Н. Л. ЛЕОНОВА

ТЕОРИЯ ИГР И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
БЕСКОАЛИЦИОННЫЕ ИГРЫ
ПОЗИЦИОННЫЕ ИГРЫ

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2023

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна»
Высшая школа технологии и энергетики

Н. Л. ЛЕОНОВА

ТЕОРИЯ ИГР И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
БЕСКОАЛИЦИОННЫЕ ИГРЫ
ПОЗИЦИОННЫЕ ИГРЫ

Учебно-методическое пособие

Утверждено Редакционно-издательским советом ВШТЭ СПбГУПТД

Санкт-Петербург
2023

УДК 519.83
ББК 22.18
Л 476

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук, доцент Высшей школы технологии и энергетики Санкт-Петербургского государственного университета промышленных технологий и дизайна
Б. Ф. Иванов;
кандидат технических наук, доцент кафедры информационно-измерительных систем и технологий СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
А. В. Царёв

Леонова, Н. Л.
Л 476 Теория игр и исследование операций. Бескоалиционные игры. Позиционные игры: учебно-методическое пособие / Н. Л. Леонова. — СПб.: ВШТЭ СПбГУПТД, 2023. — 34 с.

Учебно-методическое пособие соответствует программам и учебным планам дисциплины «Теория игр и исследование операций» для студентов, обучающихся по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика». Учебно-методическое пособие является логическим продолжением пособия «Теория игр. Матричные игры». Во второй части учебно-методического пособия изложены основные понятия теории игр из разделов позиционные и бескоалиционные игры.

Учебно-методическое пособие предназначено для подготовки бакалавров очной формы обучения. Отдельные разделы пособия могут быт полезны аспирантам и специалистам, работающим в области прикладной математики и информатики.

.

УДК 519.83
ББК 22.18

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Теория игр – это научная дисциплина, изучающая отношения между людьми, которые руководствуются несовпадающими (а иногда и противоположными) мотивами. Наряду с традиционными играми, например, покер, шахматы, футбол и многие другие, теория игр изучает и такие серьезные отношения, как рыночная конкуренция, гонка вооружений, загрязнение окружающей среды. В теории игр все эти серьезные отношения называют играми, поскольку в них, как и в играх, результат зависит от решений (стратегий) всех участников. С одной стороны, теория игр – это математическая дисциплина, которая применяется во многих областях человеческой деятельности (экономика, военное дело, биология и др.). С другой стороны, теория игр – это раздел современной экономической теории, что подтверждается большим количеством Нобелевских премий в области экономики, присужденных самым выдающимся представителям данной науки.

Под «игрой» в теории игр понимается должным образом схематизированная модель такого явления, в котором участвуют несколько «игроков», имеющих различные интересы и могущих добиваться осуществления этих интересов теми или иными путями. При этом под игроками могут подразумеваться, кроме физических лиц, также коллективы, команды игроков, конкурирующие фирмы, воюющие стороны и даже биологические виды в условиях борьбы за существование. Иногда полезно в качестве одного из игроков рассматривать природу. Различие интересов у разных игроков отнюдь не означает полной противоположности их интересов. Поэтому теория игр рассматривает также возможности разного рода компромиссов между игроками, согласование их действий, обмен информацией и т. п. Может случиться, что в процессе игры несколько игроков, придя на каких-то основах к соглашению, начинают выступать единым коллективом, отстаивая некоторые общие интересы. Такую группу игроков в теории игр принято называть кооперацией, а игры, в которых допускается по их условиям возможность образования коопераций, –кооперативными играми. Несмотря на то, что еще в работах Неймана и Моргенштерна кооперативным играм отведено около двух третей монографии, результаты, полученные относительно кооперативных игр, еще не могут рассматриваться как некоторая единая теория, как это имеет место для случая некооперативных игр, т. е. таких игр, в которых объединение игроков в кооперации правилами игры не допускается.

Более слабой, чем кооперация, формой объединения игроков является коалиция. Группа игроков называется объединенной в коалицию, если они, сохраняя каждый свои индивидуальные интересы, избирают для их осуществления некоторый общий, согласованный способ действий. Некооперативные игры, в которых допускаются возможности образования коалиций игроков, называются коалиционными играми. Игры, в которых каждый из игроков для достижения своих целей не может рассчитывать на поддержку в процессе игры со стороны других игроков, называются бескоалиционными. В данном пособии дается обзор основных положений теории конечных бескоалиционных игр, т. е. таких бескоалиционных игр, в которых каждый из игроков располагает конечным числом способов действия.

1. БЕСКОАЛИЦИОННЫЕ ИГРЫ

1.1. Общие сведения

Антагонистические игры описывают конфликты частного вида, которые не всегда адекватны разным ситуациям или вообще не могут считаться приемлемыми. Например, антагонистические игры не затрагивают конфликты с числом игроков больше двух или ситуации, происходящие в конфликтах с двумя игроками, в которых интересы сторон не всегда противоположны.

Бескоалиционные игры являются играми более общей природы. Бескоалиционность понимается в том смысле, что группам игроков («коалициям») не приписывается никаких-либо интересов, за исключением тех, которые вытекают из интересов отдельных игроков. Целью каждого игрока в такой игре является только получение по возможности наибольшего индивидуального выигрыша.

Определение 1. Бескоалиционной игрой называется игра N игроков (N≥2), каждый из которых имеет множество стратегий X_i, с функцией выигрыша $H_i(x)$, $i = \overline{1, N}$, где $x \in X$ – ситуация, задаваемая на множество X декартового произведения стратегий X_i.

Определение 2. Бескоалиционная игра называется игрой с постоянной суммой, если существует такое постоянное C, что $\sum_{i \in N} H_i(x) = C$, для всех ситуаций $x \in X$.

Определение 3. Конечная бескоалиционная игра двух игроков с ненулевой суммой называется биматричной игрой.

Как и в случае антагонистических игр необходимо выработать принципы оптимального поведения игроков в бескоалиционных играх и найти решения (оптимальные стратегии каждого из игроков).

В общих бескоалиционных играх возможны ситуации одновременного увеличения выигрышей всех игроков или хотя бы их одновременного выигрыша, поэтому в этих играх необходимо ввести формализованное описание таких понятий, как выгодность, устойчивость и справедливость того или иного решения игры.

Определение 4. Ситуация x в игре называется приемлемой для игрока i, если для любой его стратегии x_i':

$$H(x/x_i') \leq H(x), \qquad (1.1)$$

т. е. при применении i-м игроком в данной ситуации всех других стратегий, его выигрыш не может увеличиться.

Определение 5. Ситуация в игре, приемлемая для всех игроков, называется ситуацией равновесия по Нэшу (равновесной ситуацией).

Иными словами, ситуация x называется равновесной, если для любого игрока $i \in N$ выполняется условие (1.1).

Из определения видно, что ни один из игроков не заинтересован в отклонении от своей стратегии, образующих в совокупности ситуацию равновесия.

В случае антагонистической игры приемлемые стратегии игроков совпадают с их оптимальными стратегиями. Для неантагонистических игр понятие оптимальной стратегии может вообще не иметь смысла: в таких играх оптимальными оказываются не стратегии отдельных игроков, а их сочетания для всех игроков сразу. В бескоалиционных играх как оптимальные следует квалифицировать не действия того или иного игрока, а совокупность действий всех игроков.

Поэтому в бескоалиционной игре решение игры – это чаще, нахождение ситуаций равновесия.

Пример 1. Игра «Семейный спор»

Одна из наиболее распространенных интерпретаций игры следующая. Муж (первый игрок) и жена (второй игрок) могут выбрать одно из двух вечерних развлечений: футбольный матч или балет. Естественно предположить, что муж предпочтет футбол, а жена – балет. Однако для обоих гораздо важнее идти вместе, чем смотреть предпочитаемое зрелище в одиночестве. В данной 2х2 биматричной игре функции выигрышей H_1 и H_2 соответственного первого и второго игроков можно представить в виде:

$$H_1 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{и} \qquad H_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix},$$

где стратегии игрока 1: A_1 – выбираю футбол; A_2 – иду на балет; игрока 2: B_1 – иду на футбол, B_2 – на балет.

Очевидно, что для первого игрока предпочтительнее ситуация (A_1, B_1), а для второго (A_2, B_2), и эти ситуации являются равновесными. Однако в данном примере, как будет показано ниже, есть еще и третья ситуация равновесия, состоящая в выборе игроками смешанных стратегий: $S_A = \left\| \frac{2}{3}; \frac{1}{3} \right\|$; $S_B = \left\| \frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right\|$ с ценой игры для обоих игроков $\nu = \frac{2}{3}$.

Однако выигрыши каждого из игроков в этой ситуации равновесия меньше, чем в двух первых ситуациях равновесия, где они равны 2 или 1, в зависимости от ситуации и игрока.

Хотя стратегии (A_1, B_1) и (A_2, B_2) являются оптимальными, поскольку дают максимальные выигрыши, однако они приносят игрокам не одинаковые выигрыши, поэтому не являются справедливыми.

Отметим также, что если в матричной игре ни одному из игроков не выгодно информировать противника о своей стратегии, то в данной биматричной игре это свойство не выполняется.

Действительно, если игроки не общаются до игры и оба обладают твердыми характерами, т. е. первый игрок выбирает стратегию A_1, а второй – B_2, то в результате они оба проигрывают. Аналогичная ситуация получиться и в том случае, когда каждый из игроков имеет мягкий характер и решает уступить. Так сочетание устойчивости со справедливостью вступает в противоречие с сочетанием устойчивости и выгодности.

Лучшим для игроков в рассматриваемой игре является договорный вариант (A_1, B_1) или (A_2, B_2), причем справедливым решением будет их выбор одного из этих вариантов путем бросания монеты. Выпадение герба будет означать, например, что семейство идет на матч по футболу, а решки – на балет. Заметим, что в антагонистической игре в отличие от биматричной нет смысла вести переговоры до игры и уславливаться о совместном плане действий. В рассматриваемой игре ясно, что если игроки договорились бы играть оба, скажем первую чистую стратегию, причем игрок 1 за получение большего выигрыша, чем игрок 2, заплатил бы ему 1/2, то решение было бы выгодным и справедливым для обоих игроков. Однако в рамках бескоалиционных игр такого рода дележи не предусматриваются.

1.2. Ситуации, оптимальные по Парето

Формальное понятие оптимальности призвано отражать различные варианты содержательных представлений об устойчивости, выгодности и справедливости. Можно считать, что устойчивость ситуации проявляется в ее равновесности.

Другой вариант устойчивости ситуации в большей степени, чем равновесность, отражающей черты ее выгодности, состоит в ее оптимальности по Парето. (*Примечание:* В. Парето – итальянский экономист).

Определение 6. Ситуация x_0 в бескоалиционной игре называется оптимальной по Парето, если не существует ситуации $x \in X$, для которой имеет место векторное неравенство:

$$H_i(x^0) \leq H_i(x), \text{ для всех } i \in I. \quad (1.2)$$

Иными словами, в оптимальной по Парето ситуации игроки не могут совместными усилиями увеличить выигрыш кого-либо из них, не уменьшив при этом выигрыш кого-либо другого.

С точки зрения экономики: *оптимум по* ***Парето*** *подразумевает, что суммарное благосостояние общества достигает максимума, а распределение благ и ресурсов становится оптимальным, если любое изменение этого распределения ухудшает благосостояние хотя бы одного субъекта* ***экономической*** *системы.*

Подчеркнем различие ситуации равновесия от ситуации, оптимальной по Парето: в первой ни один игрок, действуя в одиночку, не может увеличить свой собственный выигрыш; во второй, – все игроки, действуя совместно, не могут (даже нестрого) увеличить выигрыш каждого.

Рассмотрим графический метод определения ситуаций оптимальных по Парето. На рис. 1.1 изображено множество возможных стратегий x_1, x_2 двух игроков. Каждой точке $x \in X$ соответствует точка на множестве H значений функций выигрышей $H_1(x)$ и $H_2(x)$ (рис. 1.2).

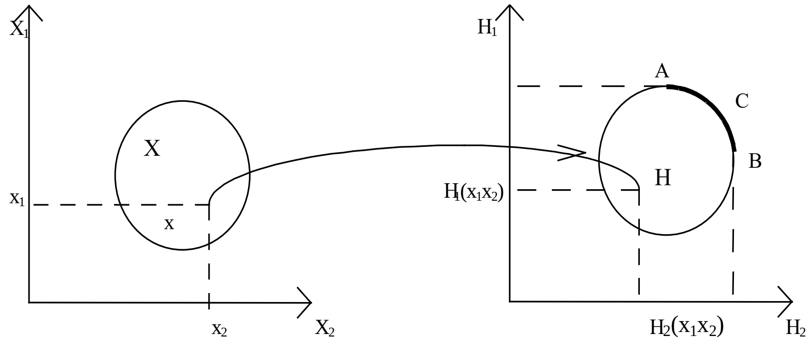


Рис. 1.1.
Множество возможных стратегий x_1, x_2 двух игроков

Рис. 1.2.
Множество ситуаций оптимальных по Парето (дуга АСВ)

На рис. 1.2 дуга АСВ соответствует множеству ситуаций оптимальных по Парето, так как никакими совместными усилиями игроков, нельзя увеличить выигрыш одного из них, не уменьшив при этом выигрыш другого.

Определение 7. Игра G' называется аффинно-эквивалентной игре G, если число игроков $N' = N$, стратегии одной игры $X_i' = X_i$, $i \in N$ (отсюда следует, что игры G и G' имеют одно и то же множество ситуаций), а функции выигрыша:

$$H_i'(x) = k_i H_i(x) + c_i, \qquad i \in N,$$

где $k_i > 0$, $i \in N$.

Различие между двумя аффинно-эквивалентными играми по существу состоит в различии начальных капиталов игроков и в соотношениях единиц измерения выигрышей, определяемых соответственно величинами C_i и k_i.

Для однородно аффинно-эквивалентных игр $k_i = k$, $i \in N$.

Очевидно, что для антагонистических игр понятия аффинной эквивалентности и однородной аффинной эквивалентности совпадают.

Теорема 1. Всякая бескоалиционная игра с постоянной суммой аффинно-эквивалентна некоторой игре с нулевой суммой.

Теорема 2. Аффинно-эквивалентные игры имеют одни и те же оптимальные по Парето ситуации.

Рассмотрим пример для нахождения ситуации, оптимальной по Парето.

Пример 2. Игра «Дилемма заключенного»

Каждый из двух игроков располагает двумя стратегиями: A_2 и B_2 – стратегии агрессивного поведения, а A_1 и B_1 – миролюбивое поведение. Предположим, что «мир» (оба игрока миролюбивы) лучше для обоих игроков, чем «война». Случай, когда один игрок агрессивный, а другой миролюбивый, выгоднее агрессору. Пусть матрицы выигрышей игроков 1 и 2 в данной биматричной игре имеют вид:

$$\begin{array}{c|cc} & B_1 & B_2 \\ \hline A_1 & 2 & 0 \\ A_2 & 3 & 1 \end{array}$$

$$H_1 = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}\begin{array}{c} B_1 \quad B_2 \\ \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix} \end{array}, \qquad H_2 = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}\begin{array}{c} B_1 \quad B_2 \\ \begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \end{array}.$$

Для обоих игроков агрессивные стратегии A_2 и B_2 доминируют мирные стратегии A_1 и B_1. Таким образом, единственное равновесие в доминирующих стратегиях имеет вид (A_2, B_2), т.е. постулируется, что результатом некооперативного поведения является война. В то же время исход (A_1, B_1) (мир) дает больший выигрыш для обоих игроков. Таким образом, некооперативное эгоистическое поведение вступает в противоречие с коллективными интересами. Коллективные интересы диктуют выбор мирных стратегий. В то же время, если игроки не обмениваются информацией, война является наиболее вероятным исходом.

В данном случае ситуация (A_1, B_1) является оптимальной по Парето. Однако эта ситуация неустойчива, что ведет к возможности нарушения игроками установленного соглашения. Действительно, если первый игрок нарушит соглашение, а второй не нарушит, то выигрыш первого игрока увеличится до трех, а второго упадет до нуля и, наоборот. Причем, каждый игрок, не нарушающий соглашение, теряет больше при нарушении соглашения вторым игроком, нежели в том случае, когда они оба нарушают соглашение.

Как видим, в отличие от примера 1 (игра «семейный спор»), где кооперация игроков была им выгодна, в этом примере кооперация не выгодна для игроков.

1.3. Состояние равновесия по Нэшу

Определение 8. Стратегии ${x^*}_i$, $i = \overline{1, N}$ в игре N лиц с ненулевой суммой называются оптимальными по Нэшу (решением по Нэшу или точкой равновесия по Нэшу) (*примечание:* Джон Форбс Нэш (1928–2015) – американский математик, работавший в области теории игр и дифференциальной геометрии. Лауреат Нобелевской премии (1994 г.) по экономике за фундаментальный анализ равновесия в теории некооперативных игр. Эту диссертационную работу по теории игр Джон Нэш написал в 1949 году, в возрасте 21 года. Джон Нэш известен широкой публике по биографической драме режиссера Рона Ховарда «Игры разума». Джон Нэш погиб в автокатастрофе в возрасте 86 лет), если для каждого $i = \overline{1, N}$, $x \in X$

$$H_i(x^*) = max\, H_i\,(x), \tag{1.3}$$

т. е. каждый игрок в ситуации x^* получает свой наибольший выигрыш (в той мере, в какой это от него самого зависит).

В рассмотренной игре «семейный спор» ситуации (A_1, B_1) и (A_2, B_2) являются решением по Нэшу, а в игре «дилемма заключенного» таковой является ситуация (A_2, B_2).

В случае антагонистической игры равновесные стратегии игроков совпадают с их оптимальными стратегиями. Для неантагонистических игр понятие оптимальной стратегии игрока нередко вообще не имеет смысла: в таких играх оптимальными оказываются не стратегии отдельных игроков, а их сочетания (ситуации) и притом для всех игроков сразу. Поэтому в общих бескоалиционных играх оптимальными следует понимать совокупность действия всех игроков (ситуацию в игре), которая и является решением игры.

Как и в играх двух лиц с нулевой суммой, игра N лиц с ненулевой суммой может не иметь решение по Нэшу в чистых стратегиях. Приведенное выше определение 7 решения по Нэшу в чистых стратегиях легко обобщается на случай смешанных стратегий путем подстановки смешанных стратегий $X_i = \left\| x_{i_1}, x_{i_2}, \dots x_{i_N} \right\|$, $i \in \overline{1, I}$, представляющих собой вероятностное распределение на множестве чистых стратегий.

Таким образом мы приходим к вероятностному распределению X на множестве всех ситуаций. Другими словами, ситуация игры в смешанных стратегиях реализует различные ситуации в чистых стратегиях с некоторыми вероятностями. Значение функции выигрыша каждого из игроков оказывается случайной величиной. В качестве значения функции выигрыша принимается математическое ожидание этой случайной величины.

Дж. Нэшем было доказано существование ситуации равновесия для любой конечной бескоалиционной игры.

Теорема Нэша. В каждой бескоалиционной игре существует хотя бы одна ситуация равновесия в классе смешанных стратегий.

Если, кроме того, функции $H_i(x)$ выпуклые вверх, то решение по Нэшу достигается в классе чистых стратегий.

Заметим, что принципиальная важность теоремы Нэша ограничивается существованием ситуации равновесия. Непосредственно применять ее для нахождения таких ситуаций не удается.

Дж. Нэшем была доказана также следующая теорема.

Теорема 3. Конечная бескоалиционная игра имеет симметричные ситуации равновесия, в которых игроки, равноправно входящие в игру согласно ее условиям, фактически оказываются в одинаковом положении.

Ее применение позволяет избежать отдельных ошибок при решении конечных бескоалиционных игр.

Одним из простых классов бескоалиционных игр, ход решения которых поддается элементарному описанию, являются биматричные игры, представляющие собой бескоалиционную игру двух игроков с ненулевой суммой.

1.4. Описание биматричных игр

Пусть в биматричной игре игрок 1 имеет m чистых A_i, $i=\overline{1,m}$, а игрок 2 имеет n чистых стратегий B_j, $j=\overline{1,n}$ и в каждой ситуации (A_i, B_j) игрок 1 получает выигрыш a_{ij}, а игрок 2 – выигрыш b_{ij}. Значение обеих функций выигрыша игроков естественно представить в виде пары матриц:

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots. & \dots & \dots. \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}, \qquad B=\begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots. & \dots & \dots. \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{vmatrix}.$$

Поэтому такие игры и называются биматричными. Используют также запись платежных матриц A и B в следующем виде:

a_{11} b_{11}	…	a_{1n} b_{1n}
…	…	…
a_{m1} b_{m1}	…	a_{mn} b_{mn}

где «северо-западное» число в каждой клетке обозначает выигрыш первого игрока, а «юго-восточное» – выигрыш второго игрока.

Смешанные стратегии X и Y, естественно, понимаются как векторы, причем:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$$

Выигрыш игроков 1 и 2 при применении смешанных стратегий равны:

$$H_1(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \mathrm{X} * A * Y^T, \qquad H_2(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \mathrm{X} * B * Y^T,$$

где T – означает транспонирование, т. е. вектор строка записывается как вектор столбец;

$X = |x_1, x_2, \dots, x_m|$, $Y = |y_1, y_2, \dots, y_n|$ – смешанные стратегии игроков 1 и 2 соответственно.

Определение ситуации равновесия для случая биматричной игры приобретает следующую формулировку. Ситуация (X, Y) в биматричной игре с матрицами выигрышей A и B является равновесной, если:

$$A_i \mathrm{Y}^T \le \mathrm{X}AY^T, \quad i=\overline{1,m}. \tag{1.4}$$

$$XB_j \le \mathrm{X}BY^T, \quad j=\overline{1,n}. \tag{1.5}$$

Очевидно, что при B = -A биматричная игра превращается в матричную.

В качестве примера рассмотрим биматричную игру «Торг».

Пример 3. Игра «Торг»

Игрок 1 продает неделимый товар игроку 2. Игрок 1 должен решить, какую назначить цену: высокую или низкую. Для покупателя в принципе приемлемы обе цены. Покупатель не может спорить о цене, он может либо сделать покупку, либо отказаться от нее.

Платежные матрицы игроков имеют вид:

		Игрок 2	
		B_1 покупка	**B_2 отказ**
Игрок 1	**A_1 Высокая цена**	*10* *5*	*0* *0*
	A_2 Низкая цена	*5* *10*	*0* *0*

Описание всех возможных ситуаций в этой игре позволяет определить, что ситуация (A_1, B_1) является оптимальной по Парето и по Нэшу. Ситуация (A_2, B_2) также является оптимальной по Парето, но не является устойчивой, т. е. оптимальной по Нэшу.

Рассмотрим способ нахождения устойчивых ситуаций для биматричных игр с произвольным количеством чистых стратегий игроков.

1.5. Решение биматричных игр

Рассмотрим биматричную игру 2x2 с матрицами выигрышей:

$$\mathrm{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix},$$

соответственно игроков 1 и 2. Как и в случае матричных игр, смешанные стратегии полностью описываются вероятностями p и q выбора игроками своих первых чистых стратегий (вторые чистые стратегии выбираются, очевидно, с вероятностями 1-p и 1-q.

Опишем порознь множество приемлемых ситуаций, для каждого из игроков и изобразим эти множества на единичном квадрате p, q, где $p \in [0,1]$ и $q \in [0,1]$.

Начнем с описания ситуаций, приемлемых в игре для игрока 1.

Приемлемость ситуации (X, Y) для игрока 1 в биматричной игре означает, что

$$\mathrm{A}_1 Y^T \leq X\mathrm{A}Y^T; \tag{1.6}$$

$$\mathrm{A}_2 Y^T \leq X\mathrm{A}Y^T, \tag{1.7}$$

где A_1 и A_2 – вектор строки, соответствующие первой и второй строке матрицы А, соответственно. Эти условия приемлемости никак не связаны с матрицей В – матрицей выигрышей игрока 2. Поэтому они будут совпадать с аналогичными условиями матричной игры с платежной матрицей А.

Приемлемость ситуации (X, Y) для игрока 2 означает, что:

$$XB_1 \leq XBY^T, \tag{1.8}$$

$$XB_2 \leq XBY^T, \tag{1.9}$$

где B_1 и B_2 – вектор-столбцы, соответствующие первому и второму столбцу матрицы В, соответственно.

В общем случае, $X = (p \quad 1-p)$. Рассмотрим три случая:

а) $p = 1$, ($X=(1 \;\; 0)$). Тогда выражение (1.6) превращается в тождественное равенство, а условием приемлемости данной ситуации для игрока 1 оказывается неравенство (1.7). Для рассматриваемого случая его можно записать как

$$A_2 Y^T \leq A_1 Y^T, \tag{1.10}$$

б) $p = 0$ ($X=(0 \;\; 1)$). В этом случае выражение (1.7) превращается в тождественное равенство, а условием приемлемости данной ситуации для игрока 2 оказывается неравенство (1.6). Для рассматриваемого случая оно имеет вид

$$A_1 Y^T \leq A_2 Y^T, \tag{1.11}$$

в) $0 < p < 1$ ($X=(p \quad 1-p)$). В этом случае оба неравенства (1.6) и (1.7) превращаются в равенство, и условием приемлемости становится

$$A_1 Y^T = A_2 Y^T. \tag{1.12}$$

Опишем ситуации приемлемости (1.10), (1.11) и (1.12) в развернутом виде. Так как:

$$XAY^T = \left| p, 1-p \right| \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} q \\ 1-q \end{vmatrix} = \tag{1.13}$$

$$= (a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}) \cdot p \cdot q + (a_{12} - a_{22}) \cdot p + (a_{21} - a_{22}) \cdot q + a_{22}$$

то соотношения (1.10), (1.11) и (1.12) можно соответственно записать как:

$$(a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}) \cdot q \geq a_{22} - a_{12}; \tag{1.14}$$

$$(a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}) \cdot q \leq a_{22} - a_{12}; \tag{1.15}$$

$$(a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}) \cdot q = a_{22} - a_{12}. \tag{1.16}$$

Таким образом, приемлемые для игрока 1 ситуации (X,Y) могут быть одного из трех типов:

$$(1, q), \qquad где \qquad q \geq \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \tag{1.17}$$

$$(0, q), \qquad где \qquad q \leq \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \tag{1.18}$$

$$(p, q), \quad \text{где} \quad q = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \quad 0 < p < 1. \tag{1.19}$$

Неравенства (1.17) и (1.18) верны в случае, если $a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21} > 0$. Если $a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21} < 0$, то знак неравенства в соотношениях (1.17) и (1.18) необходимо поменять на противоположный.

Если величина $a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21} = 0$, а $a_{22} - a_{12} \neq 0$, то (1.19) не имеет место, поэтому будет выполняться или (1.17) и (1.18), и притом со знаком строгого неравенства.

Если же $a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21} = 0$ и $a_{22} - a_{12} = 0$, то все условия (1.17), (1.18) и (1.19) выполняются тождественно, и приемлемыми для игрока 1 будут вообще все ситуации.

Описание ситуаций приемлемости в развернутом виде для игрока 2 получаем аналогично из неравенств (1.8) и (1.9).

В общем случае Y=$(q \quad 1-q)$. Для трех случая получаем:

а) q=1 (Y=(1 0)). В этом случае приемлемость ситуации (X, Y) равносильна неравенству:

$$Xb_2 \le Xb_1, \tag{1.20}$$

или в развернутом виде (p, 1-p) $\begin{vmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{vmatrix} \le |p, 1-p| \cdot \begin{vmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{vmatrix};$

$$(b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21}) \cdot p \ge b_{22} - b_{21}. \tag{1.21}$$

б) q=0 (Y=(0 1)). В этом случае приемлемость ситуации (X, Y) определяется неравенством

$$Xb_1 \le Xb_2, \tag{1.22}$$

или в развернутом виде

$$(b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21}) \cdot p \le b_{21} - b_{12}. \tag{1.23}$$

в) 0<q<1 (Y = (q 1–q)). Условие приемлемости

$$Xb_1 = Xb_2, \tag{1.24}$$

в развернутом виде

$$(b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21}) \cdot p = b_{22} - b_{21}. \tag{1.25}$$

Таким образом, приемлемые для игрока 2 ситуации (X,Y) могут быть одного из трех типов:

$$(p,1) \quad где \quad p \ge \frac{b_{22} - b_{21}}{b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21}}; \tag{1.26}$$

$$(p,0) \quad где \quad p \le \frac{b_{22} - b_{21}}{b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21}}; \tag{1.27}$$

$$(p,q) \quad где \quad p = \frac{b_{22} - b_{21}}{b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21}}. \tag{1.28}$$

Вновь подчеркнем, что неравенства (1.26) и (1.27) справедливы, если их знаменатель больше нуля. Если $в_{11} + в_{22} - в_{12} - в_{21} < 0$, то знак неравенства в выражениях (1.26) и (1.27) необходимо поменять на противоположный.

Для определения ситуаций, приемлемых одновременно как для первого, так и для второго игроков, удобно все найденные приемлемые ситуации представить на единичном квадрате (рис. 1.3).

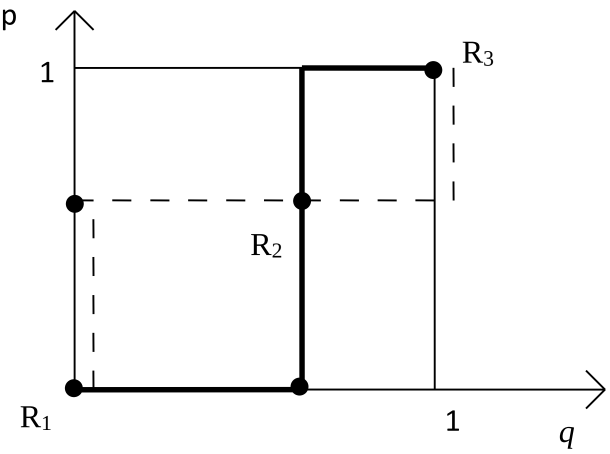


Рис. 1.3. Представление решения для игрока 1

Для случаев, когда $a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21} \neq 0$ и $b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21} \neq 0$ приемлемые ситуации игроков 1 и 2 составляют трехзвенные зигзаги. Причем, ситуации равновесия во вполне смешанных стратегиях игрока 2 совпадают с поведением игрока 2 в матричной игре с матрицей выигрыша А, а поведение игрока 1 – с поведением игрока 1 в матричной игре с матрицей выигрышей В.

Таким образом, описанное равновесное поведение игроков оказывается ориентированным не столько на максимализацию собственного выигрыша, сколько на минимизацию выигрыша противника. Так, «антагонизм поведения» может возникнуть и при отсутствии «антагонизма интересов».

В приведенном на рис. 1.3 решении игры три ситуации равновесия, соответствуют точкам R_1, R_2, R_3.

Если бы зигзаги приемлемых ситуаций были одинаковой ориентации, как показано на рис. 1.4, то пересечение приемлемых ситуаций игрока 1 и игрока 2 состояло бы из одной точки R.

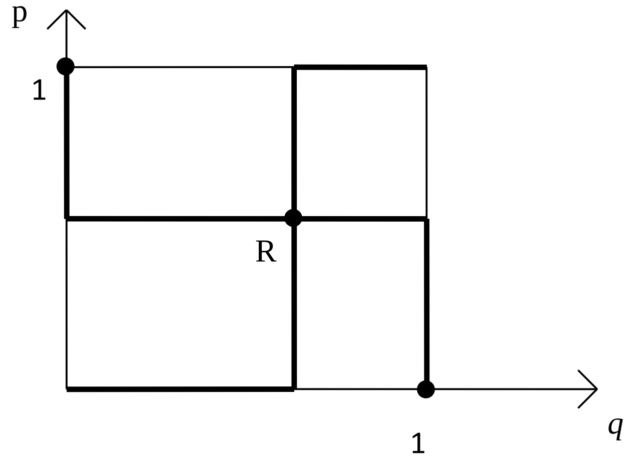


Рис. 1.4. Представление решения для игрока 1 и 2

При решении биматричных игр большей размерности необходимо решать большую систему линейных неравенств, определяемых выражениями (1.6), (1.7) и (1.8), (1.9), а затем таким же конечно-рациональным путем находить точки пересечения приемлемых ситуаций игрока 1 и игрока 2. Причем, любая конечная бескоалиционная игра имеет конечное и нечетное чисто ситуаций равновесия (решений игры). Поиск ситуаций равновесия в этом случае следует осуществлять с применением ПЭВМ.

1.6. Пример решения биматричной игры

Формулировка игры «Борьба за рынки»

Небольшая фирма (игрок 1) намерена сбыть крупную партию товара на одном из двух рынков, контролируемых другой, более крупной фирмой (игрок 2). Для этого оно может предпринять на одном из рынков соответствующие действия (например, развернуть рекламную кампанию). Господствующий на рынках игрок 2 может попытаться воспрепятствовать этому, предприняв на одном из двух рынков предупредительные меры. Игрок 1, не встретивший на рынке препятствий, захватывает его; встретившись с сопротивлением – терпит поражение. Выборы фирмами рынков являются их чистыми стратегиями.

Пусть проникновение игрока 1 на первый рынок более выгодно для него, чем проникновение на второй, но борьба за первый рынок требует больших средств. Например, победа игрока 1 на первом рынке принесет ему вдвое больший выигрыш, чем на втором, но зато поражение на первом рынке полностью его разоряет (проигрыш равен 10), а игрока 2 избавляет от конкурента (выигрыш равен 5).

Описанная биматричная игра может быть задана матрицами выигрышей:

$$A=\begin{vmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \qquad B=\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

<u>**Решение игры.**</u> В соответствии с выражениями (1.6) и (1.7) приемлемыми ситуациями для игрока 1 будут те, которые удовлетворяют условиям:

$$|-10,2|\cdot\begin{vmatrix} q \\ 1-q \end{vmatrix} \le |p,1-p|\cdot\begin{vmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} q \\ 1-q \end{vmatrix};$$
$$|1,-1|\cdot\begin{vmatrix} q \\ 1-q \end{vmatrix} \le |p,1-p|\cdot\begin{vmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} q \\ 1-q \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим три случая:

а) p = 1 (X = (1, 0)). В соответствии с выражением (1.10) имеем:

$$|1,-1|\cdot\begin{vmatrix} q \\ 1-q \end{vmatrix} \le |-10,2|\cdot\begin{vmatrix} q \\ 1-q \end{vmatrix}.$$

Откуда $q \le \frac{3}{14}$.

б) p = 0 (X=(0, 1)). В соответствии с выражением (1.11) имеем:

$$|-10{,}2| \cdot \begin{vmatrix} q \\ 1-q \end{vmatrix} \le |1{,}-1| \cdot \begin{vmatrix} q \\ 1-q \end{vmatrix},$$

или $q \ge \frac{3}{14}$.

в) $0 < p < 1$ (X = $(p,\ 1-p)$). В соответствии с выражением (1.12) или в развернутом виде (5.19) получаем:

$$q = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{-1-2}{-10-1-2-3} = \frac{3}{14}.$$

Приемлемые ситуации для игрока 2 в соответствии с выражениями (1.26), (1.27) и (1.27) следующие:

а) $(p,1)$, где $p \ge \frac{b_{22} - b_{21}}{b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21}} = \frac{1+1}{5+1+2+1} = \frac{2}{9}$;

б) $(p,0)$, где $p \le \frac{2}{9}$;

в) (p,q), где $p = \frac{2}{9}$.

Множества всех приемлемых ситуаций игрока 1 и игрока 2 изображены на рис. 1.5 (для игрока 2 соответствующее множество показано пунктиром). Зигзаги приемлемых ситуаций пересекаются в единственной точке $(\frac{2}{9}, \frac{3}{14})$, которая и оказывается единственной ситуацией равновесия. Эта ситуация равновесия является ситуацией равновесия в смешанных стратегиях.

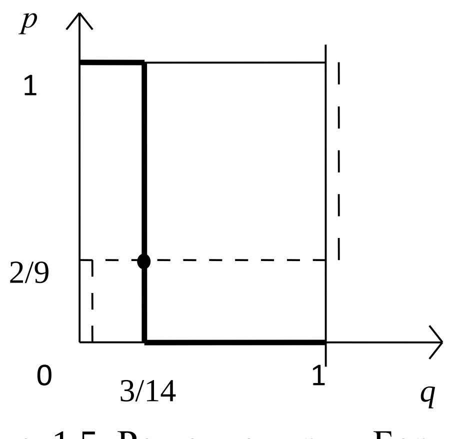


Рис. 1.5. Решение игры «Борьба за рынки»

Таким образом, оптимальными стратегиями по Нэшу являются $X = \left|\frac{2}{9}; \frac{7}{9}\right|$ и $Y = \left|\frac{3}{14}; \frac{11}{14}\right|$. При этом цена игры для игрока 1 $\nu_A = XAY^T = \sum_i \sum_j x_i a_{ij} y_j =$
$= \frac{2}{9} \bullet (-10) \bullet \frac{3}{14} + \frac{7}{9} \bullet 1 \bullet \frac{3}{14} + \frac{2}{9} \bullet 2 \bullet \frac{11}{14} + \frac{7}{9} \bullet (-1) \bullet \frac{11}{14} = -\frac{71}{63}$.

Цена игры для игрока 2 $\nu_B = XBY^T = \sum_i \sum_j x_i b_{ij} y_j =$
$= \frac{2}{9} \bullet 5 \bullet \frac{3}{14} + \frac{7}{9} \bullet (-1) \bullet \frac{3}{14} + \frac{2}{9} \bullet (-2) \bullet \frac{11}{14} + \frac{7}{9} \bullet 1 \bullet \frac{11}{14} = \frac{1}{3}$.

1.7. Метастратегии и метарасширения

Смешанные стратегии определяются как случайные величины, реализующиеся в виде чистых стратегий. Дальнейшее расширение понятия стратегии сводится к пониманию новых, обобщенных стратегий как функции, в которой исходные стратегии принимаются константами. В качестве аргументов, от которых целесообразно рассматривать функции – стратегии, можно брать стратегии других игроков.

Далее мы ограничимся случаем, когда каждый раз рассматривается функция от стратегии только одного игрока.

Определение 9. В бескоалиционной игре всякая функция $F_{k_{ij}} : X_k \to X_j$ (которая исходя из стратегии X_k игрока k определяет стратегию X_j игрока j называется метастратегией игрока j (в ответ на стратегию игрока k).

Содержательно всякую метастратегию $F_{k_{ij}}$ можно понимать как способ выбора игроком j некоторой своей стратегии в зависимости от получаемой им информации о стратегии, выбираемой игроком k. Если рассматривать ситуацию в бескоалиционной игре как некоторое соглашение, некоторый договор между игроками, а общую стратегию – как принимаемое на себя в договоре обязательство, то метастратегию можно понимать как своего рода условное обязательство: «в случае если игрок k поступит так-то, я, игрок i, выбираю такую-то свою стратегию, а если этак-то, то такую-то».

Очевидно, множество всех метастратегий i в ответ на стратегию k можно изобразить в степени множеств $X_j^{X_k}$.

Определение 10. Бескоалиционные игры G, с тем же множеством игроков N, что и игра Г называется метаигрой над игрой Г (метарасширением игры Г), если для некоторых $j, k \in N$

$$Y_i = \begin{cases} X_j & \text{для} \quad i \neq j, \\ X_i^{X_k} & \text{для} \quad i = j, \end{cases}$$

и для любой метастратегии $y_i \in Y_i$ и любого игрока $i \in I$

$$G_i(X / y_i) = H_i(x / y_{i(x_k)}),$$

где x_k – стратегия игрока k, входящая в ситуацию X, H – функция выигрышей в игре Г.

Очевидно, процесс образования метаигр (метарасширений игр) поддается неограниченному интегрированию: от метаигры можно переходить к ее метаигре (называемой второй метаигрой), от нее к третьей метаигре и т. д. В этом отношении метарасширения игр отличаются большим разнообразием, чем смешанные расширения.

Для метастратегических расширений доказаны следующие важные теоремы.

Теорема 4. Каждая конечная бескоалиционная игра двух лиц имеет в своем первом метарасширении ситуации равновесия.

Доказанная теорема не противоречит той возможности, что ситуацией равновесия может обладать уже сама исходная игра Г.

Теорема 5. Каждая конечная бескоалиционная игра двух лиц имеет в своем третьем метарасширении ситуацию, которая является одновременно ситуацией равновесия и оптимальной по Парето.

Пример. Биматричная игра 2x2 имеет следующие матрицы выигрышей игроков А и В:

$$A = \begin{vmatrix} -8 & 0 \\ -10 & -1 \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} -8 & -10 \\ 0 & -1 \end{vmatrix},$$

В соответствии с выражениями (1.17), (1.18) и (1.19) находим приемлемые ситуации (X,Y) игрока 1:

а) $(1,q),$ где $q \geq \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{-1-0}{-8-1+10} = -1,$ (q может быть в любом интервале [0, 1];

б) $(0,q),$ где $q \leq -1$ (ситуация невозможна);

в) $(p,q),$ где $q = -1$ (ситуация невозможна).

В соответствии с выражениями (1.25), (1.27) и (1.28) находим приемлемые ситуации (X,Y) игрока 2:

а) $(p,1),$ где $p \geq \frac{b_{22} - b_{21}}{b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21}} = \frac{-1+0}{-8-1+10+0} = -1,$

(p может быть любым в интервале [0, 1];

б) $(p,0),$ где $p \leq -1$ (ситуация невозможна);

в) $(p,q),$ где $p = -1$ (ситуация невозможна);

Для наглядности на рис. 1.6 изображены зигзаги, описывающие и невозможные ситуации за пределами допустимых изменений вероятностей p, q).

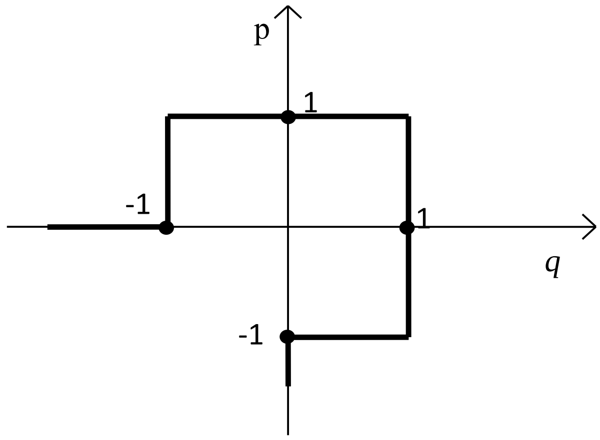


Рис. 1.6. Графическое изображение невозможных ситуаций

Единственной ситуацией равновесия в рассматриваемой игре оказывается ситуация (1,1). В этой ситуации каждый из участников теряет 8. Вместе с тем очевидно, что в ситуации (0,0) каждый игрок теряет лишь по единице. Однако эта ситуация неустойчива, каждый игрок, изменяя в ней произвольным образом свою стратегию, увеличивает свой выигрыш.

Множество всех реализуемых векторов выигрышей для рассматриваемой игры имеет вид, изображенный на рис. 1.7.

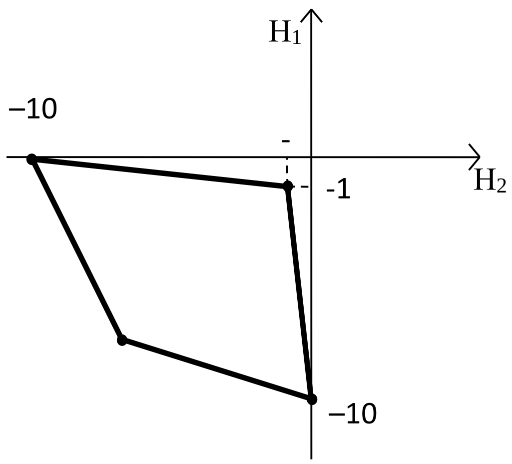


Рис. 1.7. Множество возможных векторов для игры

Очевидно, что ситуации с выигрышами (–1, –1), (–10,0), (0,–10) являются оптимальными по Парето. При этом первая из них, в которой получаются наибольшие выигрыши (–1,–1) для каждого из игроков лучше, чем равновесная.

Противоречие между осуществимостью ситуации, выражаемой в виде равновесности и ее выгодности, которой соответствует оптимальность по Парето, имеет по существу ту же природу, что и противоречие между максиминным и минамаксным выигрышами. Оно должно разрешаться при помощи аналогичных приемов, состоящих в расширении уже имеющихся стратегий, т.е. переходу к метарасширениям.

Первая метастратегия игрока 2 состоит в выборе им своей второй стратегии в ответ на вторую стратегию игрока 1 и первой стратегии в ответ на первую.

Вторая метастратегия игрока 1 состоит в выборе им второй своей стратегии, если игрок 2 выберет ту же стратегию, что и 1 и в выборе им своей первой стратегии во всех остальных случаях.

Содержательно это можно представить себе так, что игрок 2 исходит из тезиса «око за око», а игрок 1 – из более изощренных соображений, которые можно расценить как эгоцентризм («поддерживать тех, кто действует так же, как я) и ксенофобию («выступаю против всех тех, кто действует иначе, чем я»).

Задачи для самостоятельного решения

I. Найти ситуации оптимальные по Парето и ситуации устойчивые по Нэшу для следующих биматричных игр:

1. $A = \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ -9 & 0 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} -7 & -9 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$,

2. $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$,

3. $A = \begin{vmatrix} 0 & 17 \\ -3 & -7 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 8 & 7 \end{vmatrix}$,

4. $A = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$,

5. $A = \begin{vmatrix} 0 & 24 \\ 22 & -18 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 30 & 16 \\ 18 & 22 \end{vmatrix}$,

6. $A = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$,

7. $A = \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 12 \end{vmatrix}$,

8. $A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$.

II. Решить бескоалиционную игру «Экологический конфликт».

Формулировка игры «Экологический конфликт». Два промышленных предприятия (А и В), расположенные вблизи обширного водоема, берут из него воду для технических нужд и после использования сбрасывают ее обратно в водоем. Если суммарный объем сбрасываемой (загрязненной) воды не превышает некоторого предела δ, то происходит ее естественное очищение, и общий водный ресурс сохраняется. Если же указанный предел нарушен, то загрязненность водоема интенсивно растет. Возникает проблема его восстановления за счет предприятий и уплаты штрафов, общая стоимость чего составляет Θ.

Чтобы избежать неприятных последствий, приходится строить очистные сооружения, состоящие из отдельных стандартных блоков, рассчитанных на определенные объемы пропускаемой через них воды (пусть каждый блок восстанавливает 25 % используемой воды). Затраты на приобретение, монтаж и эксплуатацию одного блока равны С.

Суть конфликта, возникающего между предприятиями, сводится к их стремлению обеспечить себе благоприятные условия деятельности путем более свободного расходования природной воды. Это отрицательно влияем на состояние источника и через него – на ход производства, качество продукции обоих предприятий. Все оказывается взаимосвязанным, и появляется заинтересованность в поиске решений, приемлемых для конфликтующих сторон, хотя никакой договоренности между ними не предусматривается.

Математическая модель. Данный конфликт можно представить как бескоалиционную игру двух лиц следующим образом.

Пусть количество воды, потребляемой каждым предприятием в его технологическом цикле равно единице (100 т, 10 цистерн, и т. д.). Количество очищаемой воды составляет $1 - x$ на предприятии А; $1 - y$ на предприятии В, где чистые стратегии игрока А = |0; 0,25; 0,5; 0,75; 1|, в зависимости от числа применяемых очистных блоков. Чистые стратегии игрока В = |0; 0,25; 0,5; 0,75; 1|.

Расходы предприятия А составляют:

$4C(1 - x)$, если $x + y \le \delta$;

$4C(1 - x) + \Theta$, если $x + y > \delta$,

а расходы предприятия В –

$4C(1 - y)$, если $x + y \le \delta$;

$4C(1 - y) + \Theta$, если $x + y > \delta$.

Данные формулы позволяют составить платежные матрицы игроков А и В. Для случая $\delta = \frac{1}{3}$ имеем:

B \ A	B_4	B_3	B_2	B_1	B_0
A_4	4C 4C	4C 3C	4C+Θ 2C+Θ	4C+Θ C+Θ	4C+Θ Θ
	3C	3C+Θ	3C+Θ	3C+Θ	3C+Θ

A_3	$4C$	$3C+\Theta$	$2C+\Theta$	$C+\Theta$	Θ
A_2	2 $C+\Theta$ $4C+\Theta$	2 $C+\Theta$ $3C+\Theta$	2 $C+\Theta$ $2C+\Theta$	2 $C+\Theta$ $C+\Theta$	2 $C+\Theta$ Θ
A_1	C $+\Theta$ $4C+\Theta$	C $+\Theta$ $3C+\Theta$	C $+\Theta$ $2C+\Theta$	C $+\Theta$ $C+\Theta$	C $+\Theta$ Θ
A_0	Θ $4C+\Theta$	Θ $3C+\Theta$	Θ $2C+\Theta$	Θ $C+\Theta$	Θ Θ

Индекс при чистых стратегиях игроков указывает на количество используемых очистных блоков (например A_3 – предприятие А использует 3 очистных блока; B_0 – предприятие В не использует ни одного очистного блока).

Найти ситуации оптимальные по Парето и ситуации равновесия по Нэшу при следующих исходных данных:

9. $C \gg \Theta$;
10. $5C = \Theta$;
11. $4C = \Theta$; $\delta = \frac{1}{2}$;
12. $2C = \Theta$; $\delta = \frac{1}{3}$;
13. $C = 2\Theta$; $\delta = \frac{1}{3}$;
14. $C = \Theta$; $\delta = \frac{1}{2}$;
15. $C \ll \Theta$;
16. $5C = \Theta$; $\delta = \frac{1}{2}$;
17. $2C = \Theta$; $\delta = \frac{1}{2}$;
18. $C = 3\Theta$; $\delta = \frac{1}{3}$;
19. $C = \Theta$; $\delta = \frac{1}{3}$;
20. $C = 4\Theta$; $\delta = \frac{1}{3}$.

III. Найти множества всех ситуаций оптимальных по Парето в следующих биматричных играх:

21. $A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 8 \end{vmatrix}$.

22. $A = \begin{vmatrix} 3 & 8 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

23. $A = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 7 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

24. $A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

25. $A=\begin{vmatrix} 4 & 0 & 10 \\ 4 & 4 & 6 \end{vmatrix}, \quad B=\begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 14 & 16 \end{vmatrix}.$

26. $A=\begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad B=\begin{vmatrix} 7 & 1 & 8 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$

27. $A=\begin{vmatrix} 2 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad B=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$

28. $\mathrm{A}=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 & 8 \\ 9 & 5 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & 9 \\ 8 & 7 & 1 & 4 \end{vmatrix}, \quad B=\begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 10 & 1 \\ 9 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 8 & 6 & 3 \end{vmatrix}.$

2. ПОЗИЦИОННЫЕ ИГРЫ

2.1. Общие сведения

В общих играх число игроков может быть больше двух, некоторые ходы возможно являются случайными, игроки могут иметь по несколько ходов, причем информация о прошедшем может меняться от хода к ходу. Такие игры называются позиционными или играми в развернутой форме.

Пример. Выборы с правом вето.

Пусть три игрока (N = 3) выбирают одного из четырех (G = 4) кандидатов в президенты. Правило выбора таково: начиная с первого игрока, каждый игрок налагает вето на выбор одного из неотведенных кандидатов. Единственный оставшийся кандидат считается избранным. Функции выигрышей $\mathbf{U_i}$ для каждого из игроков в зависимости от выбранного в президенты кандидата имеют вид:

$U_1=\|5,4,3,7\|;$

$U_2=\|6,7,5,4\|;$

$U_3=\|3,8,5,4\|.$

В развернутой форме данная игра может быть представлена в виде следующего дерева игры (рис. 2.1), где около ветвей поставлены номера отводимых кандидатов, а у конечных вершин – номера победивших кандидатов. Если победил, например, кандидат под номером 4, то выигрыш первого игрока будет равен 7, а для второго и третьего игроков – 4.

Позиционные игры должны включать следующие элементы описания:

– последовательность личных и случайных ходов игроков;
– выборы, которые могут делать игроки при каждом личном ходе;

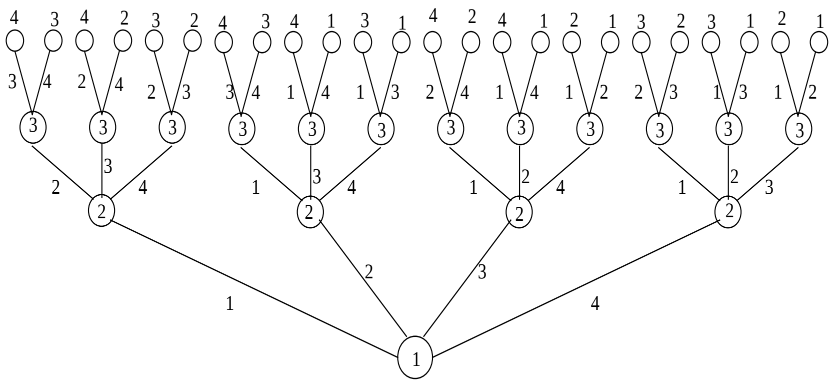


Рис. 2.1. Дерево состояний игры «Выборы с правом вето»

– исходы случайных ходов и распределение вероятностей этих исходов;
– информацию, доступную игрокам при выполнении личного или случайного хода;
– правила окончания игры и подсчеты выигрыша игроков.

Число ходов в данной игре не фиксируется. В общем случае, оно зависит от последовательности выборов, исходов. Однако, правила должны гарантировать, что игра в конце концов закончится.

Относительно ходов правила игры имеют следующую структуру. Для первого хода правила указывают его вид. Если это личный ход, то правила перечисляют возможные варианты и указывают игрока, который делает выбор. Если это случайный ход, то перечисляются возможные варианты и обуславливаются вероятности их выбора. Для последующих ходов λ $(\lambda > 1)$ правила определяют в зависимости от выбора и исходов предыдущих (λ-1) ходов, будет ли λ-й ход личным или случайным. Если ход личный, то перечисляются возможные варианты игрока, который будет делать выбор, и определяется информация о выборах и исходах при первых (λ-1) ходах, которой располагает игрок к моменту своего выбора. Если ход случайный, то перечисляются возможные варианты и вероятности их выбора. Правила, наконец, определяют в зависимости от выборов и исходов в последовательности ходов, когда игра должна закончиться и выигрыш каждого из игроков.

2.2. Задание позиционной игры в виде дерева

Позиционные игры удобно задавать графически в виде дерева игры (рис. 2.2). Дерево состоит из вершин, соединенных между собой ветвями. Вершины дерева называют еще позициями игры, а его ветви – ходами игрока.

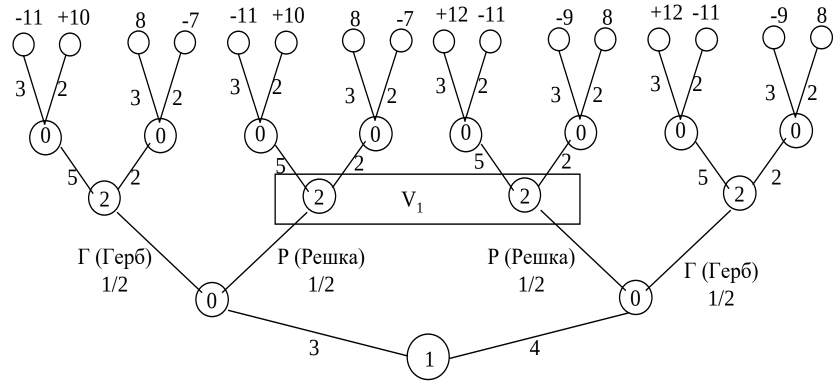


Рис. 2.2. Дерево игры, с определением выбора по случайному испытанию

Основными свойствами дерева игры являются:

- дерево содержит одну единственную начальную вершину («корень» дерева), в которую не входит ни одна ветвь;
- дерево имеет не менее одной вершины, из которой не выходит ни одна ветвь. Эти вершины называются конечными вершинами;
- из корня дерева имеется единственный путь к каждой из остальных вершин дерева.

Вершина соответствует определенному состоянию игры перед очередным ходом. Каждую вершину занимает только один игрок, и ей присваивается номер, равный номеру игрока, который делает выбор.

Вершины, соответствующие случайным ходам, обозначают номером 0. Ветви, выходящие из вершины, изображают выборы, которые могут быть сделаны игроком при данном ходе. Вероятности выполнения случайного хода записывают у соответствующих ветвей. Возле конечных вершин дерева указываются исходы игры – значения выигрыша игроков (а в антагонистических играх – выигрыш первого игрока).

Партия начинается с корня (нижней вершины). Каждый ход есть изменение позиции, соответствующее перемещению из одной вершины на какую-нибудь из примыкающих верхних вершин. Число ветвей у вершины равно числу вариантов хода. Партия заканчивается при достижении одной из конечных вершин. Величина λ называется длиной дерева.

В зависимости от выбора игроков возможно столько различных партий игры, сколько конечных вершин у дерева.

Очевидно, если в игре нет случайных ходов, и каждый из игроков выбрал свою стратегию, то исход игры однозначно определен. Для игры со случайными ходами, результат партии становится случайной величиной, поэтому необходимо случайные выигрыши заменить их математическими ожиданиями. Как совокупность всех решений, которые должен принять игрок, можно описать как одно решение - выбор стратегии, так и совокупность случайных ходов, может быть заменена одним случайным испытанием Н.

В рассматриваемом примере (рис. 2.2) случайное испытание Н может иметь следующие исходы:

$$H=((Г,3),(Г,2),(Р,3),(Р,2)), \text{ с вероятностями } P=\left\{\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{4};\right\},$$

где Г – означает выпадение «герба»;

Р – «решки», а цифры 2, 3 соответствуют случайному выбору на четвертом ходу.

Игра, полученная путем усреднения случайных исходов, не полностью эквивалентна исходной игре, так как она характеризует не частный результат отдельной партии, а средние исходы большого числа партий.

Информация, доступная игрокам задается информационным разбиением вершин на множества V_i, называемые классами информации или информационными множествами. Если достигнута вершина $v \in V_i$, то игроку, который должен ходить, указывается только класс информации, а не точное положение вершины v. Таким образом, в классы информации могут входить несколько вершин, неразличимых игроком, делающим выбор на данном ходе, т.е. игрок не в состоянии различить, какой из нескольких вершин соответствует состояние игры в данный момент времени.

В рассматриваемом примере класс информации V_1 состоит из двух вершин. В том случае, когда всякий класс информации содержит только одну вершину, имеем игру с полной информацией (например, игра в шахматы). В играх с неполной информацией содержится хотя бы один класс информации с числом вершин не менее двух.

При вычерчивании дерева игры классы информации обводят замкнутой линией.

Игрок всегда знает, какому классу информации соответствует состояние игры в данный момент, но не знает конкретной вершины этого класса.

Классы информации (информационные множества) должны удовлетворять следующим условиям:

1) содержать вершины только одного игрока;
2) каждая вершина может принадлежать только одному классу информации;
3) вершины класса информации соответствуют только одному временному ходу;
4) из всех вершин, составляющих класс информации, может выходить только одинаковое количество ветвей.

Дерево, изображенное на рис. 2.2, соответствует следующей игре:

Первый игрок выбирает одно из двух направлений («налево» или «направо»). Ход «налево» оценивается тремя баллами, а «направо» – четырьмя. Затем бросается жребий (монета) и, если выпадает герб, второму игроку сообщается предыдущий выбор первого игрока. Если выпадает решка, то второй игрок знает лишь, что он находится в классе информации V_1, но не знает, в какой из двух вершин этого класса он находится.

Второй игрок выбирает одно из двух направлений («налево» или «направо»). Ход «налево» оценивается пятью баллами, а «направо» – двумя. Четвертый ход является опять случайным и состоит в выборе с равными вероятностями одного из направлений: «налево», «направо», которые оцениваются тремя и двумя баллами соответственно. Поскольку вероятности выбора направления при случайном ходе одинаковы (равны $\frac{1}{2}$), то их можно на графическом изображении дерева игры и не указывать.

Числа, выбранные в первом, третьем и четвертом ходах, складываются, и полученная сумма уплачивается вторым игроком первому, если она четная, в противном случае первый игрок платит второму.

Пространства Φ_1 и Φ_2 всех возможных стратегий игроков 1 и 2 в рассматриваемом примере следующие:

Φ_1=((3), (4));

Φ_2=((3,Г,5),(3,Г,2),(3,Р,5),(3,Р,2),(4,Г,5),(4,Г,2),(4,Р,5),(4,Р,2)),

где первое число каждой стратегии в пространстве Φ_2 соответствует выбору первого игрока, второе число - выпадению герба или решки («Г» – выпал «герб»; «Р» – выпала «решка»). Третья – выбору второго игрока пятерки или двойки.

Очевидно, что если в игре нет случайных ходов и каждый из игроков выбрал свою стратегию, то исход игры однозначно определен.

Описание позиционной игры в виде дерева позволяет глубже проанализировать ход игры. Вместе с тем, оптимальное поведение игроков легче определить для игры, заданной в нормальной форме (для двух игроков - в матричной форме), особенно в том случае, если игра содержит информационные множества и случайные ходы.

2.3. Решение позиционной игры с полной информацией

Решение позиционной игры с полной информацией легко решается в соответствии с теоремой Куна, утверждающей, что данная игра разрешима по доминированию, т. е. для каждого из игроков имеются доминирующие стратегии, которые и необходимо применять.

Для того, чтобы это продемонстрировать, рассмотрим описанную выше игру «Выборы с правом вето». Поскольку из всех вершин, предшествующих конечным, ходит игрок 3, то остальные игроки, зная его функцию выигрыша U_3, могут легко предвидеть его решения. Это позволяет привести игру, изображенную на рис. 2.1 к следующей:

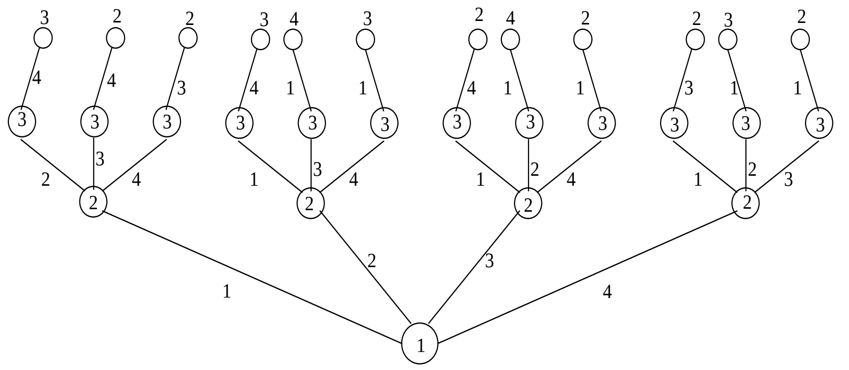


Рис. 2.3. Граф, упрощенной игры «Выборы с правом Вето» Игрок 3

Поскольку в новом дереве игрок 3 уже по существу не принимает решения, то финальная вершина определяется ходами игрока 2. Игрок 1, зная функцию выигрышей U_2, может предвидеть поведение игрока 2. В итоге получается игра с одним участником – первым игроком и следующим деревом игры:

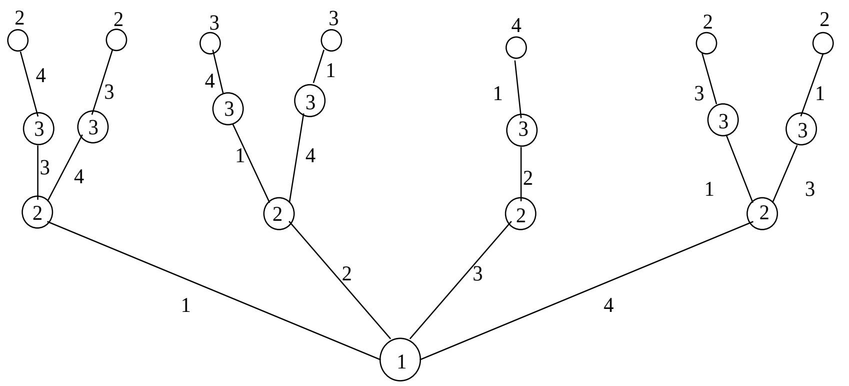


Рис. 2.4. Граф, упрощенной игры «Выборы с правом Вето» Игрок 2

Поскольку для первого игрока желательна победа четвертого претендента, то он отклонит третьего претендента. Далее второй игрок вынужден будет отклонить второго претендента, а третий игрок – первого. Выигрыши игроков в данной игре равны 7, 4 и 4 соответственно.

Таким образом алгоритм решения позиционных игр с полной информацией, в соответствии с теоремой Куна, состоит в том, что начиная с последнего хода последовательно отбрасываются заведомо худшие для игрока, делающего этот ход, решения. После всех таких редукций получаем решение в чистых стратегиях.

2.4. Нормализация позиционной игры

Процесс сведения позиционной игры к игре в нормальной форме называют нормализацией игры. Любая позиционная игра может быть сведена к игре в нормальной форме, в которой каждый из игроков делает только по одному независимому ходу. Для нормализации игры нужно перечислить все возможные стратегии игроков и для каждой совокупности стратегий определить выигрыш игроков. Рассмотрим процесс нормализации позиционной игры на конкретном примере. Пусть игра задана деревом, показанном на рис. 2.5.

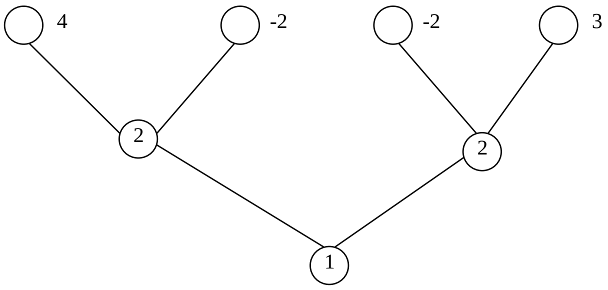


Рис. 2.5. Дерево игры

Первый игрок делает свой первый ход, выбирая правую или левую ветвь. Затем ход делает второй игрок, у которого в каждой вершине также имеется два выбора, после чего игра заканчивается.

В данной игре у первого игрока (игрока А) имеется две чистых стратегии: $Ф_1 = (A_1, A_2)$, где стратегия A_1 – всегда выбирать левую ветвь; стратегия A_2 – всегда выбирать правую ветвь. Второй игрок (игрок В) имеет больше стратегий:

$Ф_2 = (B_1, B_2, B_3, B_4)$,

где стратегия B_1 – всегда выбирать левую ветвь;

стратегия B_2 – всегда выбирать правую ветвь;

стратегия B_3 – выбирать ветвь, которую выбрал игрок А;

стратегия B_4 – выбирать ветвь, противоположную той, которую выбрал игрок А.

Матрица игры в этом случае имеет вид:

A_i / B_j	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	-2	4	2
A_2	-2	3	3	-2

Очевидно, что исходная позиционная игра является игрой с полной информацией. Следовательно, она должна иметь седловую точку, а, следовательно, решение в чистых стратегиях.

Действительно, так как:

$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = -2$;

$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = -2$.

И, следовательно, $\alpha = \beta$.

Поэтому S_A=||1,0|| или S_A=||0,1||, а S_B=||0,0,0,1||. Цена игры ***v*** = -2.

Допустим, что в рассматриваемом примере второму игроку не сообщается выбор, сделанный первым игроком. Тогда в дереве игры на втором ходе появляется класс информации V_1, содержащей две вершины второго игрока (рис. 2.6).

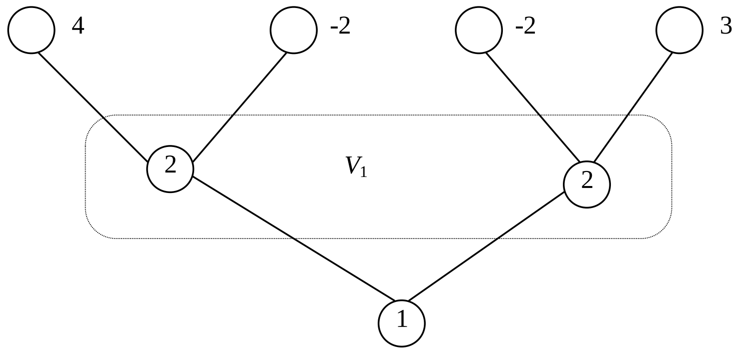


Рис. 2.6. Дерево игры на втором ходе

Количество чистых стратегий второго игрока по сравнению с первым случаем сократится до двух: $Ф_2$ = /B_1, B_2/,
где B_1 – всегда выбирать левую ветвь;
B_2 – всегда выбирать правую ветвь.

Процесс нормализации приводит к следующей платежной матрице:

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	4	-2
A_2	-2	3

В новой игре $\alpha<\beta$, т. е. седловая точка отсутствует. Решение игры в смешанных стратегиях имеет вид:

$$S_A = \left\| \frac{5}{11}; \frac{6}{11} \right\|; \quad S_B = \left\| \frac{5}{11}; \frac{6}{11} \right\|; \quad v = \frac{8}{11}.$$

Уменьшение информации, имеющейся у второго игрока на момент принятия решения, привело к уменьшению его выигрыша с 2 до $-\frac{8}{11}$.

Итак, для нормализации позиционной игры необходимо:

– перечислить все возможные стратегии каждого из игроков (в таких играх, как шахматы, это пока неразрешимая задача);

– определить исходы игры при всех возможных сочетаниях стратегий игроков (выборы стратегий делаются игроками одновременно и независимо).

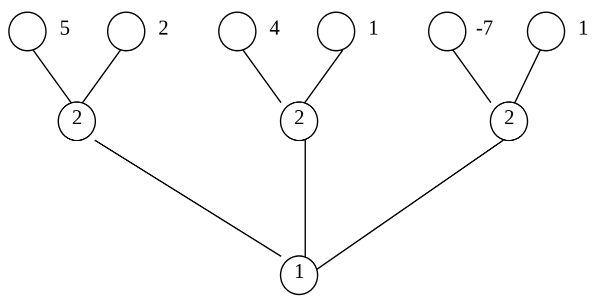
В зависимости от количества игроков, а также значений их выигрышей путем нормализации позиционные игры можно свести к матричной или бескоалиционной, в частности, биматричной игре, каждые из которых решаются по-своему.

Задачи для самостоятельного решения

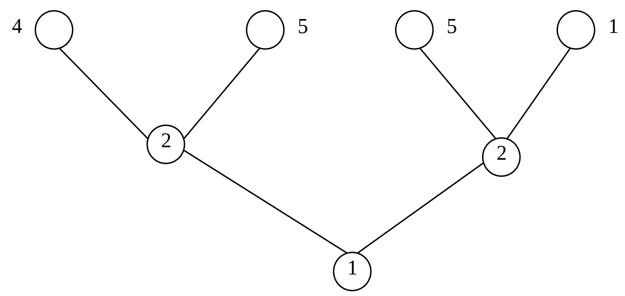
I. Произвести нормализацию позиционных игр, у которых дерево игры имеет вид, приведенный ниже. У конечных вершин поставлен выигрыш первого игрока, а выигрыш второго игрока противоположен по знаку.

Варианты:

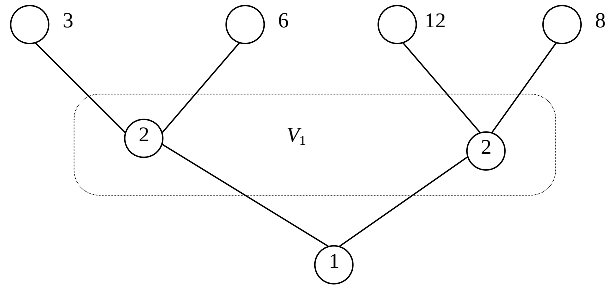
1.



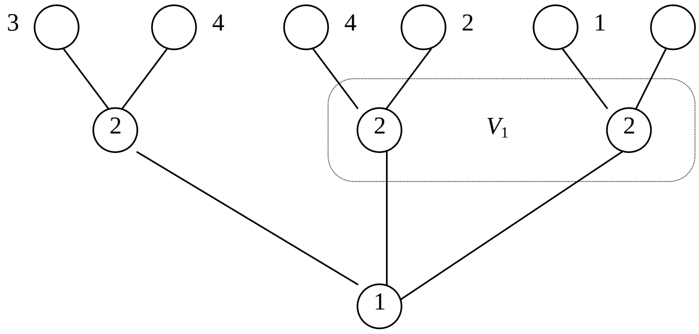
2.



3.



4.



2. Нарисовать дерево следующей позиционной игры «Выбор с правом вето», у которой N игроков выбирают одного кандидата из множества $C=\{c_1, c_2, \ldots, c_i\}$, i< N. Правило голосования таково: начиная с игрока 1, каждый игрок последовательно налагает вето на выбор кандидатуры одного из не отведенных кандидатов. Единственный оставшийся кандидат считается избранным. Заданы также функции выигрыша u_1, u_2, …, u_N на множестве C, т. е. выигрыш каждого игрока в зависимости от того, какой кандидат победил. Найти решение, используя теорему Куна.

Варианты:

1. N =2; $C=\{c_1, c_2, c_3\}$
u_1={2,-5,4}; u_2={-2,5,-4}
2. N =2; $C=\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$
u_1={2,5,-4,-3,1}; u_2={-2-3,4,3,-1}
3. N =3; $C=\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$
u_1={1,2,-3,4}; u_2={3,2,1,-5}; u_3={-2,-3,-1,8}.
4. N =4; $C=\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$
u_1={1,2,-2,-3,4}; u_2={3,5,1,-7,6}; u_3={2,4,-5,-1,1}; u_4={2,3,4,1,6}.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вентцель, Е. С. Исследование операций [Текст] / Е. С. Вентцель. – М.: Наука, 1980. – 206 с.

2. Василевич, Л. Ф. Теория игр [Текст] / Л. Ф. Василевич. – Киев: КИИМ, 2000. – 98 с.

3. Петросян, Л. А., Зенкевич, Н. А., Семина, Е. А. Теория игр [Текст] / Л. А. Петросян, Н. А. Зенкевич, Е. А. Семина. – М.: Высшая школа, Книжный дом «Университет», 1998. – 304 с.

4. Протасов, И. Д. Теория игр и исследование операций [Текст]: учебное пособие / И. Д. Протасов. – М.: Гелиос АРВ, 2003. – 368 с.

5. Морозов, В. В., Сухарев, А. Г., Федоров, В. В. Исследование операций в задачах и упражнениях [Текст] / В. В. Морозов, А. Г. Сухарев, В. В. Федоров. – М.: Высшая школа, 1986. – 287 с.

6. Таха, Х. Введение в исследование операций. Кн. 2. [Текст] / Х. Таха. – М.: Мир, 1985. – 479 с.

Учебное издание

Леонова Надежда Львовна

Теория игр и исследование операций Бескоалиционные игры. Позиционные игры

Учебно-методическое пособие

Редактор и корректор А. А. Чернышева
Техн. редактор Д. А. Романова

Учебное электронное издание сетевого распространения

Системные требования:
электронное устройство с программным обеспечением
для воспроизведения файлов формата PDF

Режим доступа: http://publish.sutd.ru/tp_get_file.php?id=202016, по паролю.
- Загл. с экрана.

Дата подписания к использованию 11.05.2023 г. Рег.№ 5051/22

Высшая школа технологии и энергетики СПбГУПТД
198095, СПб., ул. Ивана Черных, 4.