Н. Л. ЛЕОНОВА

ТЕОРИЯ ИГР И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2022

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна»
Высшая школа технологии и энергетики

Н. Л. ЛЕОНОВА

ТЕОРИЯ ИГР И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

Учебно-методическое пособие

Утверждено Редакционно-издательским советом ВШТЭ СПбГУПТД

Санкт-Петербург
2022

УДК 519.83
ББК 22.18
Л 47

Рецензенты:
кандидат технических наук, доцент кафедры ИИСТ Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ»
Н. В.Романцова;
кандидат технических наук, доцент кафедры ПМИ Высшей школы технологии и энергетики Санкт-Петербургского государственного университета промышленных технологий и дизайна
П. Е. Антонюк

Леонова, Н. Л.
Л 47 Теория игр и исследование операций. Антагонистические игры: учебно-методическое пособие / Н. Л. Леонова. – СПб.: ВШТЭ СПбГУПТД, 2022. – 49 с.

Учебно-методическое пособие соответствует программам и учебным планам дисциплины «Теория игр и исследование операций» для студентов, обучающихся по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика». В работе изложены основные понятия теории игр, приведены примеры решения задач по основам теории игр и разделу «Матричные игры».

Учебно-методическое пособие предназначено для подготовки бакалавров очной формы обучения. Отдельные разделы пособия могут быт полезны аспирантам и специалистам, работающим в области прикладной математики и информатики.

УДК 519.83
ББК 22.18

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Теория игр – это раздел математики, в котором исследуются математические модели принятия решений в условиях конфликта, т. е. в условиях столкновения сторон, каждая из которых стремится воздействовать на развитие конфликта в своих собственных интересах. При этом каждая сторона вынуждена принимать решения в условиях неопределенности, когда принимающий решение субъект (игрок) располагает информацией лишь о множестве возможных ситуаций, в одной из которых он может находиться, о множестве решений (стратегий), которые он может принять, и о количественной мере того выигрыша, который он мог бы получить, выбрав в данной ситуации данную стратегию. Неопределенность, как правило, является следствием сознательной деятельности другого лица (лиц), отстаивающего свои интересы.

Основные идеи и термины теории игр заимствованы из классических (салонных) игр, таких как карты, домино, шахматы и т. д. Классическая салонная игра начинается из начальной позиции и состоит из последовательности шагов игры, а каждый шаг включает последовательность ходов (выборов) игроков, причем игрок делает выбор из множества альтернатив. Если каждый игрок в каждый момент времени знает все предыдущие ходы (выборы) игроков, то такая игра называется игрой с полной информацией. В играх с неполной информацией игрок не в состоянии определить, какой ход сделает противник, либо принимает решение, не зная, в каком состоянии находится игра.

В реальной игре каждый игрок, в зависимости от опыта и квалификации, интуитивно стремится придерживаться такой стратегии, которая обеспечивает ему максимально возможный выигрыш (минимальный проигрыш).

Математическое описание игры сводится к перечислению всех действующих в ней игроков, указанию для каждого игрока всех его стратегий, а также численного выигрыша, который он получит после того, как игроки выберут свои стратегии. В результате игра становится формальным объектом, который поддается математическому анализу.

Первую попытку создать математическую теорию игр предпринял в 1921 г. Э. Борель. Как самостоятельная область науки впервые теория игр была систематизированно изложена в монографии Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение» в 1944 г. С тех пор многие разделы экономической теории (например, теория несовершенной конкуренции, теория экономического стимулирования и др.) развивались в тесном контакте с теорией игр. Теория игр с успехом применяется и в социальных науках (например, анализ процедур голосования, поиск равновесных концепций, определяющих кооперативные и некооперативные поведения лиц). Как правило, избиратели отводят кандидатов, представляющих крайние точки зрения, но при избрании одного из двух кандидатов, предлагающих различные компромиссные решения, возникает борьба. Даже идея Руссо об эволюции от «естественной свободы» к «гражданской свободе» формально соответствует с позиций теории игр точке зрения на кооперацию [1].

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИГР И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

1.1. Терминология и классификация игр

Игра – это идеализированная математическая модель коллективного поведения нескольких лиц (игроков), интересы которых различны, что и порождает конфликт. Конфликт не обязательно предполагает наличие антагонистических противоречий сторон, но всегда связан с определенного рода разногласиями. Конфликтная ситуация будет антагонистической, если увеличение выигрыша одной из сторон на некоторую величину приводит к уменьшению выигрыша другой стороны на такую же величину и наоборот. Антагонизм интересов порождает конфликт, а совпадение интересов сводит игру к координации действий (кооперации).

Примерами конфликтной ситуации являются ситуации, складывающиеся во взаимоотношениях покупателя и продавца; в условиях конкуренции различных фирм; в ходе боевых действий и др. Примерами игр являются и обычные игры: шахматы, шашки, карточные, салонные и др. (отсюда и название «теория игр» и ее терминология).

Игрой называется математическая модель конфликтной ситуации:

$$\Gamma = \langle U_i; J_i; i \in N \rangle,$$

где U_i – множество стратегий i-го игрока; J_i – функция выигрыша i-го игрока; N – множество игроков. Игровой смысл модели заключается в том, что функция выигрыша i-го игрока зависит не только от стратегии этого игрока, но от стратегий всех остальных игроков.

Теория игр – это математическая теория конфликтных ситуаций.

Цель теории игр – выработка рекомендаций по разумному поведению участников конфликта (определение оптимальных стратегий поведения игроков).

От реального конфликта игра отличается тем, что ведется по определенным правилам. Эти правила устанавливают последовательность ходов, объем информации каждой стороны о поведении другой и результат игры в зависимости от сложившейся ситуации. Правилами устанавливаются также конец игры, когда некоторая последовательность ходов уже сделана, и больше ходов делать не разрешается.

Теория игр, как и всякая математическая модель, имеет свои ограничения:

– Одним из них является предположение о полной («идеальной») разумности противников. В реальном конфликте зачастую оптимальная стратегия состоит в том, чтобы угадать, в чем противник «глуп» и воспользоваться этой глупостью в свою пользу;

– еще одним недостатком теории игр является то, что каждому из игроков должны быть известны все возможные действия (стратегии) противника, неизвестно лишь то, каким именно из них он воспользуется в данной партии. В реальном конфликте это обычно не так: перечень всех возможных стратегий противника как раз и неизвестен, а наилучшим решением в конфликтной ситуации нередко будет именно выход за пределы известных противнику стратегий, «ошарашивание» его чем-то совершенно новым, непредвиденным.

– в теории игр находятся оптимальные стратегии по одному показателю (критерию). В практических ситуациях часто приходится принимать во внимание не один, а несколько числовых критериев. Стратегия, оптимальная по одному показателю, может быть неоптимальной по другим.

В теории игр предполагается, что игра состоит из *ходов*, выполняемых игроками одновременно или последовательно.

Ходы бывают *личными* и *случайными*. Ход называется *личным*, если игрок сознательно выбирает его из совокупности возможных вариантов действий и осуществляет его (например, любой ход в шахматной игре). Ход называется *случайным*, если его выбор производится не игроком, а каким-либо механизмом случайного выбора (например, по результатам бросания монеты).

Совокупность ходов, предпринятых игроками от начала до окончания игры, называется *партией*.

Одним из основных понятий теории игр является понятие стратегии. *Стратегией* игрока называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе в зависимости от ситуации, сложившейся в процессе игры. В простых (одноходовых) играх, когда в каждой партии игрок может сделать лишь по одному ходу, понятие стратегии и возможного варианта действий совпадают. В этом случае совокупность стратегий игрока охватывает все возможные его действия, а любое возможное для игрока i действие является его стратегией. В сложных (многоходовых играх) понятие «варианта возможных действий» и «стратегии» может отличаться друг от друга.

Стратегия игрока называется оптимальной, если она обеспечивает данному игроку при многократном повторении игры максимально возможный средний выигрыш или минимально возможный средний проигрыш, независимо от того, какие стратегии применяет противник. Могут быть использованы и другие критерии оптимальности.

Возможно, что стратегия, обеспечивающая максимальный выигрыш, не обладает другим важным представлением оптимальности, как устойчивостью (равновесностью) решения. Решение игры является устойчивым (равновесным), если соответствующие этому решению стратегии образуют ситуацию, которую ни один из игроков не заинтересован изменить.

Классификация игр представлена на рис. 1.1.

1. В зависимости *от видов ходов* игры подразделяются на стратегические и азартные. *Азартные* игры состоят только из случайных ходов – ими теория игр не занимается. Если наряду со случайными ходами есть личные ходы, или все ходы личные, то такие игры называются *стратегическими*.

2. В зависимости *от числа участников* игры подразделяются на парные и множественные. *В парной* игре число участников равно двум, *в множественной* – более двух.

3. Участники множественной игры могут образовывать коалиции как постоянные, так и временные. *По характеру* взаимоотношений игроков игры делятся на бескоалиционные, коалиционные и кооперативные.

Бескоалиционными называются игры, в которых игроки не имеют право вступать в соглашения, образовывать коалиции, и целью каждого игрока является получение по возможности наибольшего индивидуального выигрыша.

Игры, в которых действия игроков направлены на максимизацию выигрышей коллективов (коалиций) без последующего их разделения между игроками, называются *коалиционными.*

Исходом *кооперативной* игры является дележ выигрыша коалиции, который возникает не как следствие тех или иных действий игроков, а как результат их наперед определенных соглашений.

В соответствии с этим в кооперативных играх сравниваются по предпочтительности не ситуации, как это имеет место в бескоалиционных играх, а дележи; и сравнение это не ограничивается рассмотрением индивидуальных выигрышей, а носит более сложный характер.

4. *По количеству стратегий* каждого игрока игры подразделяются на *конечные* (число стратегий каждого игрока конечно) и *бесконечные* (множество стратегий каждого игрока бесконечно).

5. *По количеству информации*, имеющейся у игроков относительно прошлых ходов, игры подразделяются на игры с *полной информацией* (имеется вся информация о предыдущих ходах) и *неполной информацией*. Примерами игр с полной информацией могут быть шахматы, шашки и т. п.

6. *По виду описания* игры подразделяются на позиционные игры (или игры в развернутой форме) и игры в нормальной форме. *Позиционные* игры задаются в виде дерева игры. Но любая позиционная игра может быть сведена *к нормальной форме*, в которой каждый из игроков делает только по одному независимому ходу. *В позиционных* играх ходы делаются в дискретные моменты времени. Существуют *дифференциальные* игры, в которых ходы делаются непрерывно. Эти игры изучают задачи преследования управляемого объекта другим управляемым объектом с учетом динамики их поведения, которая описывается дифференциальными уравнениями.

Существуют также *рефлексивные* игры, которые рассматривают ситуации с учетом мысленного воспроизведения возможного образа действий и поведения противника.

7. Если любая возможная партия некоторой игры имеет нулевую сумму выигрышей f_i, $i = \overline{1, N}$ всех N игроков ($\sum_{i=1}^{N} f_i = 0$), то говорят об игре *с нулевой суммой*. В противном случае игры называются играми *с ненулевой суммой*.

Очевидно, что парная игра с нулевой суммой является *антагонистической*, так как выигрыш одного игрока равен проигрышу второго, а следовательно цели этих игроков прямо противоположны.

Конечная парная игра с нулевой суммой называется *матричной* игрой. Такая игра описывается платежной матрицей, в которой задаются выигрыши первого игрока. Номер строки матрицы соответствует номеру применяемой стратегии первого игрока, столбец – номеру применяемой стратегии второго игрока; на пересечении строки и столбца находится соответствующий выигрыш первого игрока (проигрыш второго игрока).

Конечная парная игра с ненулевой суммой называется *биматричной* игрой. Такая игра описывается двумя платежными матрицами, каждая для соответствующего игрока [2].

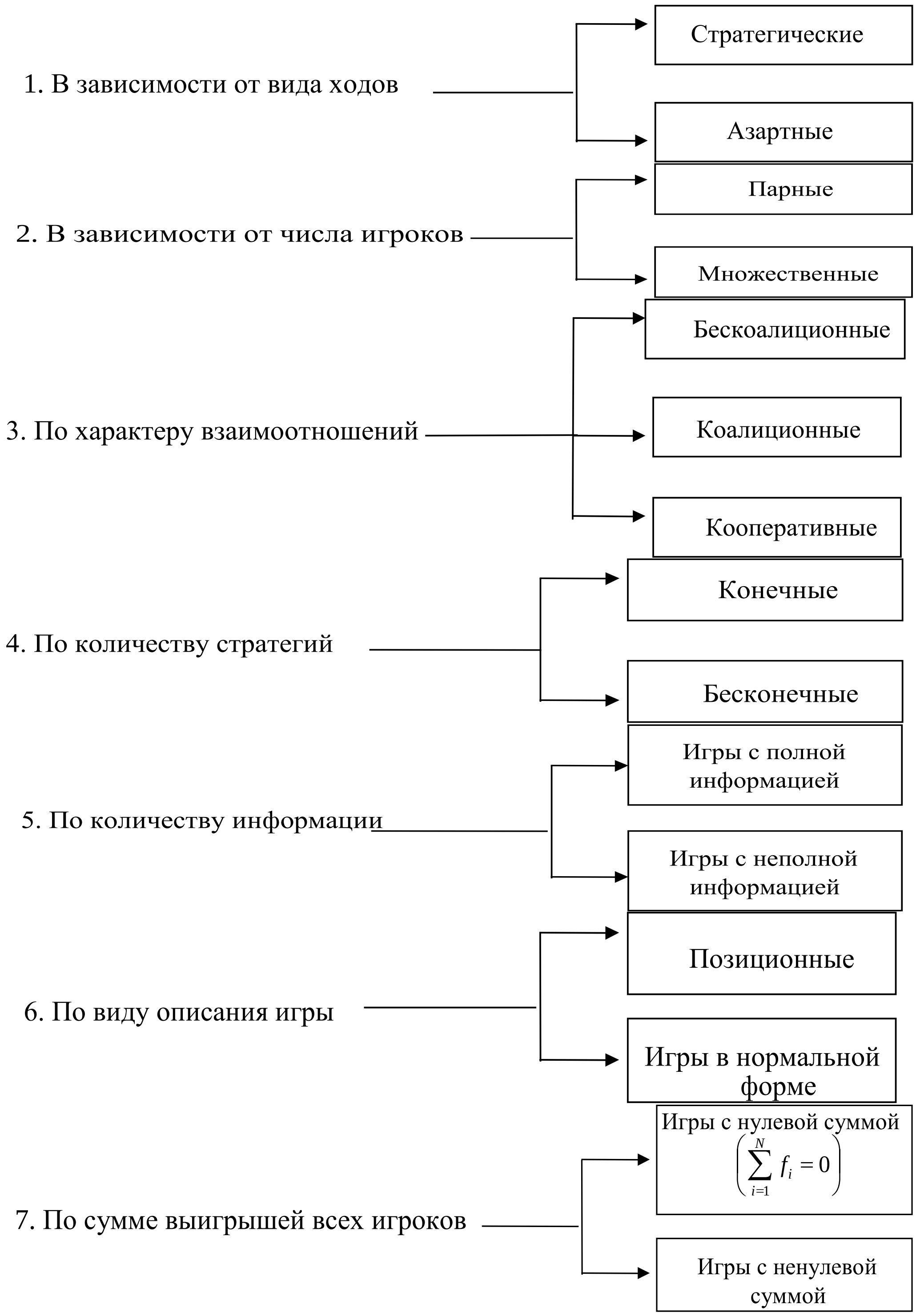

Рис. 1.1. Классификация игр

1.2. Формы представления игр и примеры игр

В зависимости от цели исследования любую игру можно рассматривать в развернутой (позиционной) или в нормальной (частный случай – матричной) формах. В развернутой форме лучше раскрывается последовательность событий, она более наглядна для многоходовых игр. Здесь показываются очередности ходов игроков, их информированность и выигрыши. Недостатком этой формы представления является сложность нахождения решения. Нормальная форма игры менее наглядна, зато большинство эффективных методов нахождения решений разработано именно для этой формы. Нормальная форма игры N лиц – это совокупность N^2 элементов: $\Gamma = \langle U_i; J_i; i \in N \rangle$. Таким образом, нормальная форма игры представляется в виде математической модели, в которой перечисляются множества стратегий для каждого игрока и описываются функции выигрышей игроков. Развернутая форма представляет игру в виде дерева.

Пример 1.1: Пусть игрок 1 имеет – 2 фишки, а игрок 2 – 3 фишки. Независимо и тайно друг от друга они откладывают произвольное количество фишек. Если при этом количество отложенных фишек оказывается четным, то их выигрывает игрок 1, в противном случае фишки достаются игроку 2. Эта игра с неполной информацией. Фактически игроки делают ходы одновременно и не знают о действиях противника. Их незнание показывается информационным множеством, а игру можно представить двумя способами.

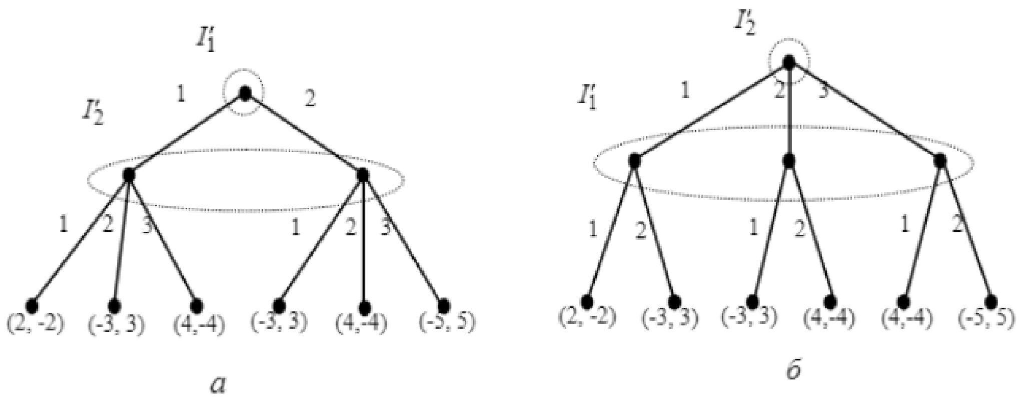

Рис. 1.2. Дерево игры из примера 1.1

Данная игра является антагонистической, то есть можно указывать выигрыш только первого игрока. Для второго игрока в таком случае выигрыш будет браться с противоположным знаком.

Пример 1.2. Зачет

Пусть игрок 1 – студент, готовящийся к зачету, а игрок 2 – преподаватель, принимающий зачет. Будем считать, что у студента две стратегии: A_1 – хорошо подготовиться к зачету; A_2 – не подготовиться. У преподавателя имеется тоже две стратегии: B_1 – поставить зачет; B_2 – не поставить зачет. В основу оценки значений выигрышей игроков можно положить, например, следующие соображения, отраженные в матрицах выигрышей:

	B_1	B_2
A_1	+ (5) (оценили по заслугам)	- (-6) (обидно)
A_2	(1) (удалось словчить)	(0) (получил по заслугам)

Выигрыши студента

	B_1	B_2
A_1	+ (0) (все нормально)	- (-3) (проявил несправедливость)
A_2	-2 (дал себя обмануть)	- 1 (студент придет еще раз)

Выигрыши преподавателя

Данная игра в соответствии с приведенной выше классификацией является стратегической, парной, бескоалиционной, конечной, описана в нормальной форме, с ненулевой суммой. Более кратко данную игру можно назвать биматричной.

Задача состоит в определении оптимальных стратегий для студента и для преподавателя.

Пример 1.3. Морра

Игрой «морра» называется игра любого числа лиц, в которой все игроки одновременно показывают («выбрасывают») некоторое число пальцев. Каждой ситуации приписываются выигрыши, которые игроки в условиях этой ситуации получают из «банка». Например, каждый игрок выигрывает показанное им число пальцев, если все остальные игроки показали другое число; он ничего не выигрывает во все остальных случаях. В соответствии с приведенной классификацией данная игра является стратегической; в общем случае, множественной (в этом случае игра может быть бескоалиционной, коалиционной и кооперативной) конечной.

В частном случае, когда игра парная – это будет матричная игра (матричная игра всегда является антагонистической) [1, 2].

Пусть два игрока «выбрасывают» одновременно один, два или три пальца. При четной сумме выигрывает первый игрок, при нечетной – второй. Выигрыш равен сумме «выброшенных пальцев». Таким образом, в данном случае каждый из игроков имеет по три стратегии, а матрица выигрышей первого игрока (проигрышей второго) имеет вид:

	B_1	B_2	B_3
A_1	2	-3	4
A_2	-3	4	-5
A_3	4	-5	6

где A_i – стратегия первого игрока, заключающаяся в «выбрасывании» *i* пальцев; B_j – стратегия второго игрока, заключающаяся в «выбрасывании» *j* пальцев.

2. АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

2.1. Матричные игры
Принцип максимина в антагонистических играх
Седловая точка

Наиболее разработанной в теории игр является конечная парная игра с нулевой суммой (антагонистическая игра двух лиц или двух коалиций), называемая матричной игрой.

Рассмотрим такую игру G, в которой участвуют два игрока A и B, имеющие антагонистические интересы: выигрыш одного игрока равен проигрышу второго. Естественно, игрок A хочет максимизировать свой выигрыш, а игрок B – минимизировать проигрыш. Для простоты отождествляем себя с одним из игроков (пусть это будет игрок A), тогда будем называть игрока B – «противник».

Пусть у игрока A имеется m возможных стратегий A_1, A_2, ..., A_m, а у противника – n возможных стратегий B_1, B_2, ..., B_n (такая игра называется игрой m x n).

Обозначим через a_{ij} выигрыш игрока A, в случае, если он воспользуется стратегией A_i, а игрок B – стратегией B_j. Предполагается, что выигрыш a_{ij} – известен. Тогда можно составить прямоугольную таблицу (матрицу), в которой перечислены стратегии игроков и соответствующие выигрыши (табл. 2.1).

Таблица 2.1 – Матрица игры m x n, заданная в виде таблицы

A_i \ B_j	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Приведение игры к такой форме может составить трудную задачу, а иногда и невыполнимую, из-за необозримого множества возможных стратегий игроков и трудности определения выигрышей a_{ij}.

Матрица $A = \|a_{ij}\|$ называется платежной матрицей. Задача теории игр состоит в том, чтобы рекомендовать каждому из игроков выбрать стратегию, которую в некотором смысле следует считать наилучшей. Какие же стратегии можно считать наилучшими в антагонистической игре? Для определения оптимальных стратегий рассмотрим два основополагающих принципа – осторожности и уравновешенности.

Следуя принципу осторожности, каждый игрок, памятуя о том, что перед ним разумный и злонамеренный противник, должен выбирать свои действия, исходя из самого неблагоприятного для него ответа партнера, и играть с гарантией. Таким образом, принцип осторожности приводит к максиминному (по полезности) критерию оптимальности для первого игрока и минимаксному (по потерям) критерию для второго игрока.

<u>Определение:</u> стратегия α, максимизирующая гарантированный выигрыш 1-го игрока, т. е. выбранная в соответствии с максиминным критерием $\min\limits_{j} a_{ij} \to \max\limits_{\alpha_i}$ и стратегия β, минимизирующая гарантированный проигрыш 2-го игрока, т. е. выбранная в соответствии с минимаксным критерием $\max\limits_{i} a_{ij} \to \min\limits_{\beta_i}$, образуют защитную пару стратегий.

Таким образом, применяя защитные стратегии, оба игрока из всех наихудших вариантов выбирают наилучший. Применяя защитную стратегию α, 1-й игрок, независимо от действий второго игрока, обеспечивает себе выигрыш не меньше, чем $V_1 = \max\limits_{i} \min\limits_{j} a_{ij}$. Это число называется нижней ценой игры. Аналогично, применяя стратегию β, 2-й игрок может быть уверен, что он проиграет не более, чем $V_2 = \min\limits_{j} \max\limits_{i} a_{ij}$. Величина V_2 называется верхней ценой игры.

<u>Пример 2.1</u>

Найти решение игры G (4 x 5), платежная матрица которой имеет следующий вид:

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	α_i
A_1	5	6	7	4	5	4
A_2	3	10	6	5	6	3
A_3	12	5	3	9	8	3
A_4	6	7	5	6	10	5
β_j	12	10	7	9	10	

максимин $\max\limits_{i} \min\limits_{j} a_{ij}$

минимакс $\min\limits_{j} \max\limits_{i} a_{ij}$

Итак, исходя из принципа осторожности, игрок А должен выбрать стратегию A_4, а его противник – B_3. Такие стратегии называются максиминными или минимаксными стратегиями (вытекающие из принципа максимина).

До тех пор, пока обе стороны в нашем примере будут придерживаться своих максиминных стратегий, выигрыш игрока А и проигрыш игрока В будет равен $a_{43} = 5$.

<u>Лемма 1</u>. Пусть задана матрица выигрышей $A = \|a_{ij}\|$, и определены $V_2 = \min_j \max_i a_{ij}$ и $V_1 = \max_i \min_j a_{ij}$. Тогда $V_2 \leq V_1$.

Случай $V_2 = V_1$, соответствует наличию у платежной матрицы так называемой *седловой точки.*

<u>Определение</u>. Точка (i^*, j^*) называется седловой точкой платежной матрицы $\|a_{ij}\|$, если для всех остальных i и j этой матрицы выполняется условие:

$$a_{i^*j} \geq a_{i^*j^*} \geq a_{ij^*},$$

т. е. a_{ij} является одновременно минимумом своей строки и максимумом своего столбца.

Приведем без доказательства следующую теорему: говорят, что матричная игра имеет седловую точку, если соответствующая ей матрица выигрышей (платежная матрица) имеет седловую точку.

<u>Пример 2.2</u>

Найти решение игры G (3 x 3), платежная матрица которой имеет следующий вид:

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	0	-1	-2	-2
A_2	3	2	-1	-1
A_3	6	3	0	0
β_j	6	3	0	

Определим $\alpha_i = \min_j a_{ij}$ и $\beta_j = \max_i a_{ij}$ и запишем их в таблицу.

Нижняя цена игры $\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij} = 0$.

Верхняя цена игры $\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij} = 0$.

Так как $\alpha = \beta = 0$, то платежная матрица и матричная игра имеют седловую точку. Оптимальными стратегиями для игрока А является стратегия A_3, а для игрока В – B_3.

Легко заметить, что отклонение игрока А от оптимальной стратегии приводит к уменьшению его выигрыша, а одностороннее отклонение игрока В – к увеличению его проигрыша.

Могут встречаться случаи, когда платежная матрица имеет несколько седловых точек, однако это не изменит характера рекомендуемых решений, поскольку все ситуации равновесия имеют одну и ту же цену, а следовательно, эквиваленты.

Пример 2.3

Найти решение игры G (3x4), платежная матрица которой имеет вид:

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	7	6	9	6	6
A_2	8	4	3	4	3
A_3	7	6	8	6	6
β_j	8	6	9	6	

Определим α_i и β_j и запишем их в таблицу.

Находим нижнюю и верхнюю цену игры:

$\alpha = \max_i \alpha_i = 6$; $\beta = \min_j \beta_j = 6$. Видно, что игра имеет четыре седловые точки с соответствующими парами оптимальных стратегий: A_1B_2; A_1B_4; A_3B_2 и A_3B_4. Цена игры равна 6.

В заключение отметим, что с позиций игрока 1 второй игрок руководствуется принципом *минимакса*, обеспечивающим минимизацию максимальных потерь. Но с собственной точки зрения игрока 2, оценивающего свой выигрыш, он также руководствуется принципом *максимина*. Поэтому, как правило, говорят лишь об использовании в антагонистической игре принципа максимина обоими игроками [2, 3].

Задачи

1. Составьте платежную матрицу игры Морра, если в ней участвуют два игрока, а максимально возможное количество «выбрасываемых» пальцев равно i (i = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10). Выигрыш равен сумме пальцев, выброшенных игроками. При четной сумме выигрывает первый игрок, при нечетной – второй.

2. Составьте платежную матрицу игры борьба за рынки, если фирма А имеет в своем распоряжении a условных денежных единиц, а противник – *в*. a = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10; а соответствующие *в* = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

3. Найдите седловую точку и максиминные стратегии игроков для следующих матричных игр:

3.1.

3	7	5
3	8	4
1	8	3
2	1	9

3.2.

3	6	1	8
3	4	4	9
6	8	5	9
7	2	3	5

3.3.

4	7	4	8	3
7	6	5	6	9
9	9	6	8	8
5	7	3	4	3
4	8	2	3	7

3.4.

5	9	7
5	10	6
3	10	5
4	3	11

3.5.

6	12	2	16
6	8	8	18
12	16	10	18
14	4	6	10

3.6.

7	13	3	17
7	9	9	19
15	17	11	19
15	5	7	11

3.7.

3	5	9
4	7	8
2	1	5

3.8.

3	5	6	4
4	8	4	3
6	8	5	5
2	7	4	2

3.9.

4	6
5	2
8	7
3	1

3.10.

1	3	8	4	2
8	5	5	9	11
8	3	6	7	2

3.11.

3	6	2	3	5
5	7	3	2	4

2.3. Чистые и смешанные стратегии

Если в игре каждый из противников применяет только одну и ту же стратегию, то про саму игру в этом случае говорят, что она происходит *в чистых стратегиях*, а используемые игроком **A** и игроком **B** пара стратегий называются *чистыми стратегиями*.

Определение. В антагонистической игре пара стратегий ($\mathbf{A}_i$, $\mathbf{B}_j$) называется равновесной или устойчивой, если ни одному из игроков не выгодно отходить от своей стратегии.

Применять чистые стратегии имеет смысл тогда, когда игроки **A** и **B** располагают сведениями о действиях друг друга и достигнутых результатах. Если допустим, что хотя бы одна из сторон не знает о поведении противника, то идея равновесия нарушается, и игра ведется бессистемно.

В примере 2.1 максиминные чистые стратегии $\mathbf{A}_4$ и $\mathbf{B}_5$ неустойчивы по отношению к информации о поведении противника; они не обладают свойством равновесия.

Действительно, предположим, что мы узнали, что противник придерживается стратегии $\mathbf{B}_3$. Используя эту информацию, выберем стратегию $\mathbf{A}_1$ и получим больший выигрыш, равный 7. Но если противник узнал, что наша стратегия $\mathbf{A}_1$, он выберет стратегию $\mathbf{B}_4$, сведя наш выигрыш к 4.

Таким образом, в рассмотренном примере максиминные чистые стратегии оказываются неустойчивы по отношению к информации о поведении другой стороны. Но это не всегда так.

Пример 2.4

Рассмотрим матричную игру **G** (3 х 4), платежная матрица которой имеет вид:

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	5	7	10	8	5
A_2	10	9	11	10	9
A_3	8	6	7	4	4
β_j	10	9	11	10	

В этом примере нижняя цена игры равна верхней: $\alpha = \beta = 9$, т. е. игра имеет седловую точку.

Оказывается, что в этом случае максиминные стратегии $\mathbf{A}_2$ и $\mathbf{B}_2$ будут *устойчивыми* по отношению к информации о поведении противника.

Действительно, пусть игрок А узнал, что противник применяет стратегию B_2. Но и в этом случае игрок А будет по-прежнему придерживаться стратегии A_2, потому что любое отступление от стратегии A_2 только уменьшит выигрыш. Равным образом, информация, полученная игроком В, не заставит его отступить от своей стратегии B_2.

Пара стратегий A_2 и B_2 обладает свойством устойчивости, а выигрыш (в рассматриваемом примере он равен 9), достигаемый при этой паре стратегий, оказывается седловой точкой платежной матрицы.

Признак устойчивости (равновесности) пары стратегии – это равенство нижней и верхней цены игры.

Стратегии A_i и B_j (в рассматриваемом примере A_2, B_2), при котором выполняется равенство нижней и верхней цены игры, называются оптимальными чистыми стратегиями, а их совокупность – решением игры. Про саму игру в этом случае говорят, что она решается в чистых стратегиях.

$$\text{Величина} \quad \nu = \alpha = \beta \tag{2.1}$$

называется ценой игры.

Если $\nu > 0$, то игра выгодна для игрока А, если $\nu < 0$ – для игрока В; при $\nu = 0$ игра справедлива, т. е. является одинаково выгодной для обоих участников.

Однако наличие седловой точки в игре – это далеко не правило, скорее – исключение. Большинство матричных игр не имеет седловой точки, а следовательно, не имеет оптимальных чистых стратегий. Впрочем, есть разновидность игр, которые всегда имеют седловую точку и, значит, решаются в чистых стратегиях. Это – игры с полной информацией.

Теорема 2: Каждая игра с полной информацией имеет седловую точку, а следовательно, решается в чистых стратегиях, т. е. имеется пара оптимальных чистых стратегий, дающая устойчивый выигрыш, равный ν.

Если такая игра состоит только из личных ходов, то при применении каждым игроком своей оптимальной чистой стратегии она должна кончаться выигрышем, равным цене игры. Скажем, шахматная игра, как игра с полной информацией, либо всегда кончается выигрышем белых, либо всегда – выигрышем черных, либо всегда – ничьей (только чем именно мы пока не знаем, так как число возможных стратегий в шахматной игре огромно).

Если матрица игры содержит седловую точку, то ее решение сразу находится по принципу максимина.

Возникает вопрос: как найти решение игры, платежная матрица которой не имеет седловой точки? Применение максиминного принципа каждым из игроков обеспечивает игроку А выигрыш не менее α, игроку – проигрыш не больше β. Учитывая что $\alpha < \beta$, естественно, для игрока А желание увеличить выигрыш, а для игрока В – уменьшить проигрыш. Поиск такого решения производит к необходимости применять смешанные стратегии: чередовать чистые стратегии с какими-то частотами.

Определение. Случайная величина, значениями которой являются чистые стратегии игрока, называется его *смешанной стратегией*.

Таким образом, задание смешанной стратегии игрока состоит в указании тех вероятностей, с которыми выбираются его чистые стратегии.

Будем обозначать смешанные стратегии игроков А и В соответственно:

$$S_A=\|p_1, p_2, ..., p_m\|, \quad S_B=\|q_1, q_2, ..., q_n\|,$$

где p_i – вероятность применения игроком А чистой стратегии A_i; $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$;

q_j – вероятность применения игроком В чистой стратегии B_j; $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$.

В частном случае, когда все вероятности, кроме одной, равны нулю, а эта одна – единице, смешанная стратегия превращается в чистую.

Применение смешанных стратегий осуществляется, например, таким образом: игра повторяется много раз, но в каждой партии игрок применяет различные чистые стратегии с относительными частотами их применения, равными p_i и q_j.

Смешанные стратегии в теории игр представляют собой модель изменчивой, гибкой тактики, когда ни один из игроков не знает, какую чистую стратегию выберет противник в данной партии.

Если игрок А применяет смешанную стратегию $S_A=\|p_1, p_2, ..., p_m\|$, а игрок В смешанную стратегию $S_B=\|q_1, q_2, ..., q_n\|$, то средний выигрыш (математическое ожидание) игрока А определяется соотношением:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i \cdot q_j \quad . \tag{2.2}$$

Естественно, что ожидаемый проигрыш игрока В равен такой же величине.

Итак, если матричная игра не имеет седловой точки, то игрок должен использовать оптимальную смешанную стратегию, которая обеспечит максимальный выигрыш ν.

Естественно возникает вопрос: какими соображениями нужно руководствоваться при выборе смешанных стратегий? Оказывается принцип максимина сохраняет свое значение и в этом случае. Кроме того, важное значение для понимания решения игр, играют основные теоремы теории игр.

2.4. Основные теоремы матричных игр

Если игрок А выбирает смешанную стратегию $S_A=\|p_1, p_2, ..., p_m\|$, а игрок В смешанную стратегию $S_B=\|q_1, q_2, ..., q_n\|$, то средний выигрыш математическое ожидание выигрыша игрока А (проигрыша игрока В) определится суммой $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i \cdot q_j$, которая может рассматриваться в качестве характеристики выбранных S_A и S_B.

Формируя свою стратегию S_A в антагонистической игре, игрок А в соответствии с принципом максимина должен выбрать такую стратегию, при которой минимально возможный выигрыш был бы максимален, т. е. такую стратегию, которая обеспечивает:

$$\max_i \min_j \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, p_i \cdot q_j = v_A. \tag{2.3}$$

Аналогичные рассуждения, связанные с поиском оптимальной смешанной стратегии игрока В, приводят к рекомендации выбрать такую стратегию S_B, которая обеспечивает:

$$\min_j \max_i \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, p_i \cdot q_j = v_B. \tag{2.4}$$

Весьма важным для теории и практики является вопрос о том, связаны ли между собой v_A и v_B. Ответ на него дает теорема о максимине.

<u>Теорема о максимине</u>. В конечной игре двух игроков (коалиций) с нулевой суммой (матричной игре) при $\alpha \neq \beta$ имеет место равенство:

$$v_A = v_B. \tag{2.5}$$

Теорема о максимине указывает на существование равновесия для случая $v_A = v_B$, при $\alpha \neq \beta$ и, следовательно, существования оптимальных смешанных стратегий.

Поэтому другая формулировка теоремы о максимине, называемая основной теоремой матричных игр, определяется следующим образом.

Основная теорема матричных игр. Любая матричная игра имеет, по крайней мере, одно оптимальное решение, в общем случае, в смешанных стратегиях и соответствующую цену v.

Обе эти теоремы эквивалентны. Из этих теорем следует, что любая матричная игра имеет цену v. Цена игры v – средний выигрыш, приходящийся на одну партию, всегда удовлетворяет условию:

$$\alpha \le \nu \le \beta, \tag{2.6}$$

т. е. лежит между нижней α и верхней β ценами игры.

Оптимальное решение игры в смешанных стратегиях, так же как и решение в чистых стратегиях, обладает тем свойством, что каждый из игроков не заинтересован в отходе от своей оптимальной смешанной стратегии, если его противник применяет свою оптимальную смешанную стратегию, так как это ему невыгодно.

Эта пара стратегий образует в игре положение равновесия: один игрок хочет обратить выигрыш в максимум, другой – в минимум, каждый «тянет» в свою сторону и при оптимальном поведение обоих устанавливается равновесие и устойчивый выигрыш ν.

Определение. Те из чистых стратегий игроков A и B, которые входят в их оптимальные смешанные стратегии с вероятностями, не равными нулю, называются *активными стратегиями*.

Существует теорема об активных стратегиях, применение которой позволяет упрощать решение некоторых матричных игр.

Теорема об активных стратегиях. Если один из участников матричной игры G (m x n), придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то это обеспечивает ему максимальный средний выигрыш, равный цене игры ν, независимо от того, какие действия предпринимает другой игрок, если только он не выходит за пределы своих активных стратегий (т. е. пользуется любой из них в чистом виде или смешивает их в любых пропорциях), причем число активных стратегий каждого игрока, входящих в их оптимальные смешанные стратегии, не превосходит L, где L = min(m, n).

Использование данной теоремы позволяет, в частности, упрощать решение матричных игр 2 x n и m x 2.

2.5. Решение матричной игры (2 x 2)

Пусть матричная игра G (2x2) имеет платежную матрицу:

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

Предположим, что игра не имеет седловой точки, т. е. $\alpha \neq \beta$. При наличии седловой точки решение очевидно.

В соответствии с основной теоремой игра имеет оптимальное решение в смешанных стратегиях: $S_A=\|p_1,\ p_2\|$ и $S_B=\|q_1,\ q_2\|$, где вероятности применения (относительные частоты применения) чистых стратегий удовлетворяют соотношениям:

$$p_1 + p_2 = 1; \tag{2.7}$$

$$q_1 + q_2 = 1. \tag{2.8}$$

В соответствии с теоремой об активных стратегиях, оптимальная смешанная стратегия обладает тем свойством, что обеспечивает игроку максимальный средний выигрыш, равный цене игры **ν**, независимо от того, какие действия предпринимает другой игрок, если тот не выходит за пределы своих активных стратегий. В частности, если игрок **A** использует свою оптимальную смешанную стратегию, а игрок **B** – свою чистую активную стратегию $\mathbf{B_1}$, то цена игры **ν** равна:

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = \nu, \tag{2.9}$$

а при использовании игроком **B** чистой активной стратегии $\mathbf{B}_2$, выигрыш будет равен:

$$a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = \nu. \tag{2.10}$$

Уравнения (2.7), (2.9) и (2.10) образуют систему трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестным: p_1, p_2 и ν.

Решая ее, легко находим, что:

$$p_1 = \frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{21}-a_{12}} \tag{2.11}$$

$$p_2 = \frac{a_{11}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{21}-a_{12}} \tag{2.12}$$

$$\nu = \frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{21}-a_{12}} \tag{2.13}$$

Если игрок **B** использует свою оптимальную смешанную стратегию, а игрок **A** – свою чистую активную стратегию $\mathbf{A_1}$, то цена игры **ν** равна:

$$a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = \nu, \tag{2.14}$$

а при использовании игроком **A** чистой активной стратегии $\mathbf{A_2}$, выигрыш будет равен:

$$a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = \nu \tag{2.15}$$

Уравнения (2.8), (2.14) и (2.15) образует систему трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными: q_1; q_2 и ν.

Решая ее, легко находим, что:

$$q_1 = \frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{21}-a_{12}} \tag{2.16}$$

$$q_2 = \frac{a_{11}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{21}-a_{12}} \tag{2.17}$$

$$\nu = \frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{21}-a_{12}}. \tag{2.18}$$

Естественно, что в обоих случаях цена игры (выражения (2.13) и (2.18)) получилась одна и та же.

Чтобы соотношения (2.11), (2.12), (2.13), (2.16), (2.17), (2.18) имели смысл, необходимо потребовать, чтобы:

$$\begin{cases} a_{22} - a_{21} > 0; \\ a_{11} - a_{12} > 0; \\ a_{22} - a_{12} > 0; \\ a_{11} - a_{21} > 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a_{22} - a_{21} < 0; \\ a_{11} - a_{12} < 0; \\ a_{22} - a_{12} < 0; \\ a_{11} - a_{21} < 0. \end{cases}$$

Тогда $0 < p_1 < 1$; $0 < p_2 < 1$; $0 < q_1 < 1$; $0 < q_2 < 1$.

Нетрудно заметить, что в этих неравенствах отражено предположение об отсутствии в рассматриваемой игре седловой точки. Действительно, ни один из четырех выигрышей a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} не может удовлетворить этим неравенствам, будучи минимальным в своей строке и максимальным в своем столбце.

Решения системы уравнений (2.11), (2.12), (2.13) и (2.16), (2.17), (2.18), полученные алгебраическим методом, удобно получать и графическим методом (рис. 2.1) Для нахождения вероятностей $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ и цены игры $\boldsymbol{\nu}$ в прямоугольной системе координат по оси абсцисс откладывается вероятность $\mathbf{p}_1 \in [0,1]$, а по оси ординат – соответствующие этой вероятности выигрыши игрока А.

При $p_1 = 0$, игрок **А** применяет чистую стратегию $\mathbf{A}_2$. Если при этом игрок **В** применяет чистую стратегию $\mathbf{B}_1$, то выигрыш игрока **А** равен a_{21} (уравнение (2.9)), а если игрок **В** применяет чистую стратегию $\mathbf{B}_2$, то выигрыш игрока **А** равен a_{22} (уравнение (2.10)). При $p_1 = 1$, игрок **А** применяет чистую стратегию $\mathbf{A}_1$.

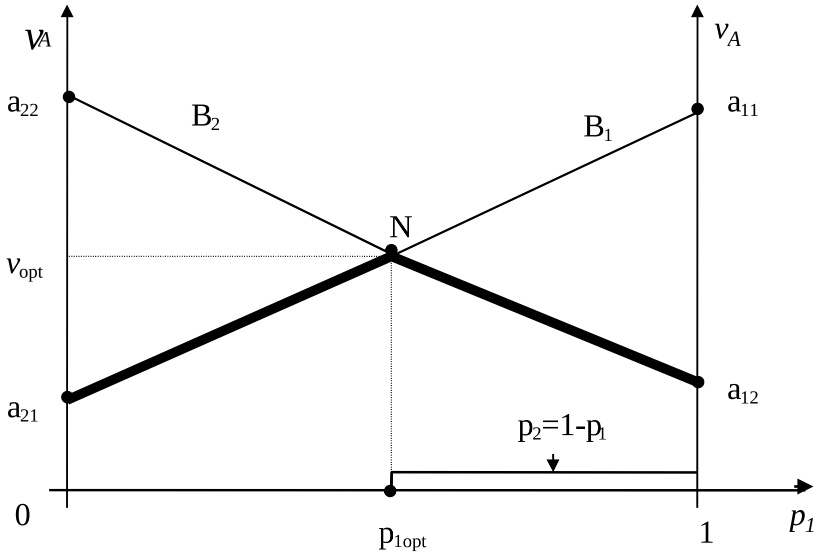

Рис. 2.1. Графический метод решения задачи для игрока 1

Если при этом игрок **В** применяет чистую стратегию **В**$_1$, то выигрыш игрока **А** равен a_{11}, а при применении чистой стратегии B_2 - a_{12}. Так как значения p_1 лежат в пределах [0, 1], то соединяя крайние точки для стратегий B_1 и B_2 (строя графики функций $\boldsymbol{v_A} = (a_{11} - a_{21})p_1 + a_{22}$ и $\boldsymbol{v_A} = (a_{12} - a_{22})p_1 + a_{22}$), получаем значения выигрышей игрока **А** для всех промежуточных значений $\mathbf{p}_1$.

В соответствии с принципом максимина игрок **А** должен выбрать такую смешанную стратегию, при которой его минимальный выигрыш максимален. Точка **N** пересечения отрезков прямых (рис. 2.1) и определяет как оптимальную цену игры $\boldsymbol{v}_{opt}$, так и оптимальные вероятности $\mathbf{p}_{1opt}$ и $\mathbf{p}_{2opt} = 1\text{-}\mathbf{p}_{1opt}$, соответствующие оптимальной смешанной стратегии игрока А, т. е. дает решения системы уравнений (2.7), (2.9), (2.6).

Для графического решения системы уравнений (2.4), (2.10), (2.15) отложим по оси абсцисс вероятность $q_1 \in [0,1]$, а по оси ординат соответствующие этой вероятности выигрыши игрока В:

$$\boldsymbol{v_B} = (a_{11}\text{-}a_{12})q_1 + a_{12}; \qquad (2.19)$$

$$\boldsymbol{v_B} = (a_{21}\text{-}a_{22})q_1 + a_{22}. \qquad (2.20)$$

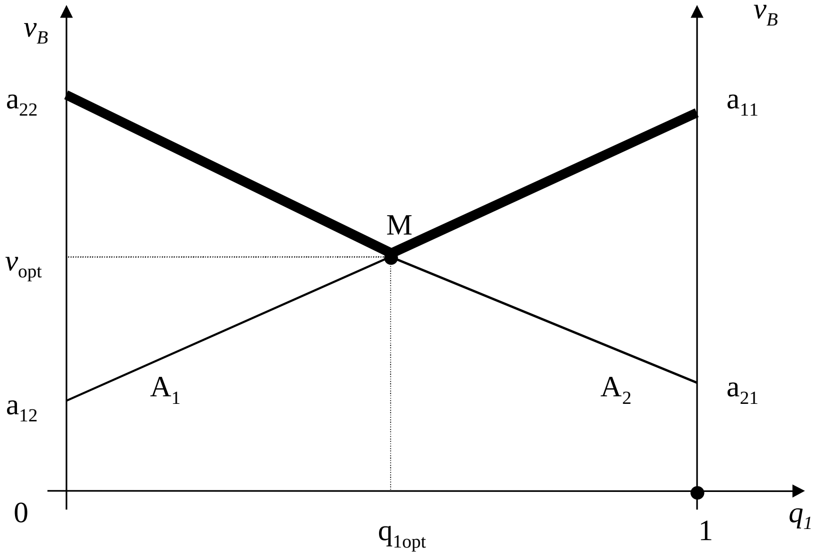

Рис. 2.2. Графический метод решения задачи для игрока 2

Решением являются координаты точки **M** пересечения прямых, описываемых уравнений (2.19) и (2.20): q_{1opt};$q_{2opt} = 1-q_{1opt}$ и v_{opt}.

Это же следует и из принципа максимина, в соответствии с которым игрок В должен выбрать такую смешанную стратегию, при которой его максимальный проигрыш будет минимальным.

Для игры G (2 x 2) с седловой точкой геометрическая интерпретация решения быть представлена, например, следующим образом (рис. 2.3).

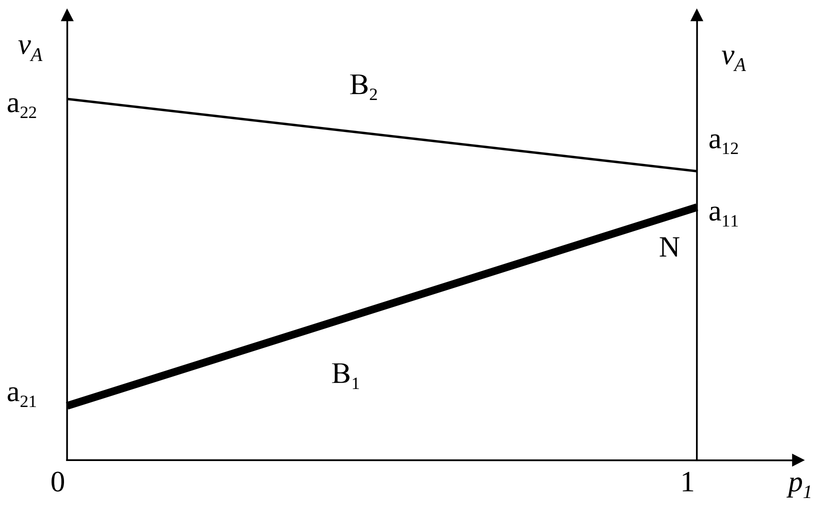

Рис. 2.3. Геометрическая интерпретация для игры G (2 x 2) с седловой точкой

Стратегия $\mathbf{B}_2$ игрока **B** является для него явно невыгодной, так как, применяя ее, он в любой случае проигрывает больше, чем при применении стратегии $\mathbf{B}_1$. В данной игре $\mathbf{p_{1opt} = 1; p_{2opt} = 0;}$ $\boldsymbol{v_{opt} = a_{11}}$, т. е. игра имеет седловую точку **N** и решается в чистых стратегиях. Игрок **A** должен применять стратегию $\mathbf{A}_1$, а игрок **B** – стратегию B_1.

На рис. 2.4 показан случай, в котором решением игры для игрока **A** является чистая стратегия $\mathbf{A}_2$, а для игрока **B** – стратегия $\mathbf{B}_1$.

Игра имеет седловую точку N.

<u>Пример 2.5</u>

Найти алгебраическим и геометрическим методами решение игры, платежная матрица которой имеет вид:

B_j / A_i	B_1	B_2	α_i
A_1	4	-2	-2
A_2	1	3	1
β_j	4	3	

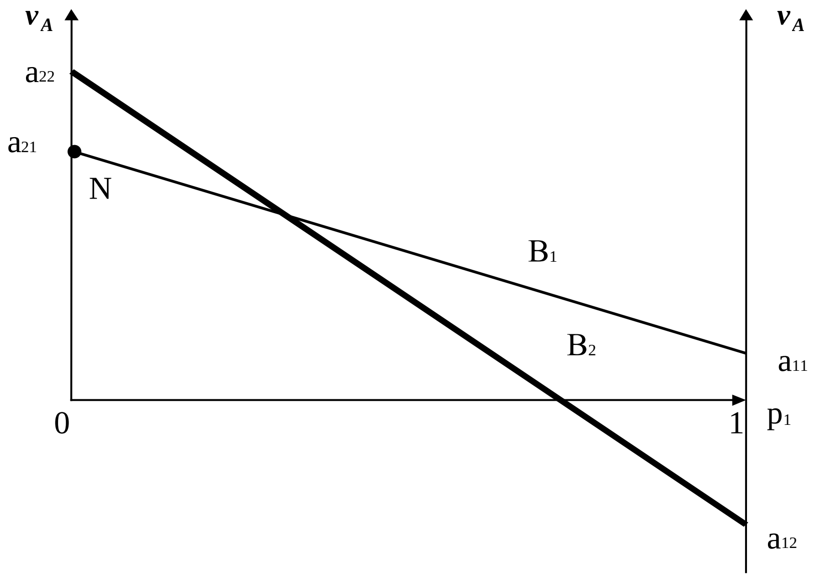

Рис. 2.4. Решение игры с чистой стратегией для игрока A

В данной игре нижняя цена игры $\alpha = 1$ не равна верхней цене игры $\beta = 3$, поэтому игра не имеет седловой точки и, в соответствии с основной теоремой матричных игр, имеет оптимальное решение в смешанных стратегиях.

Для игрока **A,** в соответствии с формулами (2.11) и (2.12), оптимальные вероятности применения стратегий $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{A_2}$ равны:

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{3-1}{4+3-1+2} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4};$$

$$p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{4+2}{4+3-1+2} = \frac{3}{4}.$$

Для игрока **B**, в соответствии с формулами (2.16) и (2.17), оптимальные вероятности применения стратегий **B₁** и **B₂** равны:

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{3+2}{4+3-1+2} = \frac{5}{8};$$

$$q_2 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{4-1}{8} = \frac{3}{8}.$$

Таким образом, оптимальные смешанные стратегии игроков $S_A = \left\|\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right\|$; $S_B = \left\|\frac{5}{8}; \frac{1}{8}\right\|$, а цена игры в соответствии с формулой (2.18) равна:

$$v = \frac{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{4 \cdot 3 - (-2) \cdot 1}{4+3-1+2} = \frac{7}{4}.$$

Так как $\nu > 0$, то игра выгодна для игрока А.

Графическое изображение игры для игрока А показана на рис. 2.8.

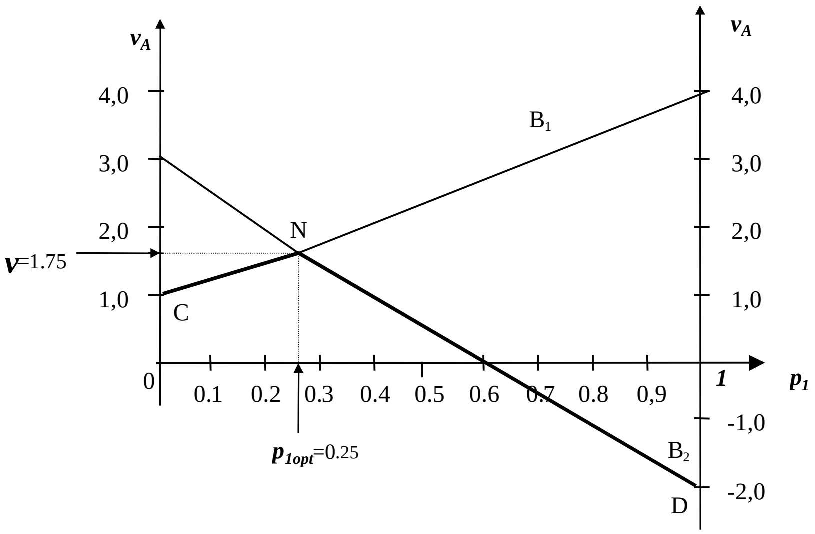

Рис. 2.5. Графическое изображение игры для игрока А из примера 2.5

Нижняя граница выигрыша игрока А определяется ломаной CND. Оптимальное решение определяется точкой N, естественно, дает тоже решение, что и алгебраический метод: $S_A = \|0{,}25; 0{,}75\|$, $\quad v = 1{,}75$.

Геометрическое изображение игры для игрока В показано на рис. 2.6.

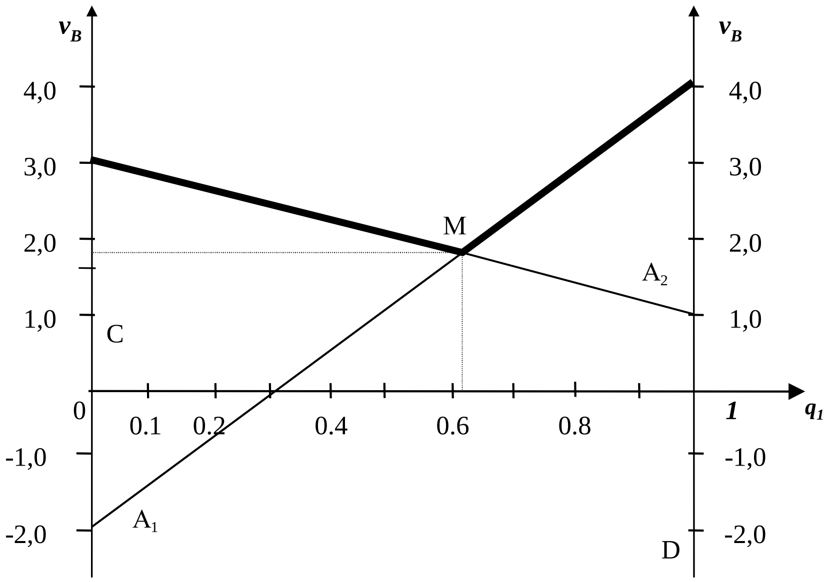

Рис. 2.6. Графическая интерпретация для игрока В

Оптимальное решение, определяемое точкой М, дает решение $S_B = \|0{,}625;0{,}375\|, \quad v = 1{,}75$.

Задачи

Определите алгебраическим и геометрическим методами оптимальные решения следующих игр **2 x 2**:

1.

	B_1	B_2
A_1	5	2
A_2	-1	0

2.

	B_1	B_2
A_1	-3	-6
A_2	-4	-5

3.

	B_1	B_2
A_1	6	9
A_2	7	8

4.

	B_1	B_2
A_1	0	7
A_2	10	4

5.

	B_1	B_2
A_1	8	6
A_2	4	7

6.

	B_1	B_2
A_1	0	-1
A_2	-3	0

7.

	B_1	B_2
A_1	-10	-16
A_2	-12	-14

8.

	B_1	B_2
A_1	7	9
A_2	13	11

9.

	B_1	B_2
A_1	1	2
A_2	4	3

10.

	B_1	B_2
A_1	-3	-2
A_2	0	-2

11.

	B_1	B_2
A_1	0	2
A_2	3	1

12.

	B_1	B_2
A_1	-1	1
A_2	2	0

13.

	B_1	B_2
A_1	6	-2
A_2	-2	6

14.

	B_1	B_2
A_1	4	-5
A_2	-5	4

15.

	B_1	B_2
A_1	5	6
A_2	6	5

2.6. Упрощение матричных игр

Решение матричных игр тем сложнее, чем больше размерность платежной матрицы. Поэтому для игр с платежными матрицами большой размерности отыскание оптимального решения можно упростить, если уменьшить их размерность путем исключения дублирующих и заведомо невыгодных (доминируемых) стратегий.

Определение. Если в платежной матрице игры все элементы строки (столбца) равны соответствующим элементам другой строки (столбца), то соответствующее этим строкам (столбцам) стратегии называются *дублирующими*.

Определение. Если в платежной матрице игры все элементы некоторой строки, определяющей стратегию A_i игрока A, не больше (меньше или некоторые равны) соответствующих элементов другой строки, то стратегия A_i называется *доминируемой* (заведомо невыгодной).

Определение. Если в платежной матрице игры все элементы некоторого столбца, определяющего стратегию B_i игрока B не меньше (больше или некоторые равны) соответствующих элементов другого столбца, то стратегия B_i называется доминируемой (заведомо невыгодной).

Правило. Решение матричной игры не изменится, если из платежной матрицы исключить строки и столбцы, соответствующие дублирующим и доминируемым стратегиям.

Пример 2.6

Упростить матричную игру, платежная матрица которой имеет вид:

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
→ A_1	5	9	3	4	5
A_2	4	7	7	9	10
A_3	4	6	3	3	9
→ A_4	4	8	3	4	5
A_5	4	7	7	9	10

Из платежной матрицы видно, что стратегия A_2 дублирует стратегию A_5, потому любую из них можно отбросить (отбросим стратегию A_5). Сравнивая почленно стратегии A_1 и A_4, видим, что каждый элемент строки A_4 не больше соответствующего элемента строки A_1. Поэтому применение игроком A доминирующей над A_4 стратегии A_1 всегда обеспечивает выигрыш, не меньший того, который был бы получен при применении стратегии A_4. Следовательно, стратегию A_4 можно отбросить. Таким образом, имеем упрощенную матричную игру с платежной матрицей вида:

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	5	9	3	4	5
A_2	4	7	7	9	10
A_3	4	6	3	3	9

Из этой матрицы видно, что в ней некоторые стратегии игрока B доминируют над другими: B_3 над B_2, B_4 и B_5. Отбрасывая доминируемые стратегии B_2, B_4 и B_5, получаем игру 3 x 2, имеющей платежную матрицу вида:

A_i \ B_j	B_1	B_3
A_1	5	3
A_2	4	7
A_3	4	3

В этой матрице стратегия A_3 доминируется как стратегией A_1, так и стратегией A_2. Отбрасывая стратегию A_3, окончательно получаем игру 2 x 2 с платежной матрицей:

A_i \ B_j	B_1	B_3
A_1	5	3
A_2	4	7

Эту игру уже упростить нельзя, ее надо решать рассмотренным выше алгебраическим или геометрическим методом.

Необходимо отметить, что отбрасывая дублируемые и доминируемые стратегии в игре с седловой точкой, мы все равно придем к игре с седловой точкой, т. е. к решению в чистых стратегиях. Но лучше сразу проверить, не обладает ли игра седловой точкой – это проще, чем сравнивать почленно все строки и все столбцы платежной матрицы.

Алгебраические методы решения матричных игр иногда производить проще, если использовать также следующие свойства матричных игр.

<u>Свойство 1.</u> Если ко всем элементам платежной матрицы прибавить (вычесть) одно и тоже число C, то оптимальные смешанные стратегии игроков не изменятся, а только цена игры увеличится (уменьшится) на это число C.

<u>Свойство 2.</u> Если каждый элемент платежной матрицы умножить на положительное число k, то оптимальные смешанные стратегии игроков не изменятся, а цена игры умножится на k.

Отметим, что эти свойства верны и для игр, имеющих седловую точку. Эти два свойства матричных игр применяются в следующих случаях:

1) если матрица игры наряду с положительными имеет и отрицательные элементы, то ко всем ее элементам прибавляют такое число, чтобы исключить отрицательные числа в матрице;

2) если матрица игры имеет дробные числа, то для удобства вычислений элементы этой матрицы следует умножить на такое число, чтобы все выигрыши были целыми числами.

<u>Пример 2.7</u>

Решить матричную игру 2 x 2 с платежной матрицей вида:

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	0.5	-0.2
A_2	0.1	0.3

Умножая все элементы платежной матрицы на 10, а затем прибавляя к ним число 2, получаем игру с платежной матрицей:

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	7	0
A_2	3	5

Решая эту игру алгебраическим методом, получаем:

$$p_1 = \frac{5-3}{7+5-3-0} = \frac{2}{9}; \qquad p_2 = \frac{7}{9};$$

$$q_1 = \frac{5-0}{7+5-3-0} = \frac{5}{9}; \qquad q_2 = \frac{4}{9};$$

$$v = \frac{7 \cdot 5 - 0 \cdot 3}{7+5-3-0} = \frac{35}{9}.$$

В соответствии со свойствами 1 и 2, исходная матричная игра имеет те же оптимальные смешанные стратегии: $S_A = \left\| \frac{2}{9} : \frac{7}{9} \right\|$ и $S_B = \left\| \frac{5}{9} : \frac{4}{9} \right\|$. А для получения исходной цены игры необходимо из полученной цены игры вычесть 2, а затем разделить на 10. Таким образом, получаем цену исходной игры: $\left(\frac{35}{9} - 2\right) : 10 = \frac{17}{90}$.

2.7. Решение игр 2 x n и m x 2

Как уже отмечалось в теореме об активных стратегиях, любая конечная игра **m x n** имеет решение, в котором число активных стратегий каждого игрока не превосходит L, где $L = min(m, n)$. Следовательно, у игры **2 x n** или **m x 2** всегда имеется решение содержащее не более двух активных стратегий у каждого из игроков $(min(2, n) = min(m, 2) = 2)$. Если эти активные стратегии игроков будут найдены, то игры **2 x n** и **m x 2** превращаются в игры **2 x 2**, методы решения которых рассмотрены выше.

Практически решение игры **2 x n** осуществляется следующим образом:

1) строится графическое изображение игры для игрока **A**;

2) выделяется нижняя граница выигрыша и находится наибольшая ордината нижней границы (максимин), которая равна цене игры ***v***;

3) определяется пара стратегий игрока **B**, пересекающихся в точке оптимума. Эти стратегии и являются активными стратегиями игрока **B**.

Таким образом, игра **2 x n** сведена к игре **2 x 2**, которую более точно можно решить алгебраическим методом.

Если в точке оптимума пересекается более двух стратегий, то в качестве активных стратегий может быть выбрана **любая пара** из них.

Решение игры **m x 2** осуществляется аналогично. Но в этом случае строится графическое изображение игры для игрока **B** и выделяется не нижняя, а верхняя граница выигрыша (так как находится оптимальная смешанная стратегия игрока **B)**, и на ней находится точка оптимума с наименьшей ординатой (минимакс).

Пример 2.8

Найти решение игры, платежная матрица которой имеет вид:

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3
A_1	2	5	8
A_2	7	4	3

Платежная матрица не имеет седловой точки, поэтому оптимальное решение должно быть в смешанных стратегиях. Строим графическое изображение игры для игрока **A** (рис. 2.7).

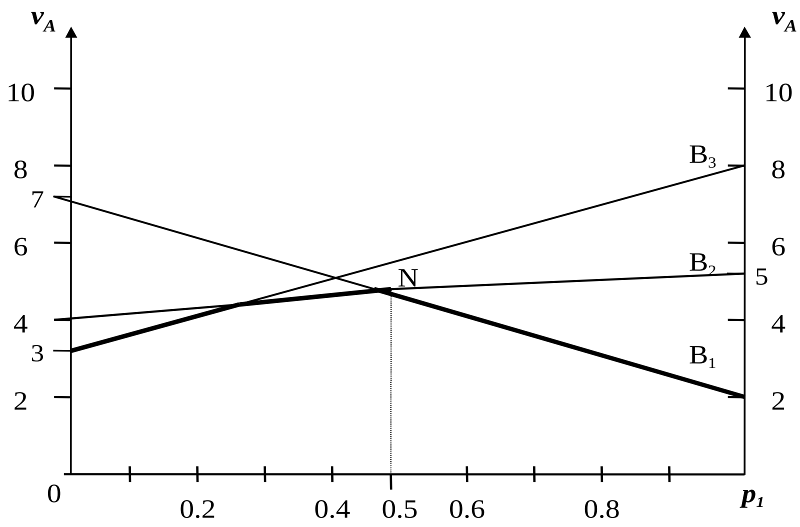

Рис. 2.7. Графическое изображение для игрока А

Точка **N** (максимин) является точкой оптимума. В этой точке пересекаются линии, соответствующие активным стратегиям $\mathbf{B_1}$ и $\mathbf{B_2}$ игрока **B**. Таким образом, исключая стратегию $\mathbf{B_3}$, получаем матричную игру **2 x 2** с платежной матрицей вида:

B_j / A_i	B_1	B_2
A_1	2	5
A_2	7	4

Используя алгебраический метод решения этой игры, получаем точное решение:

$$p_1 = \frac{4-7}{2+4-7-5} = \frac{1}{2}; \qquad p_2 = 1 - p_1 = \frac{1}{2};$$

$$q_1 = \frac{4-5}{2+4-7-5} = \frac{1}{6}; \qquad q_2 = 1 - q_1 = \frac{5}{6};$$

$$v = \frac{2 \cdot 4 - 7 \cdot 5}{2+4-7-5} = \frac{27}{6}.$$

Ответ: $S_A = \left\| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\|;\ S_B = \left\| \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 0 \right\|;\ v = \frac{27}{6}.$

Пример 2.9

Найти решение игры, платежная матрица которой имеет вид:

B_j / A_i	B_1	B_2
A_1	0	1
A_2	4	2
A_3	-1	4
A_4	1	-3
A_5	6	-2
A_6	1,5	3

Платежная матрица не имеет седловой точки. Для сведения данной игры к игре **2 x 2** строим ее графическое изображение для игрока **B** (рис. 2.8).

Точка **M** (минимакс) является точкой оптимума. В этой точке пересекаются отрезки, соответствующие активным стратегиям A_2, A_6 и A_3 игрока A. Таким образом, исключая стратегии A_1, A_4 и A_5 и выбирая из трех активных стратегий две (например, A_2 и A_3 или A_2 и A_6), приходим к матричной игре **2 x 2**. Выбор стратегий A_3 и A_6 исключен, так как в этом случае точка M перестанет быть точкой минимакса.

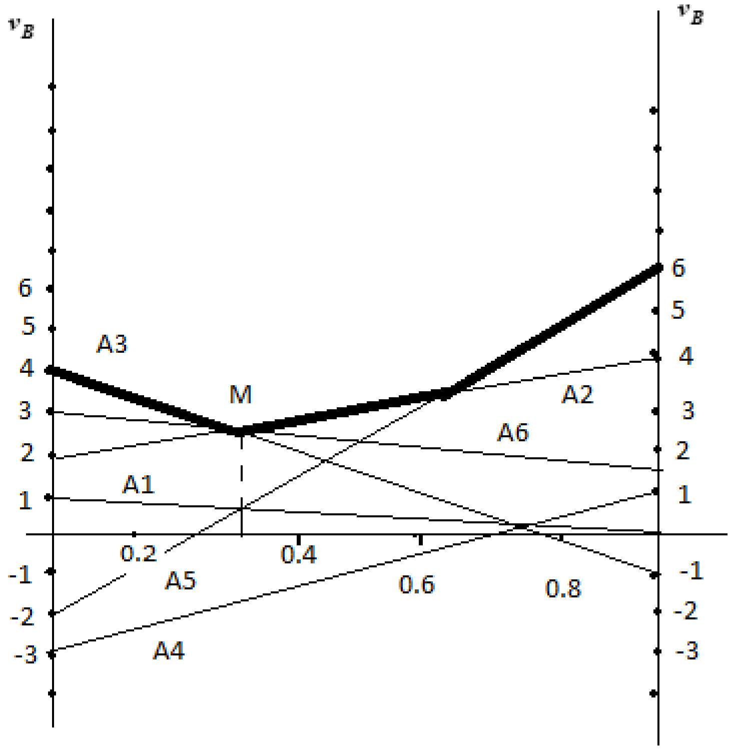

Рис. 2.8. Графическое изображение игры для игрока **B**

Пусть выбираются стратегии A_2 и A_3. Тогда игра **2 x 2** приобретает вид:

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2
A_2	4	2
A_3	-1	4

Оптимальные смешанные стратегии данной игры, а, следовательно, и исходной игры определяются следующими вероятностями:

$p_1 = \frac{4+1}{4+4-2+1} = \frac{5}{7}$; $\qquad p_2 = \frac{2}{7}$;

$q_1 = \frac{4-2}{4+4-2+1} = \frac{2}{7}$; $\qquad q_2 = \frac{5}{7}$;

$v = \frac{4 \cdot 4 - 1 \cdot 2}{4+4-2+1} = \frac{18}{7}$.

Ответ: $S_A = \left\| 0, \frac{5}{7}, \frac{2}{7}, 0,0,0 \right\|$; $\; S_B = \left\| \frac{2}{7}, \frac{5}{7} \right\|$; $\; v = \frac{18}{7}$.

Другой вариант игры **2 x 2** получается, если использовать стратегии A_2 и A_6. В этом случае платежная матрица имеет вид:

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2
A_2	4	2
A_6	1,5	3

Тогда:

$$p_1 = \frac{3-1\frac{1}{2}}{4+3-1\frac{1}{2}-2} = \frac{3}{7}; \qquad p_2 = \frac{4}{7};$$

$$q_1 = \frac{3-2}{4+3-1\frac{1}{2}-2} = \frac{2}{7}; \qquad q_2 = \frac{5}{7};$$

$$v = \frac{4 \cdot 3 - 2 \cdot 1\frac{1}{2}}{4+3-1\frac{1}{2}-2} = \frac{18}{7}.$$

Ответ: $S_A = \left\| 0, \frac{3}{7}, 0,0,0, \frac{4}{7} \right\|$; $\; S_B = \left\| \frac{2}{7}, \frac{5}{7} \right\|$; $\; v = \frac{18}{7}$.

Естественно, что цена игры для обоих вариантов одинакова.

В заключение наметим общую схему решения матричных игр **2 x n** и **m x 2**:

1. Определяется наличие седловой точки, т. е. возможность решения игры в чистых стратегиях. Если нижняя цена игры α не равна верхней цене игры β, то осуществляется поиск решения в смешанных стратегиях.

2. Производится упрощение матричной игры путем исключения дублирующих и доминируемых стратегий. Если упрощенная игра имеет размерность не **2 х 2**, то переходим к этапу 3.

3. Строится графическое изображение игры и определяется две активные стратегии игрока, имевшего в исходной задаче число стратегий больше двух.

4. Решается матричная игра **2 х 2**.

Задачи

Решить следующие матричные игры:

1.

8	1	7
3	0	7

2.

-4	-8	-7	-3
-5	-9	-8	-4

3.

5	1	3
7	8	2

4.

6	13	19	25	19	15	16	18
19	25	19	18	16	12	13	15

5.

3	3	4	5
5	4	3	3

6.

0,4	0,5	1
1	0,5	0,3

7.

1	2	3
4	3	0

8.

11	8	12	1
-7	-1	-8	2

9.

10	-4	6	14	0
0	10	4	4	12

10.

2	-6	10	-14	18
-4	8	-12	16	-20

11.

3	7	-1	11	-5
6	2	10	-4	14

12.

9	-5	7	1	-3
-10	4	-8	-6	2

13.

24	0	18	21
9	18	9	3

14.

7	9	0
6	0	10

15.

-1	8	7	6	3	1
9	0	1	2	5	7

16.

1	3
5	7
9	11

17.

2	10
4	8
6	6
8	4
10	2

18.

-3	-9
-15	-21
-27	-33

19.

1	3
5	7
9	11

20.

-1	5
-3	1
0	-3
-3	0
1	-3
5	-1

21.

11	3
9	7
10	5
7	11
8	9

22.

2	2	3	-1
4	3	2	6

23.

4	8
4	6
6	4
-2	12

24.

1	3
1	4
2	1
-1	5

25.

2	4	-2	8
3	6	5	-5

26.

1	2
5	6
-7	9
-4	-3
2	1

27.

5	9
5	7
7	5
-1	13

28.

3	8	12
6	10	14

29.

0	8
2	6
4	4
6	2
8	0

30.

-2	10
-6	2
0	-6
-6	0
1	1
2	-6
10	-2

2.8. Решение игр m x n
Эквивалентные задачи линейного программирования

Пусть имеется матричная игра **m x n** без седловой точки с матрицей выигрышей $\|a_{ij}\|$. Допустим, что все выигрыши a_{ij} положительны (этого всегда можно добиться, прибавляя ко всем элементам матрицы достаточно большое число C; от этого, как уже отмечалось, цена игры увеличится на C, а оптимальные решения S_A и S_B не изменятся).

Если все aij **положительны**, то и цена игры $\boldsymbol{\nu}$ при оптимальной стратегии тоже положительна, т. к. $\alpha \le \nu \le \beta$.

В соответствии с основной теоремой матричных игр, если платежная матрица не имеет седловой точки, то имеется пара оптимальных смешанных стратегий $S_A = \|p_1, p_2, ..., p_m\|$ и $S_B = \|q_1, q_2, ..., q_n\|$, применение которой обеспечивает игрокам получение цены игры ν.

Найдем вначале S_A. Для этого предположим, что игрок B отказался от своей оптимальной смешанной стратегии S_B и применяет только чистые стратегии. В каждом из этих случаев выигрыш игрока $\boldsymbol{A}$ будет не меньше, чем $\boldsymbol{\nu}$:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{m1}p_m \geq v, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{m2}p_m \geq v, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \ldots + a_{mn}p_m \geq v. \end{cases} \tag{2.21}$$

Разделив левую и правую часть каждого из неравенств (2.21) на положительную величину v и введя обозначения:

$$x_1 = \frac{p_1}{v}; x_2 = \frac{p_2}{v}; \qquad \cdots, x_m = \frac{p_m}{v}. \tag{2.22}$$

запишем неравенства (2.21) в следующем виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \geq 1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \geq 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \geq 1 \end{cases} \tag{2.23}$$

где x_1, x_2, ... x_m – неотрицательные переменные.

В силу того, что $p_1+p_2+\ldots+p_m = 1$, переменные x_1, x_2, ... x_m удовлетворяют условию:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \frac{1}{v}. \tag{2.24}$$

Учитывая, что игрок А стремится максимизировать $\boldsymbol{v}$, получаем следующую задачу линейного программирования: найти неотрицательные значения переменных x_1, x_2, ... x_m такие, чтобы они удовлетворяли линейным ограничениям – неравенствам (2.23) и обращали в минимум линейную функцию этих переменных:

$$\min L(x) = x_1+x_2+ \ldots +x_m. \tag{2.25}$$

Из решения задачи линейного программирования находим цену игры $\boldsymbol{v}$ и оптимальную стратегию Sa по формулам:

$$v = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} x_i}, \tag{2.26}$$

$$p_i = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = x_i \cdot v, \quad i=\overline{1,m}. \tag{2.27}$$

Аналогично находим оптимальную стратегию S_B игрока В. Предположим, что игрок А отказался от своей оптимальной стратегии S_A и применяет только чистые стратегии. Тогда проигрыш игрока В в каждом из этих случаев будет не больше, чем $\boldsymbol{v}$:

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \ldots + a_{1n}q_n \leq v, \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \ldots + a_{2n}q_n \leq v, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \ldots + a_{mn}q_n \leq v. \end{cases} \tag{2.28}$$

Разделив левую и правую части каждого их неравенств (2.28) на положительную величину $\boldsymbol{v}$ и введя обозначения:

$$y_1 = \frac{q_1}{v}; y_2 = \frac{q_2}{v}; \dots \quad y_n = \frac{q_n}{v}, \tag{2.29}$$

запишем неравенство (2.28) в следующем виде:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \le 1, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \le 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \le 1. \end{cases} \tag{2.30}$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – неотрицательные переменные.

В силу того, что $q_1+q_2+\ldots+q_n = 1$, переменные $y_1, y_2, \ldots, y_n$ удовлетворяют условию:

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = \frac{1}{v}. \tag{2.31}$$

Учитывая, что игрок В стремится минимизировать положительную цену $\boldsymbol{v}$ (свой проигрыш), получаем задачу линейного программирования: найти неотрицательные значения переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$ такие, чтобы они удовлетворяли линейным ограничениям (2.30) и обращали в максимум линейную функцию этих переменных:

$$\max L(y) = y_1+y_2+ \ldots +y_m. \tag{2.32}$$

Эта задача является двойственной по отношению к задаче, представленной условиями (2.23) и (2.25).

Оптимальная стратегия $S_B = \|q_1, q_2, \ldots, q_n\|$ игрока В определяется из решения двойственной задачи линейного программирования по формулам:

$$q_j = \frac{y_j}{\sum_{j=1}^{n} y_j} = y_j \cdot v, \ j = \overline{1,n}. \tag{2.33}$$

Таким образом, оптимальные стратегии $S_A = \|p_1, p_2, \ldots, p_m\|$ и $S_B = \|q_1, q_2, \ldots, q_n\|$ матричной игры **m x n** с платежной матрицей $\|a_{ij}\|$ могут быть найдены путем решения пары двойственных задач линейного программирования:

Прямая (исходная) задача	Двойственная задача
$\min L(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i,$	$\max L(y) = \sum_{j=1}^{n} y_j,$
$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \ge 1, j = \overline{1,n};$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \le 1, i = \overline{1,m};$
$x_i \ge 0, i = \overline{1,m}.$	$y_j \ge 0, i = \overline{1,n}.$

При этом:

$$v = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} x_i} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} y_j} = \frac{1}{\min L(x)} = \frac{1}{\max L(y)}, \tag{2.34}$$

$$p_i = x_i \cdot v; \quad i = \overline{1,m}; \quad q_j = y_j \cdot v; \quad j = \overline{1,n}.$$

Пример 2.10. Найти решение и цену матричной игры, платежная матрица которой имеет вид:

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3
A_1	1	2	3
A_2	3	1	1
A_3	1	3	1

Решение

1. Так как $\alpha = 1$ не равно $\beta = 3$, то игра не имеет седловой точки.
2. В данной игре нет дублирующих и доминируемых стратегий.
3. Решаем игру путем решения пары двойственных задач линейного программирования.

Математические модели пары двойственных задач линейного программирования будут выглядеть следующим образом:

Прямая (исходная) задача:

Найти неотрицательные переменные x_1, x_2, x_3, минимизирующие функцию $\min L(x) = x_1 + x_2 + x_3$, при ограничениях:

$$x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 1;$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 1;$$
$$3x_1 + x_2 + x_3 \geq 1;$$
$$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,3}.$$

Двойственная задача:

Найти неотрицательные переменные y_1, y_2, y_3, максимизирующие функцию $\max L(x) = y_1 + y_2 + y_3$, при ограничениях:

$$y_1 + 2y_2 + 3y_3 \leq 1;$$
$$3y_1 + y_2 + y_3 \leq 1;$$
$$y_1 + 3y_2 + y_3 \leq 1;$$
$$y_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}.$$

Данные задачи решаются, например, симплекс-методом. Поскольку в двойственной задаче ограничения имеют вид “≤“, то эту задачу решать проще (не нужно вводить искусственные переменные). Оптимальное решение исходной задачи можно будет непосредственно получить из данных симплекс-таблицы для оптимального решения двойственной задачи.

Начальная симплекс-таблица двойственной задачи имеет вид:

БП	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	Решение
y_4	1	2	3	1	0	0	1
y_5	3	1	1	0	1	0	1
y_6	1	3	1	0	0	1	1
L	-1	-1	-1	0	0	0	0

↑ ведущий столбец

← ведущая строка

Последующие симплекс-таблицы приведены ниже:

БП	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	Решение
y_4	0	$1\frac{2}{3}$	$2\frac{2}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
y_1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
y_6	0	$2\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$
L	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

← ведущая строка

↑ ведущий столбец

БП	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	Решение
y_4	0	0	$\frac{9}{4}$	1	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$
y_1	1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
y_2	0	1	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$
L	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

← ведущая строка

↑ ведущий столбец

И, наконец, получаем симплекс-таблицу, которая соответствует оптимальному решению двойственной задачи:

БП	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	Решение
y_3	0	0	1	$\frac{4}{9}$	$-\frac{1}{18}$	$-\frac{5}{18}$	$\frac{1}{9}$
y_1	1	0	0	$-\frac{1}{9}$	$\frac{7}{18}$	$-\frac{1}{18}$	$\frac{2}{9}$
y_2	0	1	0	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$
L	0	0	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$

Оптимальное решение двойственной задачи линейного программирования следующее:

$$y_1 = \frac{2}{9};\ y_2 = \frac{2}{9};\ y_3 = \frac{1}{9};\ \max L(y) = \frac{5}{9}.$$

Находим оптимальную смешанную стратегию игрока B в соответствии с формулами (2.33) и (2.34):

$$v = \frac{1}{\sum_{j=1}^{3} y_j} = \frac{1}{\frac{2}{5}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}} = \frac{9}{5};$$

$q_1 = y_1 \cdot v = \frac{2}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{2}{5}$; $q_2 = y_2 \cdot v = \frac{2}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{2}{5}$; $q_3 = y_3 \cdot v = \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{1}{5}$.

Следовательно, $S_B = \left\| \frac{2}{5}; \frac{2}{5}; \frac{1}{5} \right\|$.

Оптимальное решение исходной задачи находим, используя двойственные оценки, из симплекс-таблицы для оптимального решения двойственной задачи: коэффициент при начальной базисной переменной в оптимальном уравнении прямой задачи равен разности между правой и левой частями ограничения двойственной задачи, ассоциированного с данной начальной переменной.

Получаем $x_1 = \frac{2}{9}$; $x_2 = \frac{2}{9}$; $x_3 = \frac{1}{9}$; max L (x) = $\frac{5}{9}$.

Отсюда определим вероятности применения своих активных стратегий игроком А:

$$p_1 = x_1 \cdot v = \frac{2}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{2}{5},$$

$$p_2 = x_2 \cdot v = \frac{2}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{2}{5},$$

$$p_3 = x_3 \cdot v = \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{1}{5}.$$

Следовательно: $S_A = \left\| \frac{2}{5}; \frac{2}{5}; \frac{1}{5} \right\|$.

Таким образом, решение игры **m x n** сводится к решению задачи линейного программирования. Нужно заметить, что и наоборот, – для любой задачи линейного программирования может быть построена эквивалентная ей задача теории матричных игр. Эта связь задач теории матричных игр с задачами линейного программирования оказывается полезной не только для теории игр, но и для линейного программирования. Дело в том, что существуют приближенные численные методы решения матричных игр, которые при большой размерности задачи могут оказаться проще, чем симплекс-метод.

Задачи

Решить следующие матричные игры:

1.

2	4	6
6	2	2
2	6	2

2.

-7	4	2
0	2	1
6	-5	-1

3.

-5	6	4
2	4	3
8	-3	1

4.

1	3	2
3	1	3
2	3	1

5.

2	1	0
1	2	1
0	1	2

6.

4	6	1
4	4	1
1	1	6

7.

-4	-6	-1
-4	-4	-1
-1	-1	-6

8.

-2	-5	2
-1	1	-5
-2	-1	-2

9.

5	7	1
5	5	1
2	2	6

10.

2	6	4
6	2	6
4	6	2

11.

3	6	9
9	3	3
3	9	3

12.

0	1	2
2	0	0
0	2	1

2.9. Приближенный метод решения матричных игр m x n

Рассмотрим приближенный метод решения матричных игр – метод Брауна-Робинсон (метод итераций). Идея его заключается в следующем. Разыгрывается эксперимент, в котором игроки A и B поочередно применяют друг против друга свои чистые стратегии. Каждый из игроков стремится увеличить свой выигрыш, предполагая, *что будущее будет походить на прошлое*; при этом считается, что ни один из них не знает своей оптимальной стратегии.

Такой принцип приводит к некоторой последовательности партий игры, для каждой из которых можно подсчитать приближенные оптимальные стратегии каждого из игроков, а также верхнюю и нижнюю цены игры.

Вместо того, чтобы вычислять каждый раз *средний выигрыш*, можно пользоваться суммарным за все предыдущие ходы выигрышем и выбирать ту свою стратегию, при которой этот накопленный выигрыш максимален.

Доказано, что такой метод сходится: при увеличении числа партий *средний выигрыш* на одну партию будет стремиться к цене игры, а *частоты применения стратегий* – к их вероятностям в оптимальных смешанных стратегиях игроков.

Объясним этот метод на примере игры **3 x 3**, платежная матрица которой приведена ниже. Игра начинается с произвольно выбранной стратегии игрока A, например, стратегии A_1 (выбранные стратегии обозначаются звездочкой). Платежные элементы этой строки переписываются под платежной матрицей. Игрок B, предполагая, что будущее будет походить на прошлое, выберет стратегию B_1, при которой его проигрыш минимален. Соответствующий этой стратегии проигрыш обозначен звездочкой. Платежные элементы стратегии B_1 переписываются справа от платежной матрицы. Игрок A, также предполагая, что будущее будет походить на прошлое, выбирает стратегию A_2 (наибольшее число обозначено звездочкой). Платежные элементы, соответствующие стратегии A_2, **прибавляются** поочередно к элементам предыдущей строки, записанной под матрицей. Далее выбирается наименьший элемент суммарной строки. Ему соответствует стратегия B_2. Тогда к столбцу, записанному справа от платежной матрицы, поочередно прибавляются платежные элементы стратегии B_2. Этот процесс продолжается до тех пор, пока разрыв между нижней и верхней оценками игры станет небольшим. Если при выборе стратегий на некотором шаге есть несколько альтернатив, то выбирается любая из равноценных стратегий.

В рассматриваемом примере сделано 20 шагов. За эти двадцать шагов игрок А применил свою первую стратегию (количество звездочек в суммарных выигрышах, соответствующей первой стратегии) 7 раз; вторую – 8 раз; третью – 5 раз. Игрок В применил стратегию B_1 восемь раз; вторую – 8 раз; третью – 4 раза. Следовательно, приближенные оценки оптимальных стратегий, полученные за 20 итераций, равны:

$$S_A \approx \left\| \frac{7}{20}; \frac{8}{20}; \frac{5}{20} \right\|; \quad S_B \approx \left\| \frac{8}{20}; \frac{8}{20}; \frac{4}{20} \right\|.$$

Эти оценки не так уж сильно отличаются от точного решения данной матричной игры, которое равно:

$$S_A = \|0.4; 0.4; 0.2\|; \quad S_B = \|0.4; 0.4; 0.2\|.$$

B_i / A_i	B_1	B_2	B_3
A_1	1	2	3
A_2	3	1	1
A_3	1	3	1

*

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	5	8*	9*	10	12	14	17*	20*
3*	4*	5	6	9	12*	13*	14	15	16
1	4	7*	8	9	10	13	16*	17	18

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21*	22	24*	25	27	29	31	32	33	36*
19	22*	23	26*	27*	28	29	32	35*	36
19	20	23	24	27	30*	33*	34*	35	36

1	1*	2	3
2	4	3*	4
3	7	4*	5
4	8	7	6*
5	9*	9	9
6	10*	11	12
7	13	12*	13
8	16	13*	14
9	17	16	15*
10	18	13	18*
11	19*	20	21
12	20*	22	24
13	23	23*	25
14	24*	25	28
15	27	26*	29
16	30	27*	30
17	31	30*	31
18	32*	33	32
19	33*	36	33
20	36	37	34*

Приближенную цену игры определяют как среднеарифметическое между нижней оценкой игры α, равной минимально накопленному выигрышу $\alpha_{\sum \min}$ игрока A, деленному на число шагов k, и верхней оценкой игры β, равной максимальному суммарному проигрышу $\beta_{\sum \max}$ игрока B, деленному на k:

$$\nu = \frac{\alpha + \beta}{2} \approx \frac{\alpha_{\sum \min} + \beta_{\sum \max}}{2 \cdot k}.$$

В рассматриваемом примере:

$$\nu = \frac{36+37}{2 \cdot 20} = \frac{73}{40} = 1{,}82.$$

Точная цена игры $\boldsymbol{\nu}$ = 1,8.

Разрыв между α и β отражает неточность оценок относительно оптимальных смешанных стратегий. В примере $\beta - \alpha = \frac{37}{20} - \frac{36}{20} = 0{,}05$ составляет 2,8 % от цены игры $\boldsymbol{\nu}$ = 1,8.

Увеличивая число итераций k, можно найти еще более точные оценки оптимальных смешанных стратегий.

Преимуществом итерационного метода решения матричных игр является то, что объем вычислений с увеличением размерности игры **m x n** растет существенно медленнее, чем в методах линейного программирования (в частности, в симплекс-методе).

2.10. Качественная оценка элементов платежной матрицы

Очевидной трудностью при использовании теории игр является задание элементов платежной матрицы с требуемой точностью. Вместе с тем эту задачу не нужно и переоценивать. Использование, например, свойств 1 и 2 из параграфа 2.6 позволяет находить оптимальные стратегии, задавая лишь относительные значения элементов платежной матрицы. Например, если в платежной матрице имеется всего три различных значения элементов платежной матрицы, то в этом случае совершенно не важно, какое значение имеют наименьший и наибольший платежи. Единственно, что имеет значение – это относительное положение третьего платежа.

Таким образом, теория игр может дать важные результаты даже в тех случаях, в которых точные оценки платежей затруднены. В частности, имеется слабая форма оценки платежей, называемая упорядочением. Она заключается в расположении платежей по порядку их относительной величины. Существуют игровые ситуации, для которых не требуется ничего большего, чем определение порядка расположения платежей по величине. В других игровых ситуациях знание порядка платежей позволяет сделать частичные выводы относительно оптимальных стратегий и цены игры.

Пусть, например, платежи оцениваются как плохие (п); удовлетворительные (у), хорошие (х) или отличные (о), а матрица игры имеет вид:

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	α_i
A_1	п	о	х	о	х	п
A_2	у	у	х	о	х	у*
A_3	п	х	о	о	х	п
A_4	у	о	о	п	о	п
β_j	у*	о	о	о	о	

В этой игре $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{y}$, т. е. игра решается в чистых стратегиях. Игрок А должен придерживаться своей второй стратегии, а игрок В – стратегии B_1. Цена игры – «удовлетворительно».

Пусть игра имеет седловую точку в клетке, отмеченной звездочкой.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1						
A_2						
A_3						
A_4			*			
A_5						
A_6						
A_7						

Так как седловая точка отмечает наименьшее число в этой строке и наибольшее число в столбце, то все остальные числа в данной строке (столбце) могут быть какими угодно, лишь бы число, отмеченное звездочкой, оставалось наименьшим в строке (наибольшим в столбце). Наконец, все остальные числа в матрице, которые не попали в строку и столбец, соответствующих оптимальным стратегиям, могут быть вообще какими угодно. Их значения не влияют ни на оптимальный способ ведения игры, ни на ее цену.

<u>Пример 2.11.</u> Решить игру, платежная матрица которой имеет вид:

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3
A_1	п	о	у
A_2	х	у	х
A_3	п	у	о

Как видно, стратегия B_1 доминирует стратегию B_3, далее стратегия A_1 будет доминировать стратегию A_3, а, следовательно, исходную игру можно свести к игре 2*2:

B_j \ A_i	B_1	B_2	α_i
A_1	п	о	п
A_2	х	у	у*
β_j	х*	о	

Таким образом, игрокам не следует использовать стратегии A_3 и B_3. Так как **α = у** не равняется **β = х**, то игра не имеет седловой точки и должна решаться в смешанных стратегиях.

Частоты применения своих стратегий игроком А равны:

$$p_1 = \frac{y-x}{n+y-x-o} = \frac{x-y}{x+o-n-y};$$

$$p_2 = \frac{o-n}{x+o-n-y}.$$

Частоты применения своих стратегий игроком В равны:

$$q_1 = \frac{y-o}{n+y-x-o} = \frac{o-y}{x+o-n-y};$$

$$q_2 = \frac{x-n}{x+o-n-y},$$

таким образом, частота применения стратегии A_1 пропорциональна разности между «хорошо» и «удовлетворительно», а стратегии A_2 пропорциональна разности между «отлично» и «плохо». Ясно, что стратегия A_1 должна применяться реже, чем стратегия A_2 независимо от того, какие упорядоченные числа будут приписаны этим понятиям.

Положение игрока В несколько более неопределенно. Он должен применять стратегию B_1 с частотой пропорциональной разности между «отлично» и «удовлетворительно», а стратегию B_2 – с частотой, пропорциональной разности между «хорошо» и «плохо». Здесь неясно, какая разность больше.

Хотя в данном примере мы не получили строгого решения, но полученное решение дает ориентацию, как следует себя вести в исходной слабо определенной ситуации.

2.11. Способы реализации случайного механизма выбора стратегий

Для реализации применения игроком его активных стратегий с оптимальными вероятностями (относительными частотами), необходимо иметь случайный механизм выбора стратегий.

Например, если оптимальная смешанная стратегия $S = \|0{,}5; 0{,}5\|$ (относительные частоты 1:1), то для ее реализации можно использовать подбрасывание монеты: если выдает «герб», то применяется первая стратегия, а если «решка», – то вторая.

Игральную кость можно использовать при относительных частотах **1:5; 2:4; 1:1; 4:2**; и так далее до **5:1**.

Секундная стрелка часов может служить для выбора случайных чисел от 0 до 59, если только игрок не смотрел на часы недавно и не знает наперед, даже приблизительно, ответ.

Но на практике могут потребоваться любые сочетания чисел в качестве относительных частот. Механизмом, удовлетворяющим вышеуказанному требованию, является датчик случайных чисел R от 0 до 1 с равномерной плотностью вероятности.

Так как стратегии A_1, A_2, ..., A_m несовместны (в каждый момент, применяется лишь одна из этих стратегий) и образуют полную группу событий ($\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$), то для реализации случайного механизма выбора стратегий поступают следующим образом. Делят интервал (0, 1) на m участков длиной p_1, p_2, ..., p_m (рис. 2.9). На какой из участков попало число R – ту стратегию и следует в данной партии использовать.

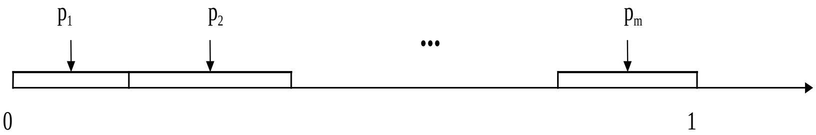

Рис. 2.9. Деление интервала для реализации случайного выбора стратегий

Возникает вопрос: а как же реализуется сам датчик случайных чисел R? Самый простой из датчиков случайных чисел (ДСЧ) – это вращающийся барабан, в котором перемешивается перенумерованные шары. Пусть, например, нам надо разыграть случайное число R от 0 до 1 с точностью 0,001. Заложим в барабан 1000 перенумерованных шаров и после, случайным образом выбранного одного из шаров, разделим его номер на 1000.

Можно поступить и иначе: вместо1000 шаров заложить только 10, с цифрами 0, 1, 2, ... , 9. Вынув случайным образом первый шар, получаем первый десятичный знак дроби. Вернув шар в барабан и прокрутив его, выберем случайным образом второй шар – его номер даст второй десятичный знак и т. д.

Можно доказать, что получаемые таким образом десятичные дроби будет иметь равномерное распределение от 0 до 1. Достоинством этого способа в том, что он может обеспечить любую точность задания числа R.

На практике широко применяются таблицы случайных чисел. Ниже приведен пример такой таблицы (рис. 2.10). Числа сгруппированы лишь для удобства пользования таблицей. Можно начинать с любой точки таблицы, отсчитывать числа вверх или вниз, группировать числа.

Как использовать таблицу случайных чисел, чтобы получить желаемые относительные частоты? Возьмем в качестве примера оптимальную стратегию

$S_A = \left\| \frac{5}{7}; \frac{2}{7} \right\|$. Далее выбираем из таблицы любое однозначное случайное число. Если это число равно 0, 1, 2, 3 или 4, то используем в данной партии первую стратегию. Если число равно 5 и 6, то применяем вторую стратегию. Если это число равно 7, 8 и 9, то отбрасываем его и берем число под ним. Для следующей партии используется число ниже предыдущего.

11 16 43 63 18	**75 6 13 76 74**	**40 60 31 61 52**
21 21 59 17 91	**76 83 15 86 78**	**40 94 15 35 85**
10 43 84 44 82	**66 55 83 76 49**	**73 50 58 34 72**
36 79 22 62 36	**33 26 66 65 83**	**39 41 21 60 13**
73 94 40 47 73	**12 3 25 14 14**	**57 99 47 67 48**
49 56 31 28 72	**14 6 39 31 17**	**61 83 45 91 99**
64 20 84 82 37	**38 60 52 93 41**	**91 40 27 72 27**
51 48 67 28 75	**64 51 61 79 71**	**58 99 98 38 80**
99 75 62 63 60	**41 70 17 31 17**	**40 68 49 99 48**
71 32 55 52 17	**13 1 57 29 7**	**75 97 86 42 98**
65 28 59 71 98	**12 13 85 30 10**	**34 55 63 98 61**
17 26 45 73 27	**38 22 42 93 1**	**65 99 5 70 48**
95 63 99 97 54	**31 19 99 25 58**	**16 38 11 50 69**
61 55 57 64 4	**86 21 1 18 8**	**52 45 88 88 80**
78 13 79 87 68	**4 68 98 71 30**	**33 0 78 56 7**
62 49 9 92 15	**84 98 72 87 59**	**38 71 23 15 12**
24 21 66 34 44	**21 28 30 70 44**	**58 72 20 36 78**
16 97 59 54 28	**33 22 65 59 3**	**26 18 86 94 97**
59 13 83 95 42	**71 16 85 76 9**	**12 89 35 40 48**
29 47 85 96 52	**50 41 43 19 61**	**33 18 68 13 46**

Рис. 2.10. Таблица случайных чисел

Часто желательно модифицировать этот способ. Например, в случае относительных частот 8:3 сумма чисел равна 8 + 3 = 11. Приходится применять двухзначные числа от 00 до 99. Но чтобы не отбрасывать числа от 11 до 99, разделим 99 на 11, получаем 9 (в общем случае это будет смешанная дробь). Далее умножаем $8 \cdot 9 = 72$ и $3 \cdot 9 = 27$. Теперь, если выбранное двухзначное число лежит в пределах от 00 до 71, используем первую стратегию, а если от 72 до 99, – то вторую. Число 99 будем отбрасывать.

Для получения R на ЭВМ применяются специальные датчики случайных чисел. Это могут быть как «физические датчики», принцип действия которых основан на преобразовании случайных шумов, так и вычислительные алгоритмы, по которым сама машина вычисляет так называемые «псевдослучайные» числа. Один из самых простых алгоритмов вычисления псевдослучайных чисел состоит в следующем. Берут два произвольных n-значных числа a_1 и a_2 и перемножают их, и в полученном результате берут n средних знаков. Так получают число a_3. Затем перемножают a_2 и a_3 и в полученном результате берут n средних чисел, получая число a_4, и т. д. Полученные таким образом числа рассматриваются как последовательность двоичных дробей с n знаками после запятой. Такая последовательность дробей практически ведет себя как ряд случайных чисел R от 0 до 1.

В заключение изложения матричных игр отметим, что хотя само понятие смешанной стратегии требует многократного повторения партий игры, полученные результаты справедливы и к играм, которые играются только один раз, поскольку все изложения теории были выведены применительно к одной партии игры.

Качественно аргументировать этот тезис можно следующим образом: очевидно, что если противник узнает, какую мы выбрали стратегию, то предпримет ход, который будет иметь для нас наихудшие последствия. Поэтому единственным выходом является использование для выбора стратегии случайного механизма (жребия), результат которого противник не может предвидеть (хотя, конечно, ему может и повезти). Теория игр указывает характеристики (частоты применения стратегий), которыми должен обладать используемый случайный механизм.

Задачи

Решить матричные игры, имеющие платежные матрицы вида:

1.

8	4	2
2	8	4
1	2	8

2.

-1	1	1
2	-2	2
3	3	-3

3.

1	2	-5	3	2
-1	4	7	2	-4
5	-1	1	1	3

4.

0	-13	-1
13	0	-13
1	13	0

5.

1	0	-1
0	2	1
1	-1	3

6.

3	2	4
4	3	2
2	4	3

7.

2	-11	1
15	2	-11
3	15	2

8.

7	5	4
1	3	7
2	7	4

9.

16	0	14
6	6	16
6	12	2

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вентцель, Е. С. Исследование операций [Текст] / Е. С. Вентцель. – М.: Наука, 1980. – 206 с.

2. Василевич, Л. Ф. Теория игр [Текст] / Л. Ф. Василевич. – Киев: КИИМ, 2000. – 98 с.

3. Петросян, Л. А., Зенкевич, Н. А., Семина, Е. А. Теория игр [Текст] / Л. А. Петросян, Н. А. Зенкевич, Е. А. Семина. – М.: Высшая школа, Книжный дом «Университет», 1998. – 304 с.

4. Протасов, И. Д. Теория игр и исследование операций [Текст]: учебное пособие / И. Д. Протасов. – М.: Гелиос АРВ, 2003. – 368 с

5. Морозов, В. В., Сухарев, А. Г., Федоров, В. В. Исследование операций в задачах и упражнениях [Текст] / В. В. Морозов, А. Г. Сухарев, В. В. Федоров. – М.: Высшая школа, 1986. – 287 с.

6. Таха, Х. Введение в исследование операций. Кн. 2. [Текст] / Х. Таха. – М.: Мир, 1985. – 479 с.

Учебное издание

Леонова Надежда Львовна

ТЕОРИЯ ИГР И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

Редактор и корректор А. А. Чернышева
Техн. редактор Д. А. Романова

Учебное электронное издание сетевого распространения

Системные требования:
электронное устройство с программным обеспечением
для воспроизведения файлов формата PDF

Режим доступа: http://publish.sutd.ru/tp_get_file.php?id=202016, по паролю.
- Загл. с экрана.

Дата подписания к использованию 02.07.2022 г. Изд. .№ 44/21

Высшая школа технологии и энергетики СПбГУПТД
198095, СПб., ул. Ивана Черных, 4.