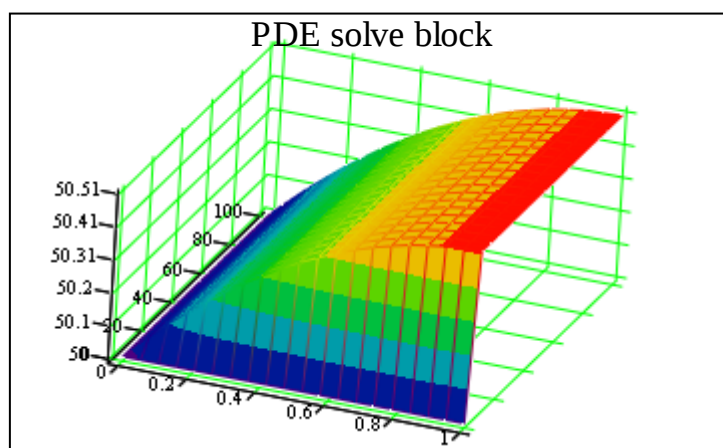
$$u_t(x, t) = \alpha \cdot u_{xx}(x, t) + \beta$$

$$u(x, 0) = 50 \quad u(0, t) = 50 \quad u_x(L, t) = 0.01$$

$$u := \text{Pdesolve}\left[u, x, \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, t, \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}\right]$$

3D graph: $T0 := 0$

$$A1 := \text{CreateMesh}(u, 0, L, T0, T)$$



A1

Решение волнового уравнения

$$a \equiv 3 \quad L \equiv 2 \cdot \pi \quad T \equiv 2 \cdot \pi \quad \text{num_pde} := 2 \quad \text{num_pae} := 0$$

$$\text{rhs}(x, t, u, u_x, u_{xx}) := \begin{pmatrix} u_1 \\ a^2 \cdot u_{xx} \end{pmatrix}$$

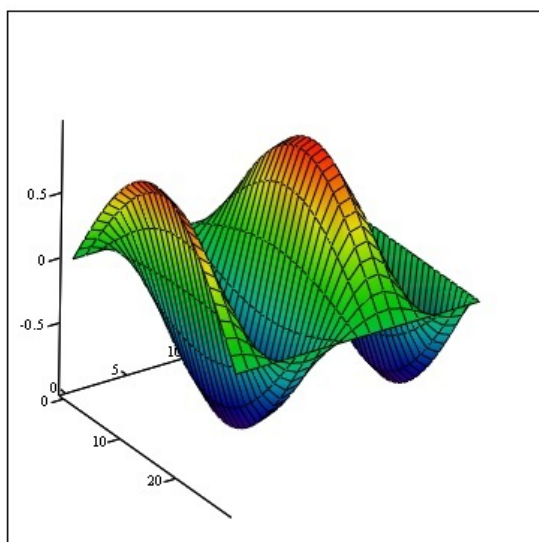
$$\text{init}(x) := \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{bc_func}(t) := \begin{pmatrix} \text{init}(0)_0 & \text{init}(L)_0 & \text{"D"} \\ \text{"NA"} & \text{"NA"} & \text{"D"} \end{pmatrix}$$

$$\text{sol} := \text{numol}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, 30, \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}, 20, \text{num_pde}, \text{num_pae}, \text{rhs}, \text{init}, \text{bc_func}\right]$$

$$\text{rows}(\text{sol}) = 30$$

$$\text{cols}(\text{sol}) = 40$$

$$\text{SOL} := \text{submatrix}(\text{sol}, 0, 29, 0, 20)$$



SOL

Экспериментальные данные

$$vx := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.8 \\ 1 \end{pmatrix} \quad vy := \begin{pmatrix} 0.43 \\ 0.22 \\ 0.8 \\ 0.1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Аппроксимирующая функция заданная в виде линейной комбинации простых функций

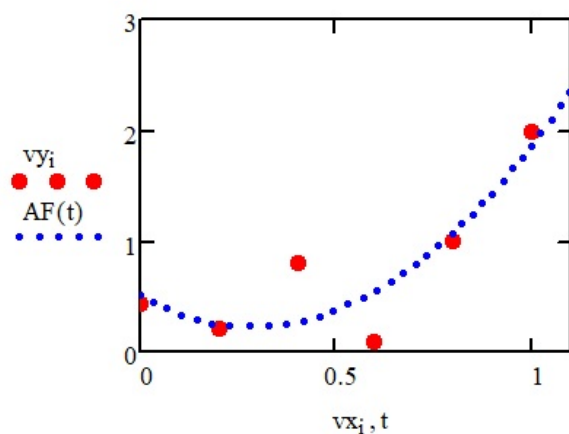
$$F(x) := \begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ \frac{1}{x+1} \end{pmatrix}$$

Определение коэффициентов аппроксимации с помощью `linfit(vx,vy,F)`

$$S := \text{linfit}(vx,vy,F) \quad S = \begin{pmatrix} 3.087 \\ -1.475 \\ 0.515 \end{pmatrix}$$

Аппроксимирующая функция с определенными коэффициентами

$$AF(t) := F(t) \cdot S$$



Описание экспериментальных данных выбранной аппроксимирующей функцией

Экспериментальные данные

$$vx \equiv \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.4 \\ 1 \\ 1.4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad vy \equiv \begin{pmatrix} 9.4 \\ 11.2 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Сложная аппроксимирующая функция заданная в виде не линейной комбинации простых функций

$$F(z,u) \equiv \begin{bmatrix} e^{u_0 + u_1 \cdot z + u_2 \cdot z^2} \\ e^{u_0 + u_1 \cdot z + u_2 \cdot z^2} \\ z \cdot (e^{u_0 + u_1 \cdot z + u_2 \cdot z^2}) \\ z^2 \cdot (e^{u_0 + u_1 \cdot z + u_2 \cdot z^2}) \end{bmatrix}$$

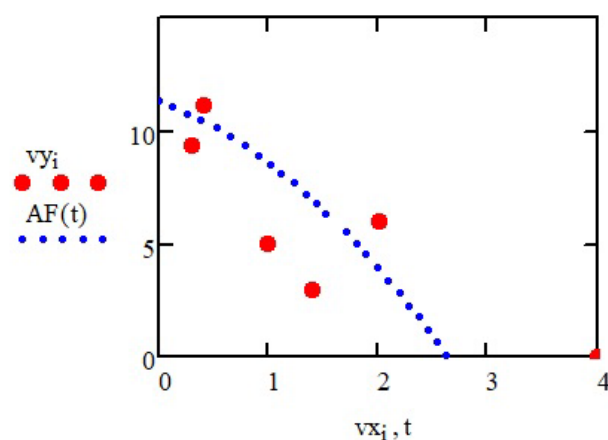
< Аппроксимирующая функция
 < частная производная по u_0
 < частная производная по u_1
 < частная производная по u_2

Определение коэффициентов
аппроксимации с помощью $\text{genfit}(vx,vy,F)$

$$vg \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad S \equiv \text{genfit}(vx,vy,vg,F) \quad S = \begin{pmatrix} 2.428 \\ -1.782 \\ -0.958 \end{pmatrix}$$

Аппроксимирующая функция с определенными коэффициентами

$$AF(t) \equiv F(t,S)_0$$



Описание экспериментальных данных
выбранной аппроксимирующей функцией

+

Интерполирование функции сплайнами

$$x := \begin{pmatrix} -1 \\ -0.5 \\ 0 \\ 0.5 \\ 1 \\ 1.5 \\ 2 \\ 2.5 \\ 3 \\ 3.5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad y := \begin{pmatrix} 0 \\ 3.152 \\ 4 \\ 3.375 \\ 2 \\ 0.625 \\ 0 \\ 0.875 \\ 4 \\ 10.125 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$Vc1 := lspline(x, y) \quad Vc2 := pspline(x, y) \quad Vc3 := cspline(x, y)$$

$$yl(z) := \text{interp}(Vc1, x, y, z)$$

$$yp(z) := \text{interp}(Vc2, x, y, z)$$

$$yc(z) := \text{interp}(Vc3, x, y, z)$$

Вычисление первой производной $z := -1, 0 \dots 4$

$$p1l(z) := \frac{d}{dz} yl(z) \quad p2l(z) := \frac{d}{dz} yp(z) \quad p3l(z) := \frac{d}{dz} yc(z)$$

$$p1l(z) =$$

7.355
-0.165
-3.013
-0.014
8.813
21.402

$$p2l(z) =$$

8.79
-0.062
-3.005
$-2.078 \cdot 10^{-3}$
8.975
23.658

$$p3l(z) =$$

9.183
-0.033
-3.002
$-1.723 \cdot 10^{-4}$
9
24

Вычисление второй производной

$$p21l(z) := \frac{d}{dz} p1l(z) \quad p22l(z) := \frac{d}{dz} p2l(z) \quad p23l(z) := \frac{d}{dz} p3l(z)$$

$$p21l(z) =$$

0
0
0.074
5.913
11.028
$2.695 \cdot 10^{-10}$

$$p22l(z) =$$

-9.945
0
0.029
5.99
11.832
15.634

$$p23l(z) =$$

-12.664
0
0.016
6.001
12
18

Вычисление интегралов

$$\int_{-1}^4 yl(z) dz = 18.783 \quad \int_{-1}^4 yp(z) dz = 18.766 \quad \int_{-1}^4 yc(z) dz = 18.767$$

Вычисление второй производной

$$p21l(z) := \frac{d}{dz} p1l(z)$$

$$p21l(z) =$$

0
0
0.074
5.913
11.028
$2.695 \cdot 10^{-10}$

$$p22l(z) := \frac{d}{dz} p2l(z)$$

$$p22l(z) =$$

-9.945
0
0.029
5.99
11.832
15.634

$$p23l(z) := \frac{d}{dz} p3l(z)$$

$$p23l(z) =$$

-12.664
0
0.016
6.001
12
18

Вычисление интегралов

$$\int_{-1}^4 yl(z) dz = 18.783$$

$$\int_{-1}^4 yp(z) dz = 18.766$$

$$\int_{-1}^4 yc(z) dz = 18.767$$

Приложение 15

**Задания для самостоятельной работы по дисциплине
«Математические методы в инженерии»**

Задание состоит из 5 задач. Номер задачи соответствует номеру студента в журнале. Задание оформляется в соответствии с требованиями к курсовым работам и подобного рода работ. Решение представляется в виде копий экранов со ставкой в Word.

Задача 1.

Построить в *Machcad* графики функций.

$$1. f(x) = \frac{\arctg(bx)}{x+a}, \quad a=1,7, \quad b=1,3; \quad 2. f(x) = \frac{e^{ax}}{x+b}, \quad a=0,9, \quad b=3,5;$$

$$3. f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} \cdot (e^{ax} + b)}, \quad a=0,85, \quad b=2,7; \quad 4. f(x) = \frac{1 - e^{-a/x}}{x+a}, \quad a=0,7, \quad b=1,6;$$

$$5. f(x) = \frac{\arctg(ax)}{x+b}, \quad a=0,6, \quad b=1,8;$$

$$6. f(x) = \frac{e^{-x^2} \sin^2(ax)}{x^2 + 3 + b}, \quad a=0,5, \\ b=0,95;$$

$$7. f(x) = \frac{e^{-btg(x)}}{\cos x + b}, \quad a=0,45, \quad b=3,5;$$

$$8. f(x) = \frac{e^{\frac{ax}{1+x}}}{x^2 + b}, \quad a=0,9, \quad b=1,7;$$

$$9. f(x) = \frac{e^{-x^2+ax}}{b + \sin\left(\frac{1}{2,5+x^2}\right)}, \quad a=0,9, \quad b=0,7; \quad 10. f(x) = \frac{\cos(bx)}{(a+x^2)\sqrt{1-x^2}}, \quad a=0,8, \\ b=1,8;$$

$$11. f(x) = \frac{1}{(b-x^2)\sin(a\sqrt{x})}, \quad a=1,3, \quad b=2,7; \quad 12. f(x) = \sqrt{x-x^3} \cdot \frac{\cos(ax)}{(b+x)}, \quad a=1,7, \\ b=1,1;$$

$$13. f(x) = \frac{\sin\left(\frac{bx}{1+x}\right)}{(a+x)^2}, \quad a=0,6, \quad b=1,2;$$

$$14. f(x) = e^{-ax^2} \sin(bx^2), \quad a=1,2, \\ b=0,8;$$

$$15. f(x) = \frac{e^{-x^2} \cos(bx)}{a + \cos(x)}, \quad a=1,55, \quad b=0,8;$$

$$16. f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + ax + b}, \quad a=1,8, \\ b=1,4;$$

$$17. f(x) = \frac{e^{-x^2}}{\sin(x) + b}, \quad a=1,3, \quad b=4,7;$$

$$18. f(x) = \frac{\sin(bx+1)}{(a+\cos(x))\sqrt{1-x^2}}, \\ a=0,3, \quad b=3,1;$$

Задача 2.

Решить в *Mathcad* нелинейные уравнения.

1. $\ln(2x-3) + 3x - 5 = 0;$
2. $x^2 \ln x^{1,5} - 4 = 0;$
3. $x \ln x - 0,5 = 0;$
4. $7^{3x} - 2x - 2 = 0;$
5. $3e^{1/x} - x + 4 = 0;$
6. $x^{-1} \sin(x) - 2x^2 = 0;$
7. $tg(2x) - e^{-3x} = 0;$
8. $5^{3x} - 2x - 2 = 0;$
9. $x^5 + 5x + 1 = 0;$
10. $x \sin(x) - 0,5 = 0;$
11. $3\sqrt{1-x^2} + 2 \arcsin(x) = 0;$
12. $3^{2x} - 2x^2 - x - 3 = 0;$
13. $5x \ln x - 4 = 0;$
14. $3,15tgx - x - 0,326 = 0;$
15. $3 \ln x + x - 2 = 0;$
16. $x - 2e^{-2x} = 0;$
17. $\ln 2x - \sin x = 0;$
18. $x^3 \cdot 3,38x - 1,54 = 0$

Задача 3.

Решить в *Machcad* системы линейных уравнений несколькими методами, с помощью обратной матрицы и правила Крамера.

1.

$$\begin{aligned}3,2x_1 + 1,4x_2 - 3,4x_3 + 1,5x_4 &= -5 \\2,3x_1 - 0,9x_2 + 4x_3 - 1,5x_4 &= 11 \\x_1 + 3,9x_2 + 0,8x_3 - 2,5x_4 &= 0,6 \\0,2x_1 - 1,3x_2 + 1,8x_3 - 5,4x_4 &= 19,6\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}2,3x_1 - 4,8x_2 - 1,4x_3 + 0,2x_4 &= -1,5 \\3,2x_1 + 3,5x_2 - 0,8x_3 - 1,3x_4 &= 18,3 \\-x_1 + 2,9x_2 - 3,8x_3 - 3,9x_4 &= 5,7 \\0,2x_1 + 1,3x_2 - 4x_3 + 5,1x_4 &= 10,1\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}2,3x_1 - 1,5x_2 + 5,4x_3 - 3,9x_4 &= -21,2 \\1,9x_1 + 2x_2 + 3,9x_3 + 5,4x_4 &= -2,1 \\2,5x_1 - 0,9x_2 - 0,5x_3 + 1,2x_4 &= -1,2 \\3,4x_1 + 2,2x_2 + 0,5x_3 + 0,4x_4 &= 14\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}1,2x_1 - 2,4x_2 - 0,7x_3 + 0,1x_4 &= -2,6 \\2,2x_1 + 6,4x_2 - 4,6x_3 - 5,2x_4 &= 22,7 \\-x_1 + 2,9x_2 - 3,8x_3 - 3,9x_4 &= -0,1 \\0,1x_1 + 0,4x_2 - 1,3x_3 + 1,7x_4 &= 4,2\end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}4,4x_1 + 1,1x_2 + 3,4x_3 + 6,6x_4 &= 12,3 \\1,3x_1 - 0,4x_2 - 0,3x_3 + 0,6x_4 &= 0,6 \\6,8x_1 + 4,4x_2 + 0,6x_3 + 0,8x_4 &= 40,7 \\2,3x_1 - 1,5x_2 - 5,4x_3 - 3,9x_4 &= -18,9\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}1,6x_1 + 0,7x_2 - 1,7x_3 + 0,8x_4 &= -2,5 \\3,3x_1 + 3x_2 + 4,8x_3 - 3,8x_4 &= 10,4 \\0,5x_1 + 1,9x_2 + 0,4x_3 - 1,3x_4 &= -0,3 \\0,1x_1 - 0,4x_2 + 0,6x_3 - 1,8x_4 &= 6,5\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}4,6x_1 - 9,6x_2 - 2,8x_3 + 0,4x_4 &= -3,2 \\1,6x_1 + 1,8x_2 - 0,4x_3 - 0,7x_4 &= 9,1 \\-3x_1 + 8,7x_2 - 11,4x_3 - 11,7x_4 &= 17 \\2,5x_1 - 3,5x_2 - 5,4x_3 + 5,3x_4 &= 8,5\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}0,9x_1 + 2,3x_2 - 7,4x_3 + 2,8x_4 &= -17,4 \\0,8x_1 - 0,3x_2 + 1,3x_3 - 0,4x_4 &= 5 \\1,2x_1 + 2,5x_2 + 2,7x_3 - 7,9x_4 &= 17,5 \\0,2x_1 - 1,3x_2 + 1,8x_3 - 5,4x_4 &= 14,9\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}2,3x_1 - 4,8x_2 - 1,4x_3 + 0,2x_4 &= -5,3 \\0,7x_1 + 2,1x_2 - 1,5x_3 - 1,7x_4 &= 7,6 \\1,2x_1 + 9,3x_2 - 8,4x_3 - 9,1x_4 &= 22,6 \\0,1x_1 + 0,4x_2 - 1,3x_3 + 1,7x_4 &= 4,2\end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned}1,5x_1 + 0,4x_2 + 1,1x_3 + 2,2x_4 &= 4,1 \\2,5x_1 - 0,9x_2 - 0,5x_3 + 1,2x_4 &= 0,6 \\3,4x_1 + 2,2x_2 + 0,3x_3 + 0,4x_4 &= 20,4 \\1,2x_1 - 0,8x_2 + 2,7x_3 - 2x_4 &= -9,5\end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned} 1,3x_1 + 5,4x_2 - 6,1x_3 + 0,5x_4 &= -33,3 \\ -0,5x_1 + 2,3x_2 + 5,1x_3 - 1,2x_4 &= 5,3 \\ 3,9x_1 - 2,1x_2 - 0,4x_3 - 4,5x_4 &= 28 \\ 4x_1 - 1,9x_2 + 0,5x_3 + 3,9x_4 &= 24,4 \end{aligned}$$

13.

$$\begin{aligned} 12,6x_1 + 5,3x_2 - 3,6x_3 + 2,7x_4 &= 13,9 \\ 6,5x_1 - 2,2x_2 + 0,3x_3 + 1,1x_4 &= -14 \\ 5,6x_1 + 10,7x_2 - 11,7x_3 - 2,8x_4 &= -6,9 \\ 1,1x_1 - 4,6x_2 - 7,5x_3 + 4,4x_4 &= -53,3 \end{aligned}$$

15.

$$\begin{aligned} 10,8x_1 - 13,8x_2 - 6,4x_3 + 7,6x_4 &= 70,5 \\ 1,7x_1 - 11,7x_2 + 0,3x_3 - 2,2x_4 &= -1,4 \\ 1,6x_1 - 7,5x_2 + 11,1x_3 + 16,9x_4 &= 13,5 \\ 3,5x_1 - 15,4x_2 - 2x_3 + 11,1x_4 &= 36,6 \end{aligned}$$

17.

$$\begin{aligned} 1,2x_1 - 2,4x_2 - 0,7x_3 + 0,1x_4 &= -1,9 \\ 2,2x_1 + 6,4x_2 - 4,6x_3 - 9,2x_4 &= 17,8 \\ -x_1 + 2,9x_2 - 3,8x_3 - 3,9x_4 &= 5,9 \\ 0,1x_1 + 0,4,6x_2 - 1,3x_3 + 1,7x_4 &= 27,4 \end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned} 1,2x_1 - 2,4x_2 - 0,7x_3 + 0,1x_4 &= -2,6 \\ 6,4x_1 + 7x_2 - 1,6x_3 - 2,6x_4 &= 36,5 \\ -x_1 + 2,9x_2 - 3,8x_3 - 3,9x_4 &= 5,7 \\ -0,8x_1 + 4,2x_2 - 7,8x_3 + 1,2x_4 &= 15,8 \end{aligned}$$

14.

$$\begin{aligned} 12,6x_1 + 5,3x_2 - 10,1x_3 + 7,2x_4 &= -217,2 \\ 8,6x_1 + 7,3x_2 + 0,5x_3 + 0,1x_4 &= -18,1 \\ 0,4x_1 - 0,9x_2 - 0,2x_3 + 5,8x_4 &= 28,1 \\ 9,4x_1 - 2,5x_2 - 9,3x_3 + 1,4x_4 &= -223,7 \end{aligned}$$

16.

$$\begin{aligned} 1,7x_1 + 11,3x_2 - 21x_3 + 7,4x_4 &= 84,2 \\ 7,7x_1 + 13,5x_2 - 21,7x_3 + 4,5x_4 &= 113,7 \\ 1,2x_1 + 0,4x_2 + 0,1x_3 + 3,7 &= -3 \\ 9,9x_1 + 2,4x_2 - 20x_3 + 17,4x_4 &= 79,4 \end{aligned}$$

18.

$$\begin{aligned} 11,8x_1 - 6,6x_2 + 8x_3 + 11,4x_4 &= 814,2 \\ 4,3x_1 + 4,3x_2 + 8,9x_3 + 10,9x_4 &= 196,9 \\ 12,5x_1 - 12x_2 - 0,8x_3 + 1,8x_4 &= 859,7 \\ 1,1x_1 + 3,7x_2 + 9,9x_3 - 0,1x_4 &= 44,7 \end{aligned}$$

Задача 4.

Решить в *Machcad* системы нелинейных уравнений.

1. $3x_1^2 + 1,5x_2^2 + x_3^2 - 5 = 0$

$$6x_1x_2x_3 - x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0$$

$$5x_1x_3 - x_2x_3 - 1 = 0$$

3. $x_1 + \sqrt{x_2} + x_3 + x_4 = 3$

$$x_1^2 + x_2 + x_3^2 + x_4 = 21$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_4 = 2$$

$$x_1x_2 + x_2x_4 + x_4^2 = 18$$

2. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$

$$x_1^2 + x_2 + x_3^2 + x_4 = 12$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_4 = 5$$

$$x_1x_2 + x_2x_4 + x_4^2 = 9$$

4. $x_1 + \sqrt{x_2} + x_3 + \sqrt{x_4} = 5$

$$x_1^2 + x_2 + x_3^2 + x_4 = 20$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + e^{x_4} = 6$$

$$x_1x_2 + x_2x_4 + x_4^2 = 17$$

5. $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + x_3 + \sqrt{x_4} = 2$
 $x_1^2 + x_2 + x_3^2 + x_4 = 20$
 $x_1 x_4 + x_2 \cos(x_3) + e^{x_4} = 8$
 $x_1 x_2 + x_2 \ln(x_4) + x_4^2 = 15$
6. $\sin(x+1) - y + z + t = 0$
 $x^2 + \cos y + z + 2t = 2$
 $2,2x + \sin y + z^2 t = 1,8$
 $2,5x^2 + tgy + z^2 + 2t = 3$
7. $\sin(x+1) - y + z^2 + t^2 = 0,8$
 $x^2 + \cos(y+1) + 1,5z + 2t = 1,3$
 $2,28x + \sin y + z^2 t = 1,5$
 $2,5x^2 + tgy + z + 2t^2 = 2,8$
8. $\sin(2x+1) - y + z^2 + t^{2/3} = 0,6$
 $x^2 + \cos(y+1) + 1,5z + t^2 = 1,2$
 $2,8x + \sin y + zt = 1,4$
 $tg(xy) + z + 2t^2 = 2,5$
9. $\ln(2x+1) - y + z^2 + t^{1/3} = 0,64$
 $x^2 + \cos(y+1) + 1,5z + t = 1,12$
 $2,6x + \ln y + zt = 1,25$
 $tg\left(\frac{x}{y}\right) + z + 2\sqrt{t} = 2,3$
10. $\cos(2x+1) - y + z^2 + t^{1/3} = 0,7$
 $x^2 + \cos(y+1) + 1,5z + t^{1/2} = 1,18$
 $2,75x + \ln y + z \ln t = 1,5$
 $tg\left(\frac{x}{y}\right) + z + 2\sqrt{t} = 2,5$
11. $\cos(2x+1) - \sin(y) + z^2 + t^{1/3} = 1,7$
 $x^2 + \cos(y+1) + 1,5z + t^2 = 1,8$
 $2,8x + \ln y + z \ln t = 1$
 $xy + z + 2t^3 = 4$
12. $tg(2x+1) - \sin yz + t^3 = 1,6$
 $x + \cos(y+0,5) + z + t^2 = 1,8$
 $12,8x + 2 \ln y + z \ln t = 1,9$
 $xy + tgz + 12t^7 = 4$
13. $tg(2x) - \sin y - \cos z + t^3 = 1,65$
 $x + \cos(y) + tgz + t^2 = 1,75$
 $10,8 \sin x + 2 \ln y + z \ln t = 1,8$
 $xy + tgz + 11t^5 = 3,8$
14. $tg(2x+5) - \sin y - \cos z + t^2 = 1,5$
 $x + \cos(y-0,3) + tgz + (t-6)^2 = 1,7$
 $10,6 \sin(x+0,3) + 2 \ln(y+1) + z \ln t = 1,6$
 $x(y-4) + tg(z-2) + 9t^3 = 3$
15. $e^x - \sin(y-0,1) - \cos(z) + t = 1,35$
 $\lg x + \cos(y+0,2) + tgz + (t-5)^2 = 1,57$
 $10,3 \sin(x+0,3) + 2 \ln(y+1) + z \ln t = 1,86$
 $\cos(x(y-4)) + tg(z-1) + 7t^3 = 3,5$
16. $e^x - \sin(y) - \cos(z) + t^3 = 1,25$
 $\ln x + \cos(y-0,7) + tgz + (t-3)^2 = 1,48$
 $10,25 \sin(x+0,6) + 3 \ln(y) + z \ln(t+0,1) = 1,6$
 $\cos(x^2(y-3)) + tg(z) + 8t^4 = 3,65$
17. $ye^{3x} - zt = 4,25$
 $\ln x + \cos(y-0,6) + tg(tz) = 2,48$
 $10,55 \sin(x+0,8) + 4 \ln(2y) + z^2 \ln(t+0,2) = 1,2$
 $\cos(x(y-2)) + z + 9t^5 = 7,6$
18. $ye^{3x} - z + t = 5,25$
 $\ln(xy) + tg(zt) = 3,48$
 $10,65 \sin(x+1,8) + 5 \ln(7y) + z \ln(t+0,1) = 1,28$
 $\cos((x+0,5)(y-2)) + z^2 + 7t^3 = 7,7$

Задача 5.

Решить методом Рунге-Кутты в *MathCad* дифференциальные уравнения.

1. а) $y'(y^2 + x) = y, \quad y(1) = 1, \quad x \in [1; 2].$

б) $y' - \frac{y}{x-2} = \frac{y^2}{x-1}, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0; 1].$

2. а) $y' - \frac{y}{x-3} = x^2, \quad y(1) = 0,$

б) $\frac{dy}{dx} + xy = (1+x) \cdot e^{-x} \cdot y^2, \quad y(0) = 1.$

3. а) $y' - y \cdot \operatorname{ctgx} = 2x \cdot \sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$

б) $xy' + y = 2y^2 \ln x, \quad y(1) = \frac{1}{2}.$

4. а) $y' - y \cdot \cos x = 2,3 \cdot \sin 2x, \quad y(0) = 0,$

б) $3xy' + 2y = 2xy^2, \quad y(1) = 2.$

5. а) $y' - y \cdot \operatorname{tg} x = (\cos x)^2, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2},$

б) $\frac{dy}{dx} + 4x^3y = 4(1+x^3)e^{-4x}y^2, \quad y(0) = 1.$

6. а) $y' + 2xy = 3x^2 \cdot e^{-x^2}, \quad y(0) = 0,$

б) $x \frac{dy}{dx} + y = y^2 \cdot \ln^2 x, \quad y(1) = 0,5.$

7. а) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+1} + (1+x) \cdot e^{-x}, \quad y(0) = 1,$

б) $x(3xy' + y) = y^2 \ln x, \quad y(1) = 3.$

8. а) $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x+1} = x \cdot \sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$

б) $x(3xy' + 4y) = y^3 \ln x, \quad y(1) = 2.$

9. а) $y' + \frac{y}{x} - \sin x = 0, \quad y(\pi) = \frac{1}{2\pi},$

б) $3y' + 2y \cos x = y^{-1} \cos x (1 + \sin x), \quad y(0) = 1.$

10. a) $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x+1} + x^2$, $y(1) = 1$,
 б) $3y' + 4x^3y = y^2(1 - x^3) \cdot e^{-x}$, $y(0) = -1$.
11. a) $y' + \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{2x^2}{1+x^2}$, $y(0) = 0,6$,
 б) $3y' + 2ycosx = y^{-1}cosx(1 + sinx)$, $y(0) = 1$.
12. a) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -\frac{(x+1)}{x} \cdot e^x$, $y(1) = e$,
 б) $3y' + 2ycosx = e^{2x}(2 + 3cosx)y^{-1}$, $y(0) = 1$.
13. a) $y' - \frac{y}{x} = -\frac{2lnx}{x}$, $y(1) = 0,9$,
 б) $3(xy' + y) = xy^2$, $y(0) = 0,8$.
14. a) $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}$, $y(1) = 4$,
 б) $\frac{dy}{dx} - y = 2xy^2$, $y(0) = 0,5$.
15. a) $3xy' - 5y = (4x - 5)y^4$, $y(1) = 1$,
 б) $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = 2xy^3$, $y(1) = -0,7$.
16. a) $y' + 2xy = 2x^3y^4$, $y(0) = 1,4$,
 б) $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = 3x$, $y(1) = 1$.
17. a) $y' - \frac{2x}{1+x^2} = 1 + x^2$, $y(1) = 3$,
 б) $x\frac{dy}{dx} + 2y = y^2lnx$, $y(1) = 1$.
18. a) $y' + \frac{1-2x}{x^2} \cdot y = 1$, $(1) = 1$,
 б) $2x\frac{dy}{dx} + 3ycosx = e^{2x}(9 + 12cosx)y^{-1}$. $y(1) = 1$.

$$19. \quad \text{a) } \frac{dy}{dx} + \frac{3y}{x} = 2x^{-3}, \quad y(1) = 1,$$

$$\text{б) } 4y' + 4x^3y = (x^3 + 8)e^{-2x} \cdot y^2, \quad y(0) = 1,$$

$$20. \quad \text{a) } \frac{dy}{dx} + 2xy + 2x^3 = 0, \quad y(1) = \frac{1}{e},$$

$$\text{б) } 4y' + xy = (x - 1) \cdot e^x \cdot y^2, \quad y(0) = 1.$$

Учебное издание

Пестриков Виктор Михайлович

**Математические методы
в инженерии**

Учебное пособие

Редактор и корректор А. А. Чернышева
Техн. редактор Д. А. Романова

Темплан 2021 г., поз. 5262

Подписано к печати 06.06.2023.	Формат 60x84/16.	Бумага тип № 1.
Печать офсетная.	Печ.л. 9,8.	Уч.-изд. л. 9,8.
Тираж 30 экз. (1 завод)	Изд. № 5262/21.	Цена «С». Заказ №

Ризограф Высшей школы технологии и энергетики СПбГУПТД,
198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4.