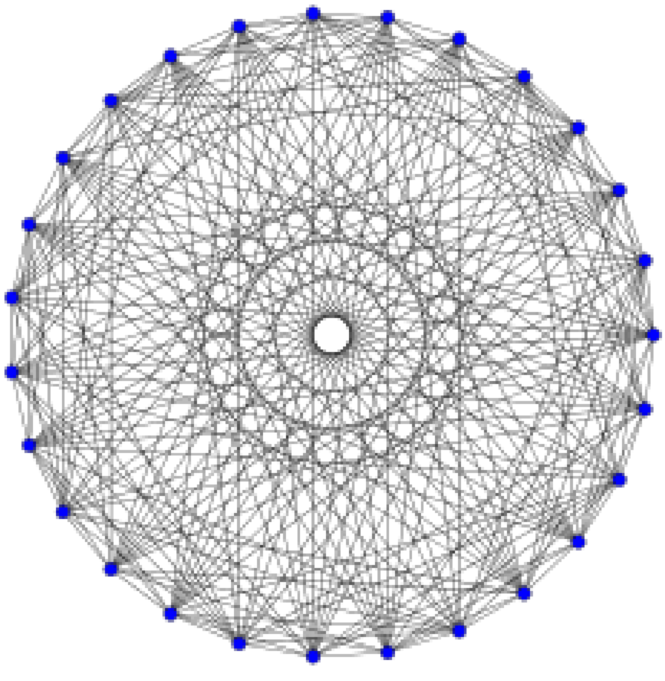
Н.Л. Леонова

Задачи линейного программирования и методы их решения

Учебно-методическое пособие



Санкт-Петербург
2017

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»

ВЫСШАЯ ШКОЛА ТЕХНОЛОГИИ И ЭНЕРГЕТИКИ

Н.Л. Леонова

ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2017

УДК 519.8
Л 476
ББК 22.1я7

Леонова Н.Л. Задачи линейного программирования и методы их решения: учебно-методическое пособие /ВШТЭ СПбГУПТД. - СПб.,2017. - 75 с.

Приведены примеры решения задач и элементы теории по дисциплине «Теория игр и исследование операций». Рассмотрены основные понятия курса «Исследования операций», этапы построения моделей и виды моделирования, предлагается информация по методам решения задач, рассмотрены примеры решения.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», а также может быть полезно в процессе изучения дисциплин: «Информатика», «Методы оптимизации», «Теория рисков».

Рецензенты:
профессор кафедры «Высшая математика и механика» Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения, доктор физ.-мат. наук С.П. Помыткин;
доцент кафедры «Прикладная математика и информатика» ВШТЭ СПбГУПТД, канд. техн. наук. П.Е. Антонюк

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом университета в качестве учебно-методического пособия.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ

1.1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Линейное программирование (ЛП) - это направление математического программирования, изучающее методы решения экстремальных задач, которые характеризуются линейной зависимостью между переменными и линейным критерием.

В общей постановке задача линейного программирования (ЗЛП) формулируется следующим образом.

Имеются какие-то переменные $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и линейная функция этих переменных, которая носит название целевой функции. Ставится задача: найти экстремум (максимум или минимум) целевой функции при условии, что переменные $\overline{x}$ удовлетворяют системе линейных равенств и/или неравенств.

Классическими примерами практических задач, сводящихся к задаче линейного программирования, являются задача о диете, а также задача о составлении плана производства.

В задаче о диете составляется наиболее экономный (т.е. наиболее дешевый) рацион питания животных, удовлетворяющий определенным медицинским требованиям. При этом в качестве переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выступают количества продуктов питания, используемых в рационе.

Задачу о составлении плана производства рассмотрим более подробно.

Пусть некоторая производственная единица (предприятие, цех, отдел и т.д.) может производить n видов товаров $G_1, G_2, \ldots, G_n$, используя при этом m видов сырьевых ресурсов $R_1, R_2, \ldots, R_m$, запасы которых ограничены величинами $b_1, b_2, \ldots, b_m$.

Технологией производства товара G_j назовем набор чисел a_{ij}, показывающий, какое количество i-го ресурса необходимо для производства единицы товара G_j.

Это можно записать в виде технологической матрицы, которая полностью описывает технологические потребности производства и элементами которой являются числа a_{ij}.

	G_1	G_2	…	G_n
R_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
R_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
R_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

Предположим также, что известны цены реализации единицы каждого товара c_1, c_2, …, c_n.

Обозначим через x_1, x_2,…, x_n планируемое производство единиц товаров G_1, G_2,…, G_n. В силу имеющейся технологической матрицы для этого потребуется:

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n$ – ресурса R_1,

$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n$ – ресурса R_2,

……………………………………….

$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n$ – ресурса R_m.

С учетом ограничений на запасы ресурсов, а также очевидных условий неотрицательности переменных x_1, x_2,…, x_n получим следующую систему линейных неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ \qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases}$$

Естественно предположить, что целью производственной единицы является получение максимальной выручки за произведенную продукцию, т.е. максимизация функции:

$$F=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n.$$

Таким образом, с учетом естественного требования неотрицательности переменных получаем линейную оптимизационную задачу, которая может быть представлена в следующей формальной записи:

$$F=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\rightarrow\max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\le b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\le b_m, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0,\ldots,x_n\ge 0 \end{cases}$$

1.2. ФОРМЫ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задача линейного программирования математически может быть представлена в различных формах.

Общей задачей ЛП называется задача, которая состоит в определении максимального (минимального) значения функции

$$L=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \tag{1.1}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i,\qquad i=1,2,\ldots,k; \tag{1.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,\qquad i=k+1,k+2,\ldots,m. \tag{1.3}$$

где a_{ij}, b_i, c_j - заданные постоянные величины k и m.

Функция (1.1) называется *целевой функцией* задачи (1.1)-(1.3), а условия (1.2)-(1.3) - *ограничениями* данной задачи.

Таким образом, ограничения в общей задаче ЛП заданы в виде линейных неравенств и/или линейных уравнений. При этом заметим, что в неравенствах, вообще говоря, могут применяться оба знака, как "≤", так и "≥". Однако домножением при необходимости обеих частей какого-либо неравенства на (-1) можно свести их все к единому виду (1.2).

Вектор $\overline{x}=(x_1, x_2, ..., x_n)$, компоненты которого удовлетворяют ограничениям (1.2)-(1.3), называется *допустимым планом* (или *допустимым решением).*

Совокупность всех допустимых планов задачи линейного программирования образует *допустимое множество* решений этой задачи. Будем обозначать его через X.

Допустимый план $\overline{x}^*=(x_1^*, x_2^*, ...x_n^*)$, при котором целевая функция задачи (1.1) принимает свое максимальное (минимальное) значение, называется *оптимальным.*

Решить задачу линейного программирования - это значит, найти все ее оптимальные планы или доказать их отсутствие.

Помимо общей формы, различают еще две частные задачи линейного программирования - стандартную и основную.

Особенностью *стандартной задачи ЛП* является то, что ее ограничения представлены в виде линейных неравенств, а также условий неотрицательности на переменные, присутствующие в задаче:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad (i=1,2,...,m), \\ x_j \ge 0 \qquad (j=1,2,...,n). \end{cases} \tag{1.4}$$

Ограничения *основной задачи ЛП* представляют собой линейные ограничения-равенства, а также условия неотрицательности на переменные:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i=1,2,...,m), \\ x_j \ge 0 \qquad (j=1,2,...,n). \end{cases} \tag{1.5}$$

Между различными формами задач линейного программирования существует тесная взаимосвязь, в смысле возможности перехода от одной формы записи к другой.

Например, сведение задачи минимизации функции к задаче максимизации осуществляется простым домножением целевой функции на (-1). То есть, если в задаче линейного программирования функция

$$L = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \min,$$

то, введя в рассмотрение функцию $\tilde{L} = -L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, получим:

$$\tilde{L} = -c_1 x_1 - c_2 x_2 - \ldots - c_n x_n \to \max.$$

Переход от стандартной задачи к основной связан с введением дополнительных переменных x_{n+i}, $i=1,\ldots,m$. Покажем это на примере.

Пример 1.1. Исходная задача ЛП имеет вид:

$$L = 2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 4x_3 \le 11, \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 \ge 7, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0. \end{cases}$$

В первом из неравенств левая часть не больше правой части. Поэтому добавлением в левую часть некоторого неотрицательного слагаемого x_4 можно свести это неравенство к равенству. Аналогично во втором неравенстве левая часть не меньше правой. Следовательно, вычитая из левой части некоторое неотрицательное число x_5, можно также свести данное неравенство к равенству. Итак, получим новую форму записи задачи ЛП (основную):

$$L = 2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 11, \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 - x_5 = 7, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0, \quad x_4 \ge 0, \quad x_5 \ge 0. \end{cases}$$

Основные утверждения теории линейного программирования касаются, в первую очередь, вида допустимого множества решений X, а также существования и свойств оптимальных решений задачи. Изложим эти утверждения в интерпретации, близкой к наглядной.

Возможные случаи допустимого множества решений задачи линейного программирования.

1) Допустимое множество решений пусто.

Данному случаю соответствует взаимная противоречивость ограничений, входящих в задачу.

2) Допустимое множество - выпуклый ограниченный многогранник.

3) Допустимое множество - выпуклое неограниченное многогранное множество.

Два последних случая достаточно легко представить в двух- или трехмерном измерении. В пространстве большей размерности понятие многогранника (многогранного множества) вводится абстрактно как пересечение гиперплоскостей и гиперполуплоскостей, определяемых соответствующими линейными уравнениями и неравенствами, входящими в состав ограничений задачи. Характерным свойством многогранника является наличие в нем особых точек - *вершин*.

Возможные случаи оптимальных решений (планов) задачи линейного программирования.

1) Задача *не имеет оптимальных решений*.

Данный случай может возникнуть: либо тогда, когда допустимое множество решений пусто ("не из чего выбирать" оптимальный план), либо когда допустимое множество представляет собой неограниченное многогранное множество, и целевая функция на нем неограниченно возрастает (если $L\to$ max) или неограниченно убывает (при $L\to$min).

2) Задача имеет *единственное решение* (единственный оптимальный план).

Это решение обязательно совпадает с одной из вершин допустимого множества.

3) Задача имеет *бесконечное множество* оптимальных решений, заданное некоторым линейным образованием - ребром, гранью, гипергранью и т.д. Среди точек этого линейного образования имеются и вершины допустимого множества.

Таким образом, основное утверждение теории линейного программирования, в конечном итоге определяющее специфические способы его решения, можно сформулировать следующим образом:

Если задача линейного программирования имеет хотя бы один оптимальный план, то его следует искать среди вершин допустимого множества решений.

1.3. СИТУАЦИИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ, И ИХ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Ситуация 1. Фирма имеет одно предприятие, которое выпускает n видов продукции, затрачивая m видов ресурсов. Каждый вид продукции j характеризуется технологией $A_j = (a_{1j},\dots, a_{mj}, c_j)$ в виде набора $\{a_{ij}\}$, где a_{ij} — количество единиц ресурса i, затрачиваемых на единицу продукта j, и c_j — прибыль, получаемая фирмой с каждой единицы продукта j. Известны также объемы ресурсов $B = (b_1,\dots, b_m)$, которыми располагает предприятие. Руководство фирмы заинтересовано в получении оптимального варианта своего бизнеса по прибыли. Для этого предприятию нужно, грамотно распорядившись имеющимися ресурсами, выпустить такую комбинацию всех видов продукции, при которой прибыль оказалась бы наибольшей.

Составим математическую модель данной экономической ситуации. Обозначим через $X = (x_1,\dots, x_n)^T$ вектор производства, где x_j — объем выпуска продукции j. Вектор X часто называют еще планом производства. При этом координаты вектора X должны быть неотрицательны:

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2,\dots, n,$$

(иногда выпуск продукции j может быть ограничен d_j, в этом случае имеет место двойное неравенство $0 \leq x_j \leq d_j$). Ограниченность ресурсов и линейная зависимость между расходами ресурсов и производством продукции приводит к системе линейных неравенств

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le bi, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Прибыль от реализации произведенного продукта

$$L(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n.$$

План производства $X = (x_1, \ldots, x_n)^{\text{T}}$ называется оптимальным по прибыли, если $L(X)$ достигает наибольшего возможного значения при вышеописанных ограничениях. Поэтому, руководствуясь интересами фирмы, предприятие в качестве критерия экономической эффективности должно принять максимум прибыли:

$$L(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n \to \max.$$

При этом следует найти не только само значение max $L(X)$, но (что не менее важно!) точки, в которых оно достигается, т.е. получить оптимальный вектор производства $X = (x_1, \ldots, x_n)^{\text{T}}$.

Замечание 1. Возможно, что фирма решит использовать другую технологическую характеристику каждого вида продукции. Например, в описанной выше технологии A_j, не меняя экономической интерпретации $a_{1j}, \ldots, a_{mj}$, изменит экономическую интерпретацию последней константы: под c_j будет понимать себестоимость каждой единицы продукта *j.* Это означает, что руководство фирмы заинтересовано в получении оптимального варианта своего бизнеса по себестоимости. Поэтому в качестве критерия экономической эффективности предприятие должно будет принять минимум себестоимости:

$$L(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n \to \min.$$

Рассмотренная задача оптимизации является одним из примеров задач линейного программирования. Она носит название *задачи об использовании ресурсов*. В зависимости от конкретной экономической ситуации в качестве ресурсов могут выступать: оборудование, рабочая сила, сырье, деньги, производственные площади и т. п.

Ситуация 2. Научно-производственное объединение занимается разработкой и производством комплексных удобрений. На данный момент в своем распоряжении оно имеет n видов удобрений, каждое из которых содержит m элементов непосредственного питания растений. Такими элементами могут быть азот, фосфор, калий, магний, медь, марганец и др. Известно, что одна единица j-го вида удобрений ($j = 1, 2,\ldots, n$) содержит a_{ij} единиц i-го ($i = 1, 2,\ldots, m$) элемента непосредственного питания растений и имеет стоимость c_j. Необходимо изготовить смешанное комплексное удобрение (тукосмесь), получаемое механическим смешением имеющихся удобрений. При этом тукосмесь должна иметь следующую «химико-экономическую» характеристику:

- содержание каждого i-го элемента питания не менее b_i ($i = 1, 2,\ldots, m$);
- наименьшую стоимость.

Рассмотрим математическую модель данной экономической ситуации. Обозначим через x_j количество j-го удобрения, используемого при изготовлении тукосмеси. Конечно, $x_j \geq 0$ ($j = 1, 2,\ldots, n$). Для каждого i-го ($i = 1, 2,\ldots, m$) элемента питания, согласно «химико-экономической» характеристике тукосмеси, имеет место следующее неравенство-ограничение: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i$. Стоимость комплексного удобрения составляет $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$. Эту величину необходимо минимизировать.

Таким образом, математическая модель предложенной экономической ситуации имеет следующий вид:

$$L(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq bi,\ i = 1, 2,\ldots, m,$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2,\ldots, n.$$

Рассмотренная задача носит название *задачи о смесях*. К ним относят задачи определения состава сплавов, кормовых смесей, смесей горючего и т. п., а также определения урожайности кормовых культур, составления рациона питания.

Упражнения: Построить математическую модель задач линейного программирования.

1. В 1996 г. ОАО «Прицеп» производит совковые и штыковые лопаты. Для их изготовления требуется листовой металл и древесина. Для изготовления одной совковой лопаты требуется 0,04 листа металла и 0,004 $м^3$ древесины, для изготовления одной штыковой лопаты — 0,02 листа металла и 0,004 $м^3$ древесины. Розничная цена одной совковой лопаты 60 руб., а штыковой — 50 руб. Изучение рынка сбыта показало, что спрос на штыковые лопаты превышает спрос на совковые не более, чем на 3 тыс. штук в месяц. Кроме того, спрос на совковые лопаты не превышает 15 тыс. штук в месяц. Сколько лопат каждого вида должно изготовлять АООТ «Прицеп» в месяц, если оно располагает 300 листами металла и 60 $м^3$ древесины и хочет получить максимальный доход от реализации своей продукции?

2. АООТ «Прицеп» выпускает 4,5-тонные прицепы и кормораздатчики «Ванюша» по цене 40,3 и 74,3 тыс. руб. соответственно. По результатам маркетинговых исследований спрос на изделия первого вида составляет не менее 1 200 ед. в год. Для производства прицепов используются сталь и чугун, запасы которых на предприятии составляют 25 000 и 4 500 т соответственно. Для изготовления 1 тыс. прицепов норма расхода стали составляет 1 615 т, а чугуна — 385 т. Для изготовления 1 тыс. кормораздатчиков расходуется: стали — 2 022 т, чугуна — 478 т. Себестоимость прицепов — 34,66, а кормораздатчиков — 63,9 тыс. руб. Найти оптимальное решение по производству прицепов и кормораздатчиков, чтобы:

а) количество выпускаемых изделий было максимальным;

б) выручка от выпускаемых изделий была максимальной;

в) себестоимость выпускаемых изделий была минимальной.

3. Ремонтный завод «Хоперский» выпускает насосы двух типов: топливные и водяные. В комплектацию этих изделий входят четыре основных вида деталей: корпус, платик, манжета, шестерня. Для изготовления топливного насоса требуется один корпус, четыре платика, четыре манжеты и одна шестерня, для изготовления водяного насоса — 1, 2, 4 и 3 комплектующих деталей, соответственно.

От реализации одного топливного насоса завод имеет прибыль 50 руб., а от одного водяного — 200 руб.

На складе завода имеется следующий запас комплектующих:

корпусов — 6 шт;

платиков — 8 шт;

манжет — 12 шт;

шестерней — 9 шт.

Составить план производства, обеспечивающий заводу наибольший доход.

4. Для производства двух видов кормовых биодобавок можно использовать витамины трех групп. При этом на изготовление биодобавки «Телец» расходуется 16 кг витамина А, 8 кг витамина B_1 и 5 кг витамина Е. На изготовление биодобавки «Овен» расходуется 4 кг витамина А, 7 кг витамина B_1 и 9 кг витамина Е. На складе фирмы имеется всего 784 кг витамина А, 552 кг витамина B_1 и 567 кг витамина Е. От реализации добавки «Телец» фирма имеет прибыль 4 тыс. руб., а от добавки «Овен» — 7,2 тыс. руб. Определить максимальную прибыль от реализации обеих биодобавок.

5. Фирма выпускает два набора удобрений «Купрум-I» и «Купрум-II». В «Купрум-I» входит 3 кг азотных, 1 кг калийных и 1 кг медных удобрений. В «Купрум-II» — 1 кг азотных, 2 кг калийных и 6 кг медных удобрений. После осушения торфяных болот для внесения в почву потребовалось по меньшей мере 9 кг азотных, 8 кг калийных и 12 кг медных удобрений. «Купрум-I» стоит 4 усл. ден. ед., а «Купрум-II» — 6 усл. ден. ед. Какие и сколько наборов удобрений необходимо внести, чтобы обеспечить эффективное питание почвы и минимизировать стоимость?

6. На участке производства зубчатых колес имеются два станка — зубофрезерный и зубодолбежный. Требуется изготовить три вида зубчатых колес в следующих количествах: первого вида — 80 шт, второго и третьего — 110 и 140 штук соответственно. Каждое зубчатое колесо может быть изготовлено на любом из станков. Для выпуска одного колеса первого вида на

зубофрезерном станке требуется затратить 20 мин, а на зубодолбежном — 34 мин. Для выпуска одного колеса второго вида на зубофрезерном станке требуется затратить 12 мин, а на зубодолбежном — 14 мин. Для выпуска одного колеса третьего вида требуется затратить 10 и 8 мин соответственно. Ресурс работы зубофрезерного станка без смены инструмента (фрезы) позволяет выпустить всего 180 колес, а ресурс работы зубодолбежного станка без смены инструмента (долбяка) позволяет выпустить всего 150 зубчатых колес. Определить оптимальную загрузку станков, обеспечивающую минимальное общее время их работы без смены инструмента.

7. Автотранспортное предприятие получило заказ на укомплектование трех строящихся объектов стройматериалами, производимыми на двух заводах. На первом заводе подготовлено к отправке 120 т стройматериалов, на втором — 180 т. На первый объект необходимо доставить 70 т строительных материалов. Второй и третий объекты нуждаются в получении 140 и 90 т указанного материала.

Матрицей

$$\begin{pmatrix} 8 & 12 & 5 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

задано:

а) доход от перевозки одной тонны стройматериалов с каждого завода к каждому строящемуся объекту;

б) стоимость перевозки одной тонны стройматериалов с каждого завода к каждому строящемуся объекту.

Составить оптимальный план перевозок:

а) максимизирующий доход;

б) минимизирующий стоимость.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ГРАФИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

2.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕТОДА

Графоаналитический (графический) способ решения задач линейного программирования обычно используется для решения задач с двумя переменными, когда ограничения выражены неравенствами, а также задач, которые могут быть сведены к таким задачам.

Пусть задача линейного программирования имеет вид:

$$L = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max(\min) \qquad (2.1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le (\ge) b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le (\ge) b_m, \end{cases} \qquad (2.2)$$

где c_1, c_2, a_{i1}, a_{i2}, b_i - заданные действительные числа; знаки в неравенствах произвольны; целевая функция либо максимизируется, либо минимизируется.

Каждое из неравенств (2.2) системы ограничений задачи геометрически определяет полуплоскость соответственно с граничными прямыми $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$; i=1,…,m. В том случае, если система неравенств (2.2) совместна, допустимая область решений задачи есть множество точек, принадлежащих всем указанным полуплоскостям. Так как множество точек пересечения данных полуплоскостей – выпуклое, то областью допустимых значений является выпуклое множество, которое называют *многоугольником* решений. Стороны этого многоугольника лежат на прямых, уравнения которых получаются из исходной системы ограничений заменой знаков неравенств на знаки равенств.

Множеством допустимых решений для данной частной задачи может быть:

- пустая область;

- выпуклый многоугольник, включая вырожденные случаи - отрезок и единственную точку;
- выпуклая многоугольная неограниченная область, включая вырожденные случаи - луч и прямую.

Практическая реализация решения задачи линейного программирования (2.1) – (2.2) на основе ее геометрической интерпретации включает следующие этапы:

1. Построить прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях (2.2) знаков неравенств на знаки равенств.
2. Найти полуплоскости, определяемые каждым из ограничений.

   Соответствующая полуплоскость может быть найдена подстановкой в неравенство координат какой-нибудь «простой» точки - (0,0), (0,1) или (1,0). Главное - чтобы эта точка не принадлежала границе полуплоскости. Если после подстановки неравенство окажется справедливым, то выбирается та полуплоскость, где содержится эта точка. Если неравенство не справедливо, то выбирается альтернативная полуплоскость.
3. Определить многоугольник решений как пересечение найденных полуплоскостей.
4. Построить градиент целевой функции, т.е. вектор $grad(L) = (c_1, c_2)$, координатами которого служат коэффициенты целевой функции *L*.

   Этот вектор определяет направление наискорейшего возрастания целевой функции.
5. Построить ряд линий уровня целевой функции *L*, т.е. прямых, перпендикулярных градиенту *L*. При этом построение линий уровня следует вести в направлении градиента, если решается задача на максимум, и в противоположном направлении (в направлении «антиградиента»), если решается задача на минимум. В результате отмечается точка (точки), в которой линии уровня в последний раз касаются допустимого множества.

2.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 2.1

Найти значения переменных x_1, x_2, при которых функция $L(X) = 3x_1 + 4x_2$ принимает экстремальные значения при условии, что:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 3, \\ 5x_1 + 3x_2 \le 97, \\ x_1 + 7x_2 \ge 74, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Решение:

Введем на плоскости прямоугольную систему координат Ox_1x_2 (это позволит применить алгоритм графического метода).

1. Начнем с нахождения значения переменных x_1 и x_2, при которых целевая функция принимает максимальное значение. Действовать будем пошагово в соответствии с алгоритмом решения ЗЛП графическим методом.

Шаг 1. Для того чтобы найти множество точек, координаты которых удовлетворяют первым трем неравенствам системы ограничений, нужно построить граничные прямые (1)-(3):

$$-x_1 + x_2 = 3, \quad (1)$$

$$5x_1 + 3x_2 = 97, \quad (2)$$

$$x_1 + 7x_2 = 74, \quad (3)$$

(например, по точкам их пересечения с координатными осями), а затем определить соответствующие полуплоскости.

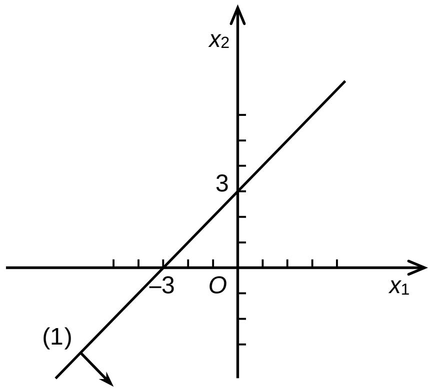


Рис. 2.1. Решение линейного неравенства

Более подробно. Находим точки пересечения прямой (1) с осями Ox_1 и Ox_2. Ими являются соответственно точки (–3; 0) и (0; 3). По этим точкам строим прямую (1). Затем подставляем координаты точки отсчета в неравенство $-x_1 + x_2 \leq 3$. Они ему удовлетворяют: $0 + 0 \leq 3$. Следовательно, геометрическим местом точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $-x_1 + x_2 \leq 3$, является полуплоскость, содержащая точку $O(0; 0)$ (рис. 2.1).

Замечание*:* Для того чтобы узнать, какую полуплоскость описывает неравенство $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$ (знак неравенства выбран произвольно — для определенности), нужно:

1) Построить прямую $a_1x_1 + a_2x_2 = b$.

2) Определить, по какую сторону от нее располагается точка $O(0; 0)$ (или любая другая, не принадлежащая данной прямой):

- если координаты выбранной точки удовлетворяют данному неравенству, то полуплоскость, в которой находится эта выбранная точка, является искомой;
- если координаты выбранной точки не удовлетворяют данному неравенству, то искомой полуплоскостью будет являться та, которая эту точку не содержит.

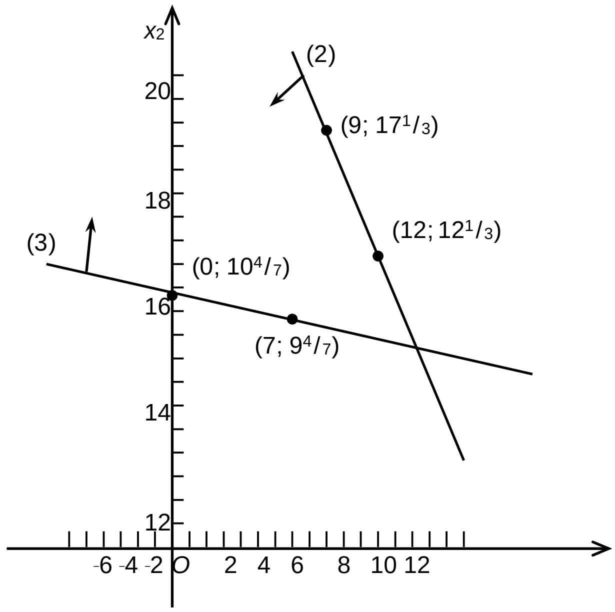


Рис.2.2. Множество решений двух линейных неравенств

Множества точек, координаты которых удовлетворяют двум оставшимся неравенствам, изображены на рис 2.2.

Из условий $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ следует, что геометрический образ ОДР должен располагаться в первой четверти плоскости Ox_1x_2. Поэтому нас интересует только то, что находится в первой четверти. Пересечением полученных полуплоскостей является изображенный на рис. 2.3 треугольник *ABD*, представляющий собою область допустимых решений.

<u>Шаг 2.</u> Строим вектор $\vec{C}$ (3; 4) (рис. 2.4).

<u>Шаг 3.</u> Линия уровня L_0 задается уравнением $3x_1 + 4x_2 = \text{const}$. На рис. 2.4 построена линия уровня, соответствующая значению 79.

<u>Шаг 4.</u> Сначала найдем значения переменных x_1, x_2, при которых целевая функция принимает максимальное значение. Поэтому перемещаем L_0 по направлению вектора $\vec{C}$ до линии уровня, являющейся границей полуплоскости, целиком содержащей ОДР (треугольник *ABD*). Такой линией является прямая L_0^+, проходящая через точку *B*. Следовательно, максимального значения целевая функция достигает в точке *B* (точке выхода из ОДР), координаты которой определяются как пересечение прямых (1) и (2).

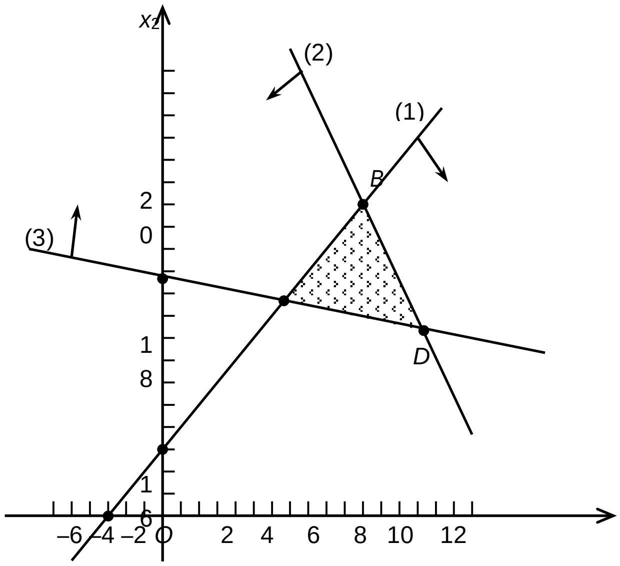


Рис. 2.3. Множество решений трех линейных

<u>Шаг 5.</u> Решая систему

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 3, \\ 5x_1 + 3x_2 = 97, \end{cases}$$

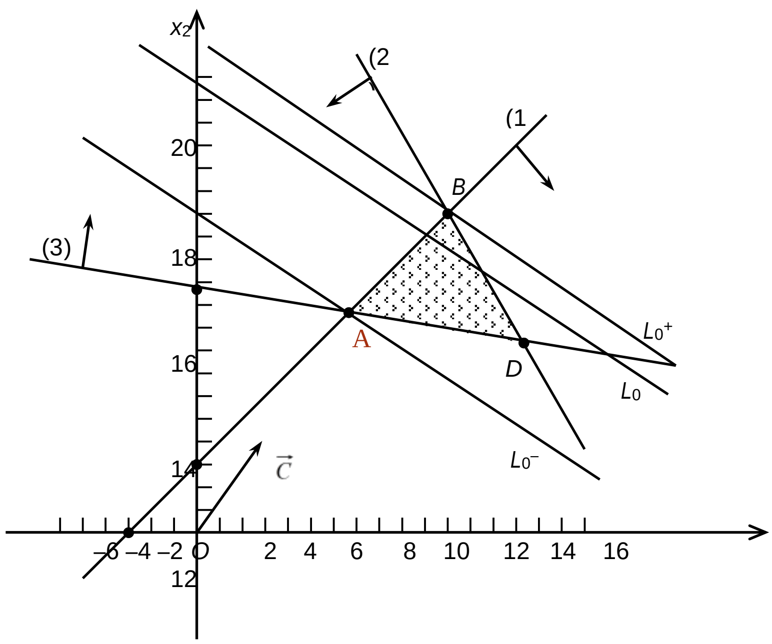


Рис. 2.4. ОДР и целевая функция

получим x_1 = 11, x_2 = 14. Таким образом, целевая функция имеет максимальное значение в точке (11; 14), при этом L_{max}= 3·11+ 4·14 = 89.

2. Теперь найдем значения переменных x_1, x_2, при которых целевая функция минимизируется. Система ограничений — прежняя. Следовательно, ОДР та же, что и в максимизационной задаче. Поэтому решение начнем с шага 4.

Перемещаем линию уровня в направлении, противоположном вектору $\vec{C}$. На рис. 2.4 видно, что наименьшее значение $L(X)$ на ОДР достигается в точке A — точке пересечения прямых (1) и (3).

Шаг 5. Решая систему

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 + 7x_2 = 74 \end{cases}$$

найдем координаты указанной точки — (6,625; 9,625). Следовательно, L_{min}= $L(A)$ = 3·6,625 + 4·9,625 = 58,375.

Задача 2.2

Найти значения переменных, при которых целевая функция $L(X)$ = $5x_2$ принимает экстремальные значения, при условии, что:

$$\begin{cases} 7x_1 + 12x_2 \le 84, \\ 35x_1 - 12x_2 \ge 0, \\ 7x_1 - 6x_2 \le 42, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

Решение:

Введем на плоскости прямоугольную систему координат Ox_1x_2.

Начнем с нахождения значения переменных x_1 и x_2, при которых целевая функция принимает максимальное значение.

Шаг 1. Находим ОДР. Построим граничные прямые

$7x_1 + 12x_2 = 84$, $35x_1 - 12x_2 = 0$, $7x_1 - 6x_2 = 42$.

Первую прямую построим по точкам пересечения с осями: (12; 0) и (0; 7). Вторую — по точкам (0; 0) и (3; $8\frac{3}{4}$). Третью прямую построим по точкам (6; 0) и, например, (10; $4\frac{2}{3}$).

Теперь определим соответствующие полуплоскости. Для определения полуплоскости, задаваемой неравенством $7x_1 + 12x_2 \leq 84$, подставляем координаты точки (0; 0) в данное неравенство. Они ему удовлетворяют: $7\cdot0 + 12\cdot0 \leq 84$. Следовательно, геометрическим местом точек, координаты которых удовлетворяют данному неравенству, является полуплоскость, содержащая точку (0; 0). Для определения полуплоскости, задаваемой неравенством $35x_1 - 12x_2 \geq 0$, подставляем координаты, например, точки (–1; 0) в данное неравенство. Они ему не удовлетворяют: $35 \cdot(-1) - 2\cdot0 < 0$. Следовательно, геометрическим местом точек, координаты которых удовлетворяют данному неравенству, является полуплоскость, не содержащая точку (–1; 0). Аналогично определяем полуплоскость, задаваемую неравенством $7x_1 - 6_2 \leq 42$.

С учетом условий $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ находим пересечение полученных полуплоскостей. Им является изображенный на рис. 2.5 четырехугольник *OABD.* Этот четырехугольник и есть искомая ОДР. Вершина $A(2;\ 5\frac{5}{6})$ определяется как пересечение граничных прямых $7x_1+12x_2=84$ и $35x_1-12x_2 = 0$, $B(8;\ 2\frac{1}{3})$ — как пересечение $7x_1 + 12x_2 = 84$ и $7x_1 - 6x_2 = 42$, $D(6; 0)$ — пересечение прямой $7x_1 - 6x_2 = 42$ и оси Ox_1.

Шаг 2. Строим вектор $\vec{c}\,(0; 5)$.

Шаг 3. Проводим линию уровня L_0 .

Линия уровня задается уравнением $5x_2$ = const. На Рис.2.5 построена линия уровня, соответствующая значению 15.

Шаг 4. Перемещаем L_0 по направлению вектора $\vec{C}$. Результатом такого перемещения является прямая L_0^+. На ней находится точка *A*. Следовательно, она и является точкой максимума.

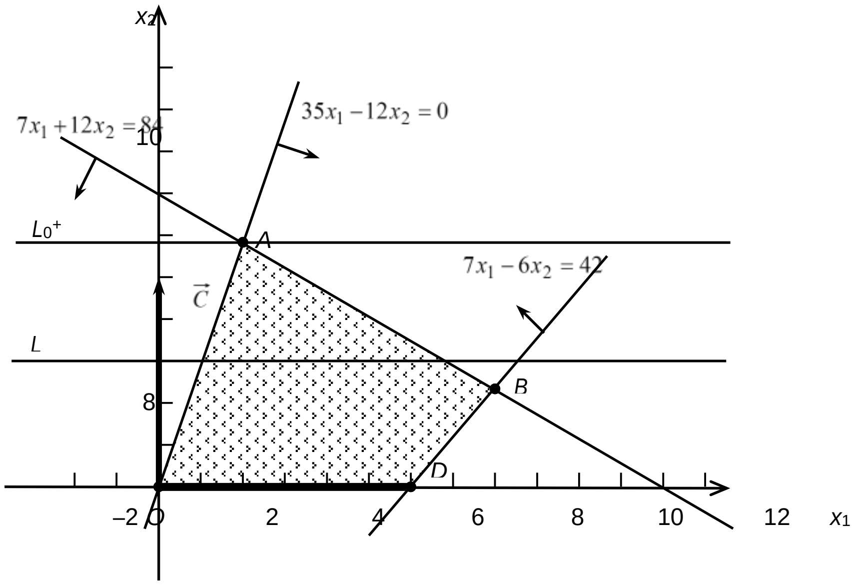


Рис.2.5 Альтернативный оптимум в задаче линейного программирования

Шаг 5. $L_{\max} = L(A) = 5 \cdot 5\frac{5}{6} = 29\frac{1}{6}$.

Теперь найдем значения переменных x_1, x_2, при которых целевая функция минимизируется. Шаги 1—3 те же, что и в максимизационной задаче. Поэтому начинаем с шага 4.

Шаг 4. Перемещаем линию уровня в направлении, противоположном вектору $\vec{C}$. На рис. 2.5 видно, что наименьшее значение $L(X)$ на ОДР достигается на отрезке *OD*.

Шаг 5. Поэтому (0; 0), (6; 0) — оптимальные решения соответственно в угловых точках *O* и *D* области допустимых решений. Тогда общее решение $\overline{X}_{опт}=(1-\lambda)(0; 0) + +\lambda(6; 0) = (0; 0) + (6\lambda; 0) = (6\lambda; 0)$, где $0 \le \lambda \le 1$. При этом $L_{\min} = 0$.

Пример 2.3. Найти значения переменных, при которых функция $L(X) = 5{,}2x_1 - x_2$ принимает экстремальные значения, при условии, что:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \geq 10, \\ x_1 - 3x_2 \leq 3, \\ -x_1 + x_2 \leq 1, \end{cases}$$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Решение:

Введем на плоскости прямоугольную систему координат Ox_1x_2.

1. Начнем с решения максимизационной задачи.

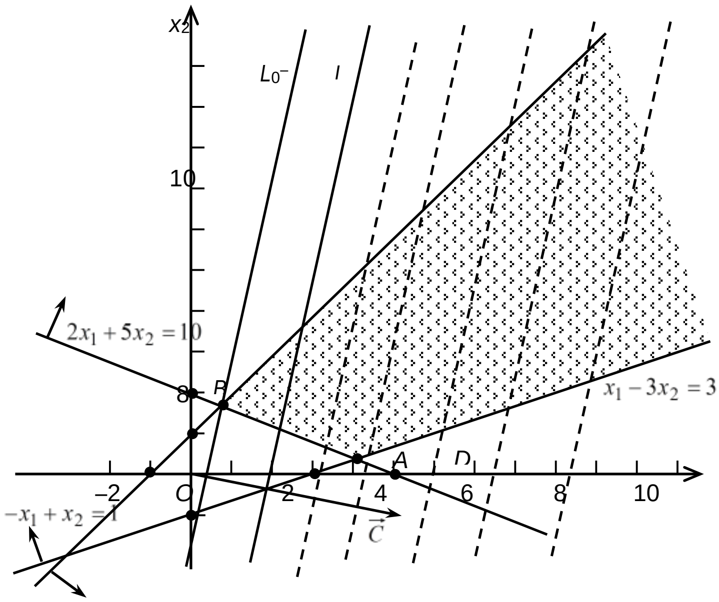


Рис. 2.6. Неограниченность ОДР и целевой функции

Шаг 1. Находим ОДР.

Сначала построим граничные прямые (по точкам их пересечения с координатными осями):

$2x_1 + 5x_2 = 10$ по точкам (5; 0),(0; 2),

$x_1 - 3x_2 = 3$ по точкам (3; 0),(0; –1),

$-x_1 + x_2 = 1$ по точкам (–1; 0),(0; 1).

Затем, используя точку $O(0;\ 0)$, определим соответствующие полуплоскости (Рис.). Пересечением полученных полуплоскостей является неограниченная многогранная область, изображенная на рис.2.6. Это и есть искомая ОДР, так как полученная область располагается в первой четверти плоскости Ox_1x_2.

Шаг 2. Строим вектор $\vec{C}(5{,}2;\ -1)$.

Шаг 3. Проводим линию уровня L_0 таким образом, чтобы она имела с ОДР общие точки.

Шаги 4—5. Перемещаем L_0по направлению вектора $\vec{C}$ до линии уровня, которая являлась бы границей полуплоскости, целиком содержащей ОДР. Однако закончить указанное перемещение невозможно. На Рис. 2.6 видно, что какую бы линию уровня в направлении вектора нормали ни провести (штриховые прямые на чертеже), любая из них пересекает ОДР. Следовательно, $L_{max}= +\infty$. Это означает, что задача на максимум неразрешима.

2. Теперь найдем значения переменных, при которых целевая функция минимизируется. Шаги 1—3 точно те же, что и при решении максимизационной задачи.

Шаг 4. Перемещаем линию уровня L_0в направлении, противоположном вектору $\vec{C}$, до линии, являющейся границей полуплоскости, целиком содержащей ОДР. Такой линией является прямая L_0^-, проходящая через точку B. Следовательно, $L_{min}= L(B)$.

Шаг 5. Координаты точки B определяются как пересечение прямых $2x_1 + 5x_2 = 10$ и $-x_1 + x_2 = 1$. Решая соответствующую систему уравнений, найдем координаты точки B: $x_1=5/7$ и $x_2=12/7$. Таким образом,

$L_{min}= 5{,}2 \cdot 5/7- \ 12/7 = 2$.

Задача 2.4

Решить графически (найти максимум и минимум целевой функции z); все переменные неотрицательные.

$$z = x_1 - 3x_2 \rightarrow max, min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 3, & (1) \\ x_1 - 2x_2 \leq 2, & (2) \\ x_1 + 2x_2 \leq 6, & (3) \\ x_1 \geq 1 & (4) \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 .$$

Решение:

$(1) x_1 + 2x_2 \geq 3$

$x_1 + 2x_2 = 3$

$x_1 = 3 \quad x_2 = 0 \quad (3, 0)$

$x_1 = 1 \quad x_2 = 1 \quad (1, 1)$

$(2) x_1 - 2x_2 \leq 2$

$x_1 - 2x_2 = 2$

$x_1 = 2 \quad x_2 = 0 \quad (2, 0)$

$x_1 = 4 \quad x_2 = 1 \quad (4, 1)$

$(3) x_1 + 2x_2 \leq 6$

$x_1 + 2x_2 = 6$

$x_1 = 4 \quad x_2 = 1 \quad (4, 1)$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 3 \quad (0, 3)$

$(4) x_1 \geq 1$

$x_1 = 1$

$x_1 = 1 \quad x_2 = 2 \quad (1, 2)$

$x_1 = 1 \quad x_2 = 4 \quad (1, 4)$

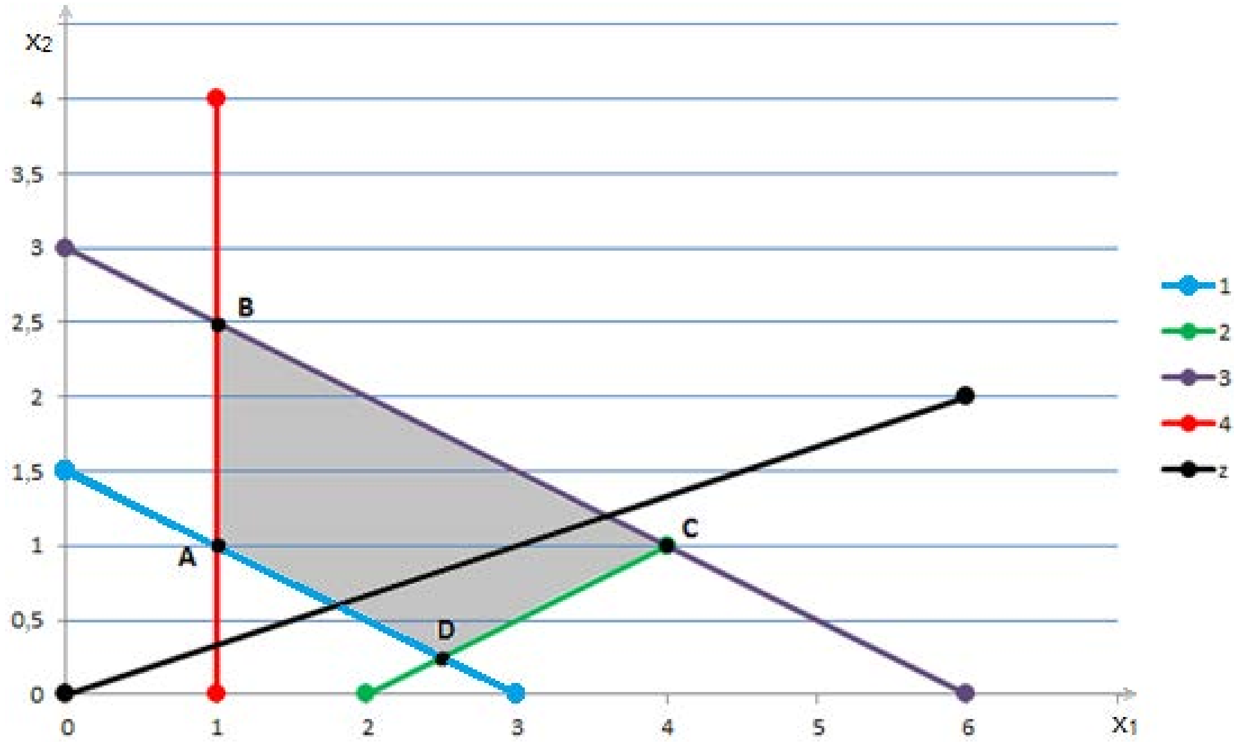


Рис. 2.7. Решение задачи 2.4

$A.\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 = 1 \end{cases}$

$1 + 2x_2 = 3$

$2x_2 = 2$

$x_2 = 1$

$A(1,1) z_A = 1 - 3 \cdot 1 = -1$

$B.\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6 \\ x_1 = 1 \end{cases}$

$1 + 2x_2 = 6$

$2x_2 = 5$

$x_2 = 2{,}5$

$B(1, 2{,}5) z_B = 1 - 3 \cdot 2.5 = -6{,}5 - min$

$C.\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6 \\ x_1 - 2x_2 = 2 \end{cases}$

$x_1 = 6 - 2x_2$

$6 - 2x_2 - 2x_2 = 2$

$-4x_2 = -4$

$x_2 = 1$

$x_1 = 6 - 2 \cdot 1 = 4$

$C(4,1) z_C = 4 - 3 \cdot 1 = 1$

$D.\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 - 2x_2 = 2 \end{cases}$

$x_1 = 3 - 2x_2$

$3 - 2x_2 - 2x_2 = 2$

$-4x_2 = -1$

$x_2 = 0{,}25$

$x_1 = 3 - 2 \cdot 0{,}25 = 2{,}5$

$D(2.5, 0.25)$

$$z_D = 2{,}5 - 3 \cdot 0{,}25 = 1{,}75 - \max$$

Ответ: $z_{max} = 1{,}75$, при $x_1^* = 2{,}5$ и $x_2^* = 0{,}25$;

$z_{min} = -6{,}5$, при $x_1^* = 1$ и $x_2^* = 2{,}5$ (рис.2.7).

Задача 2.5

Предприятие выпускает продукцию двух разновидностей. Каждый вид продукции проходит обработку на трёх станках. При обработке 1 т продукции I вида первый станок используется 0 ч, второй станок – 1 ч, третий станок – 1 ч. При обработке 1 т продукции II вида первый станок используется 1 ч, второй станок – 4 ч, третий станок – 1 ч. Время работы станков ограничено и не может превышать для первого станка 7 ч, для второго 29 ч, для третьего 11 ч. При реализации 1 т продукции I вида предприятие получает прибыль 2 руб., а при реализации 1 т продукции II вида – 5 руб. Найти оптимальный план выпуска продукции каждого вида, дающий максимальную прибыль от реализации всей продукции.

	Виды продукции		B_j
	I	II	
Первый станок	0	1	7
Второй станок	1	4	29
Третий станок	1	1	11
C_i	2	5	

1. Составим математическую модель:

$$F(x) = 2x_1 + 5x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_2 \le 7 & (1) \\ x_1 + 4x_2 \le 29 & (2) \\ x_1 + x_2 \le 11 & (3) \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

2. Построим двойственную задачу:

Прямая задача	Двойственная задача
$F(x) = 2x_1 + 5x_2 \to max$	$W(y) = 7y_1 + 29y_2 + 11y_3 \to min$
$x_2 \le 7$	$y_1 \ge 0$
$x_1 + 4x_2 \le 29$	$y_2 \ge 0$
$x_1 + x_2 \le 11$	$y_3 \ge 0$
$x_1 \ge 0$	$y_2 + y_3 \ge 2$
$x_2 \ge 0$	$y_1 + 4y_2 + y_3 \ge 5$

3. Решим прямую задачу графически(рис. 2.8):

$(1) x_2 \leq 7$

$x_2 = 7$

$x_1 = 0 x_2 = 7 (0, 7)$

$x_1 = 4 x_2 = 7 (4, 7)$

$(2) x_1 + 4x_2 \leq 29$

$x_1 + 4x_2 = 29$

$x_1 = 1 x_2 = 7 (1, 7)$

$x_1 = 9 x_2 = 5 (9, 5)$

$(3) x_1 + x_2 \leq 11$

$x_1 + x_2 = 11$

$x_1 = 4 x_2 = 7 (4, 7)$

$x_1 = 2 x_2 = 9 (2, 9)$

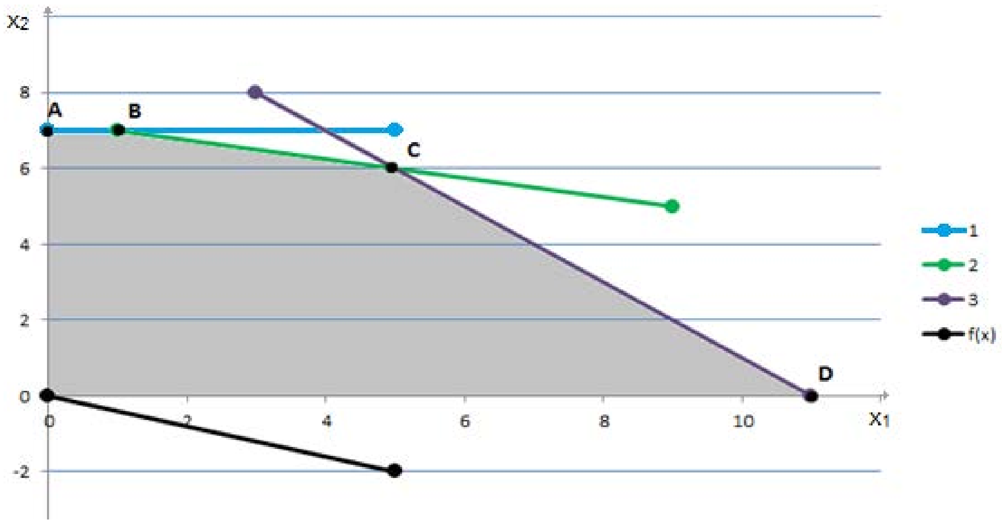


Рис. 2.8. Решение задачи 2.5

$A.\ A(0, 7) f_A = 2 \cdot 0 + 5 \cdot 7 = 35$

$$B.\ \begin{cases} x_2 = 7 \\ x_1 + 4x_2 = 29 \end{cases}$$

$x_1 + 4 \cdot 7 = 29$

$x_1 = 1$

$B(1, 7) f_B = 2 \cdot 1 + 5 \cdot 7 = 37$

$$C.\ \begin{cases} x_1 + 4x_2 = 29 \\ x_1 + x_2 = 11 \end{cases}$$

$x_1 = 29 - 4x_2$

$29 - 4x_2 + x_2 = 11$

$-3x_2 = -18$

$x_2 = 6$

$x_1 = 5$

$C(5,6) \qquad f_C = 2 \cdot 5 + 5 \cdot 6 = 40 - max$

$D.\ D(11,0) \qquad f_D = 2 \cdot 11 + 5 \cdot 0 = 2$

Ответ: $f_{max} = 40$, при $x_1^* = 5$ и $x_2^* = 6$. См рис. 2.8

2.3. СИМПЛЕКС-МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Симплекс-метод является универсальным методом решения задач линейного программирования с любым числом переменных и с любым числом ограничений.

Тем не менее, исходная форма задачи, к которой непосредственно применим симплекс-метод, должна иметь специальный вид. Эта форма является частным случаем основной формы (1.5) задач линейного программирования. Здесь также система ограничений представлена ограничениями-равенствами (линейными уравнениями) и условиями неотрицательности. Однако в равенствах, кроме того, выделяются так называемые *базисные переменные*. В каждом из равенств присутствует одна определенная базисная переменная, взятая с единичным коэффициентом, а в других равенствах ее нет. Число базисных переменных, таким образом, совпадает с числом ограничений-равенств в системе и обычно строго меньше общего числа переменных. Остальные переменные называются небазисными или свободными. Еще одно требование заключается в выполнении условия неотрицательности свободных членов b_i в равенствах. Наконец, целевая функция задачи должна быть выражена только через небазисные переменные. Некоторые авторы называют такую форму представления задачи линейного программирования *канонической*.

Отметим, что во многих случаях каноническая форма задачи получается автоматически при переходе от стандартной формы (1.4) к основной с помощью введения новых переменных. Для этого требуется, чтобы свободные члены в неравенствах были неотрицательными, и все неравенства в (1.4) имели единственный знак «=». Отметим, что модель задачи о составлении производственного плана, рассмотренна в п.1.1 вполне соответствует этим требованиям.

Задача 2.6

Рассмотрим задачу линейного программирования вида:

$L=3x_1+4x_2+6x_3\to\max$

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2+2x_3\le 12, \\ 7x_1+x_2+2x_3\le 18, \\ x_1\ge 0, \quad x_2\ge 0, \quad x_3\ge 0. \end{cases}$$

Решение:

Преобразуем первое и второе неравенства в равенства, введя новые неотрицательные переменные x_4 и x_5. Получим новую систему ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2+2x_3+x_4=12, \\ 7x_1+x_2+2x_3+x_5=18, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\ge 0. \end{cases}$$

Переменная x_4 входит с единичным коэффициентом только в первое уравнение, переменная x_5 – только во второе уравнение. Именно они и составляют базис задачи. Целевая функция выражена лишь через небазисные переменные x_1, x_2, x_3. Таким образом, имеем каноническую форму представления.

Решение задачи при помощи симплекс-метода распадается на ряд шагов. На каждом шаге от данного базиса переходят к другому, новому базису с таким расчетом, чтобы значение функции Lулучшалось, т. е.увеличивалось (по крайней мере, не уменьшалось), если $L\to\max$, и уменьшалось (не увеличивалось), если $L\to\min$. Для перехода к новому базису из старого базиса удаляется одна из переменных и вместо нее вводится другая из числа небазисных. После конечного числа шагов находится некоторый базис, на котором достигается искомый максимум (минимум) для линейной функции L, а соответствующее базисное решение является оптимальным, либо выясняется, что задача не имеет решения.

С геометрической точки зрения каждому каноническому представлению задачи линейного программирования (каждому базису) соответствует определенная вершина допустимого множества (многогранника решений), которая является «претендентом» на возможность быть оптимальным планом. Таким образом, решение задачи симплекс-методом заключается в последовательном и целенаправленном переходе от одной вершины допустимого множества к другой.

Абстрактным аналогом понятия вершины допустимого множества является понятие *опорного плана*.

Если задача линейного программирования представлена в канонической форме, то опорный план $\overline{x}=(x_1, x_2,..., x_n)$ может быть получен с помощью простого правила: его базисные компоненты равны свободным членам ограничений-равенств, его небазисные компоненты равны нулю.

Итак, предположим, что исходная задача линейного программирования задана в канонической форме. Практическая реализация симплекс-метода обычно сводится к последовательному построению так *называемых симплекс-таблиц*, в которых отражается очередная каноническая форма представления исходной задачи, а также содержится проверка условия оптимальности соответствующего опорного плана. В многочисленных учебных пособиях по линейному программированию представлены весьма различные варианты оформления этих таблиц. Ниже дается один из таких вариантов.

Таблица 2.1. Симплекс-таблица

Базис	x_1	…	x_n	x_{n+1}	…	x_{n+m}	*Свободные члены*
x_{n+1}	a_{11}	…	a_{1n}	1	…	0	b_1
…	…	…	…	…	…	…	…
x_{n+m}	a_{m1}	…	a_{mn}	0	…	1	b_m
	$-c_1$	…	$-c_n$	0	…	0	

В первой строке табл. 2.1 обозначены названия столбцов. В следующих *m* строках отображаются коэффициенты перед переменными в ограничениях-равенствах задачи, а также свободные члены. В последней строке содержатся коэффициенты целевой функции, если решается задача на минимум, и коэффициенты целевой функции, взятые с противоположными знаками, если решается задача на максимум. В первом столбце перечисляются базисные переменные в соответствии с присутствием их в том или ином равенстве. Если симплекс-таблица составлена правильно, то в ней имеется *m* единичных столбцов (один элемент - единица, остальные элементы - нули), а свободные члены в ней неотрицательны.

Алгоритм симплекс-метода рассмотрим на решении задачи из задачи 2.6. Соответствующая симплекс-таблица имеет вид:

Таблица 2.2. Симплекс-таблица решения задачи 2.6

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	*Свободные члены*	*Симплекс-отношения* θ_i
x_4	2	5	**2**	1	0	12	6*
x_5	7	1	2	0	1	18	9
	-3	-4	-6*	0	0		

По сравнению с табл. 2.1 в табл. 2.2. добавлен еще столбец для симплекс-отношений, о чем речь пойдет ниже. В последней строке записаны коэффициенты целевой функции, взятые с противоположными знаками, так как $L \to \max$.

Данной симплекс-таблице, согласно вышеприведенному правилу, соответствует опорный план (вершина) вида

$$\overline{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 12 & 18 \end{pmatrix}.$$

Условие оптимальности состоит в следующем: если в последней строке симплекс-таблицы все элементы неотрицательны, то соответствующий опорный план является оптимальным, и задача решена. В нашем случае условие оптимальности не выполняется, так как в последней строке имеется три отрицательных элемента. Поэтому необходимо перейти к новому опорному плану и соответственно построить новую симплекс-таблицу.

Алгоритм симплекс-метода

1. В последней строке исходной симплекс-таблицы выбираем наименьший отрицательный элемент. Он отмечен знаком *. Столбец, соответствующий этому элементу, называется *ведущим*. Он определяет переменную, которая будет введена в базис на данном этапе. Это - переменная x_3.
2. Вычисляют отношения свободных членов к элементам ведущего столбца (симплекс-отношение): θ_1=12/2=6, θ_1=18/2=9. Находят наименьшее *неотрицательное* из этих симплекс-отношений. Оно соответствует *ведущей* строке, которая определяет переменную, выводимую из базиса. Это - переменная x_4.
3. Если все симплекс-отношения окажутся отрицательными, то задача не имеет решений (оптимум целевой функции не достигается).
4. На пересечении ведущей строки и ведущего столбца находится ведущий элемент.
5. Если имеется несколько одинаковых по величине симплекс-отношений, то выбирают любое из них. То же самое относится к отрицательным элементам последней строки симплекс-таблицы.
6. После нахождения ведущего элемента переходят к следующей таблице (табл. 2.3). Для этого вначале заполняем первый столбец, записывая новые базисные элементы: x_3 и x_5.
7. Далее элементы ведущей строки табл. 2.2, за исключением симплекс-отношения, делим на ведущий элемент.
8. Остальные элементы ведущего столбца делаем равными нулю.
9. Оставшиеся элементы симплекс-таблицы вычисляются по правилу прямоугольника: мысленно вычерчиваем прямоугольник в табл. 2.2, одна вершина которого совпадает с разрешающим элементом, а другая - с элементом, образ которого мы ищем; остальные две вершины определяются

однозначно. Тогда искомый элемент из табл. 2.3 будет равен соответствующему элементу табл. 2.2 минус дробь, в знаменателе которой стоит разрешающий элемент, а в числителе - произведение элементов из двух неиспользованных вершин прямоугольника.

Таблица 2.3. Вторая итерация симплекс-метода

Базис	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**x_5**	**Свободные члены**	**Симплекс-отношения θ_i**
x_3	1	2,5	1	0,5	0	6	
x_5	5	-4	0	-1	1	6	
	3	11	0	3	0		

Например, элемент, стоящий на пересечении строки x_3 и столбца x_1 находим так: 7-2·2/2=5; свободный член в строке x_5: 18-2·12/2=6; первый элемент последней строки: -3-2·(-6)/2=3 и т.д.

10. Записываем соответствующий опорный план:

$$\overline{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

и снова проверяем условие оптимальности. На этот раз условие выполнено: в последней строке все элементы неотрицательны. Значит найденный опорный план оптимален. Чтобы получить оптимальный план исходной, стандартной задачи, нужно отбросить последние два элемента из $\overline{x}^{(1)}$: $\overline{x}* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

11. Вычисляем оптимальное значение целевой функции: L*=3·0+4·0+6·6=36.

2.4. МЕТОД ИСКУССТВЕННОГО БАЗИСА (М-МЕТОД)

М-метод применяется для решения любых задач линейного программирования, в том числе и тех, где начальная каноническая форма не задана.

М-метод состоит во введении новых искусственных переменных, которые сразу можно взять в качестве базисных, и дальнейшем решении полученной задачи симплекс-методом.

Предположим, что исходная задача линейного программирования представлена в основной форме:

$$L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i = 1,2,\dots,m), \\ x_j \ge 0 \qquad (j = 1,2,\dots,n). \end{cases}$$

Алгоритм М-метода:

В каждое i-е ограничение вводим искусственную переменную x_{n+i}>0. Всего m новых искусственных переменных.

Если $L \to \max$, то в целевую функцию L вводим m дополнительных слагаемых вида: -M·x_{n+1}, -M·x_{n+2}, ..., -M·x_{n+m}; если же $L \to \min$, то слагаемые вида: M·x_{n+1}, M·x_{n+2}, ..., M·x_{n+m}, где M - произвольная очень большая константа.

Получим новую, вспомогательную задачу линейного программирования:

$F(X) = c_1X_1 + \dots + c_nX_n - M*X_{n+1} - \dots - M*X_{n+m}$ =>max

$a_{i,1}X_1 + \dots + a_{i,n}X_n + X_{n+i} = b_i$, (i=1,2,...,m)

X_j>0 , (j=1,2,...,n+m)

Новая система ограничений характерна тем, что искусственные переменные сразу можно взять в качестве базисных:

Формируем начальное базисное решение новой М-задачи:

$$X' = (0, \dots 0, b_1, \dots b_m).$$

Решаем М-задачу симплекс-методом. Анализируем решение М-задачи в соответствии со следующими правилами:

- если в оптимальном решении М-задачи X" = (X''_1, ... X''_n, X''_{n+1}, ... X''_{n+m}) все искусственные переменные равны 0, то вектор X" = (X''_1, ... X''_n) является оптимальным решением исходной ЗЛП;

- если в оптимальном решении М-задачи хотя бы одна искусственная переменная не равна 0, то исходная ЗЛП не имеет решения в силу несовместимости ограничений;

- если М-задача не имеет решения, то исходная ЗЛП также не имеет решения в силу неограниченности целевой функции на допустимом множестве.

Задача 2.7

Исходная ЗЛП: $F(X) = 4X_1 + 4X_2 + 2X_3 + 4X_4 + 3X_5 + X_6 \Rightarrow max$

$$\begin{cases} -3X_1 + 0X_2 + 2X_3 + 3X_{14} + 3X_5 + 4X_6 = 1 \\ 3X_1 - 2X_2 + X_3 + 4X_4 + 3X_5 - 3X_6 = 2 \\ 4X_1 - 2X_2 + X_3 - 4X_4 - X_5 - X_6 = 2 \\ 2X_1 + 3X_2 + 3X_3 + X_4 + 2X_5 - 3X_6 = 3 \end{cases}$$

Решение:

Вводим в ограничения искусственные переменные :

$$\begin{cases} -3X_1 + 0X_2 + 2X_3 + 3X_{14} + 3X_5 + 4X_6 + X_7 = 1 \\ 3X_1 - 2X_2 + X_3 + 4X_4 + 3X_5 - 3X_6 + X_8 = 2 \\ 4X_1 - 2X_2 + X_3 - 4X_4 - X_5 - X_6 + X_9 = 2 \\ 2X_1 + 3X_2 + 3X_3 + X_4 + 2X_5 - 3X_6 + X_{10} = 3 \end{cases}$$

Вводим в целевую функцию дополнительные слагаемые:
$F(X) = 4X_1 + 4X_2 + 2X_3 + 4X_4 + 3X_5 + X_6 - M \cdot X_7 - M \cdot X_8 - M \cdot X_9 - M \cdot X_{10} \Rightarrow max$.
Таким образом мы получили новую ЗЛП.

Сформируем начальное базисное решение новой М-задачи :
X'=(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 3).

После решения М-задачи симплекс методом мы получили следующее оптимальное решение: X"=(1,2, 0,77, 0,00, 0,54, 0,00, 0,75, 0,00, 0,00, 0,00, 0,00).
В этом решении все искусственные переменные равны 0, следовательно, мы

нашли оптимальное решение и для исходной ЗЛП : X = (1,2, 0,77, 0,00, 0,54, 0,00, 0,75).

Задача 2.8

Решить задачу симплекс-методом:

$$F(x) = 2x_1 + 5x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 \leq 7 \\ x_1 + 4x_2 + x_4 \leq 29 \\ x_1 + x_2 + x_5 \leq 11 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

Решение:

Система является системой с базисом, в которой x_3, x_4, x_5 – базисные, а x_1и x_2 – свободные переменные(табл. 2.4). Её базисное решение X_0 = (0; 0; 7; 29; 11), которое является и допустимым.

Таблица 2.4. Начальная симплекс-таблица: Итерация 0

Базис	Переменные					B_j
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	1	1	0	0	7
x_4	1	4	0	1	0	29
x_5	1	1	0	0	1	11
C_i	-2	-5	0	0	0	0

x_2 – разрешающий столбец, так как это наибольший коэффициент по модулю.

x_3 – разрешающая строка, так как min(7/1, 29/4, 11/1) = 7

Новая симплекс-таблица(табл. 2.5):

1. C_i-строка.

Предыдущая C_i -строка: (-2 -5 0 0 0 0)

-(-5)*Новая разрешающая строка: -(0 -5 -5 0 0 -35)

= Новая C_i -строка: (- 2 0 5 0 0 35)

2. Строка x_4.

Предыдущая x_4-строка: (1 4 0 1 0 29)

-(4)*Новая разрешающая строка: -(0 4 4 0 0 28)

= Новая x_4-строка: (1 0 -4 1 0 1)

3. Строка x_5.

Предыдущая x_5-строка: (1 1 0 0 1 11)

-(1)*Новая разрешающая строка: -(0 1 1 0 0 7)

= Новая x_5-строка: (1 0 -1 0 1 4)

Таблица 2.5. Симплекс-таблица: Итерация 1

Базис	Переменные					B_j
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	0	1	1	0	0	7
x_4	1	0	-4	1	0	1
x_5	1	0	-1	0	1	4
C_i	-2	0	5	0	0	35

Новое базисное решение X_1 = (0; 7; 0; 1; 4).

x_1 – разрешающий столбец, так как содержит единственный отрицательный коэффициент.

x_4 – разрешающая строка, так как min(-, 1/1, 4/1) = 1

Новая симплекс-таблица(табл. 2.6):

1. C_i-строка.

Предыдущая C_i -строка: (- 2 0 5 0 0 35)

-(-2)*Новая разрешающая строка: -(-2 0 8 -2 0 -2)

= Новая C_i -строка: (0 0 -3 2 0 37)

2. Строка x_2.

Предыдущая x_2-строка: (0 1 1 0 0 7)

-(0)*Новая разрешающая строка: -(0 0 0 0 0 0)

= Новая x_2-строка: (1 0 -4 1 0 1)

3. Строка x_5.

Предыдущая x_5-строка: (1 0 -1 0 1 4)

-(1)*Новая разрешающая строка: -(1 0 -4 1 0 1)

= Новая x_5-строка: (0 0 3 -1 1 3)

Таблица 2.6. Симплекс-таблица: Итерация 2

Базис	Переменные					B_j
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	0	1	1	0	0	7
x_1	1	0	-4	1	0	1
x_5	0	0	3	-1	1	3
C_i	0	0	-3	2	0	37

Новое базисное решение X_1 = (1; 7; 0; 0; 3).

x_3 – разрешающий столбец, так как содержит единственный отрицательный коэффициент.

x_5 – разрешающий строка, т.к. min(7/1, -, 3/3) = 1

Новая симплекс-таблица(табл. 2.7):

1. C_i-строка.

Предыдущая C_i -строка: (0 0 -3 2 0 37)

-(-3)*Новая разрешающая строка: -(0 0 -3 1 -1 -3)

= Новая C_i -строка: (0 0 0 1 1 40)

2. Строка x_2.

Предыдущая x_2-строка: (0 1 1 0 0 7)

-(1)*Новая разрешающая строка: -(0 0 1 -1/3 1/3 1)

= Новая x_2-строка: (0 1 0 1/3 -1/3 6)

3. Строка x_1.

Предыдущая x_1-строка: (1 0 -4 1 0 1)

-(-4)*Новая разрешающая строка: -(0 0 -4 4/3 -4/3 -4)

= Новая x_1-строка: (1 0 0 -1/3 4/3 5)

Таблица 2.7. Симплекс-таблица: Итерация 3

Базис	Переменные					B_j
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	0	1	0	1/3	-1/3	6
x_1	1	0	0	-1/3	4/3	5
x_3	0	0	1	-1/3	1/3	1
C_i	0	0	0	1	1	40

Вывод:

Полученное решение оптимально, так как в C_i-строке все коэффициенты неотрицательны. Следовательно, f_{max} = 40; оптимальное базовое решение X^*=(5; 6).

Задача 2.9

Решить симплекс-методом задачу линейного программирования

$$z = 3x_1 + 2x_2 - x_3 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 4 \\ x_2 + 2x_3 \le 6 \\ x_1 + x_3 \le 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \le 4 \\ x_2 + 2x_3 + x_5 \le 6 \\ x_1 + x_3 + x_6 \le 6 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0, x_6 \ge 0$$

Решение:

Система является системой с базисом, в которой x_4, x_5, x_6 – базисные, а x_1, x_2, x_3 – свободные переменные. Её базисное решение X_0 = (0; 0; 0; 4; 6; 6), которое является и допустимым(табл. 2.8).

Таблица 2.8. Начальная симплекс-таблица

Базис	Переменные						B_j
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	2	-1	1	1	0	0	4
x_5	0	1	2	0	1	0	6
x_6	1	0	1	0	0	1	6
C_i	-3	-2	1	0	0	0	0

x_1 – разрешающий столбец, так как это наибольший коэффициент по модулю.

x_4 – разрешающая строка, так как min(4/2, -, 6/1) = 2

Новая симплекс-таблица:

1. C_i-строка.

Предыдущая C_i -строка: (-3 -2 1 0 0 0 0)

-(-3)*Новая разрешающая строка: -(-3 3/2 -3/2 -3/2 0 0 -6)

= Новая C_i -строка: (0 -7/2 5/2 3/2 0 0 6)

2. Строка x_5.

Предыдущая x_5-строка: (0 1 2 0 1 0 6)

-(0)*Новая разрешающая строка: -(0 0 0 0 0 0 0)

= Новая x_5-строка: (0 1 2 0 1 0 6)

3. Строка x_6.

Предыдущая x_6-строка: (1 0 1 0 0 1 6)

-(1)*Новая разрешающая строка: -(1 -1/2 1/2 1/2 0 0 2)

= Новая x_6-строка: (0 1/2 1/2 -1/2 0 1 4)

Таблица 2.9. Следующая итерация решения

Базис	Переменные						B_j
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	1	-1/2	1/2	1/2	0	0	2
x_5	0	1	2	0	1	0	6
x_6	0	1/2	1/2	-1/2	0	1	4
C_i	0	-7/2	5/2	3/2	0	0	6

Новое базисное решение X_1 = (2; 0; 0; 0; 6; 4).

x_2 – разрешающий столбец, так как содержит единственный отрицательный коэффициент.

x_5 – разрешающая строка, так как min(-, 6/1, 4/(1/2)) = 6

Новая симплекс-таблица(табл. 2.10):

1. C_i-строка.

Предыдущая C_i -строка: (0 -7/2 5/2 3/2 0 0 6)

-(-7/2)*Новая разрешающая строка: -(0 -7/2 -7 0 -7/2 0 -21)

= Новая C_i -строка: (0 0 19/2 3/2 7/2 0 27)

2. Строка x_1.

Предыдущая x_1-строка: (1 -1/2 1/2 1/2 0 0 2)

-(-1/2)*Новая разрешающая строка: -(0 -1/2 -1 0 -1/2 0 -3)

= Новая x_1-строка: (1 0 3/2 1/2 1/2 0 5)

3. Строка x_6.

Предыдущая x_6-строка: (0 1/2 1/2 -1/2 0 1 4)

-(1/2)*Новая разрешающая строка: -(0 1/2 1 0 1/2 0 3)

= Новая x_6-строка: (0 0 -1/2 -1/2 -1/2 1 1)

Таблица 2.10. Итоговая итерация

Базис	Переменные						B_j
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	1	0	3/2	1/2	1/2	0	5
x_2	0	1	2	0	1	0	6
x_6	0	0	-1/2	-1/2	-1/2	1	1
C_i	0	0	19/2	3/2	7/2	0	27

Полученное решение оптимально, так как в C_i-строке все коэффициенты неотрицательны. Следовательно, z_{max} = 27; оптимальное базовое решение

X^*=(5; 6; 0).

$z_{max} = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 - 0 = 15 + 12 - 0 = 27.$

Ответ: $z_{max} = 27,$ при $x_1^* = 5$ и $x_2^* = 6$.

Задача 2.10

Для производства изделий А и В используется три вида оборудования. При изготовлении одного изделия А оборудование первого вида занято 7 ч, второго – 6 ч и третьего – 1 ч. При изготовлении одного изделия В соответственно 3 ч, 3 ч ,2 ч. В месяц оборудование первого вида может быть занято 1365 ч., второго – 1245 и третьего – 650 ч. Составить план производства, максимизирующий прибыль, если прибыль от реализации одного изделия А равна 6 руб., изделия В – 5 руб. При этом должно быть произведено не менее 140 изделий А.

1. Составим математическую модель задачи:

$$F(x) = 6x_1 + 5x_2 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 \le 1365 & (1) \\ 6x_1 + 3x_2 \le 1245 & (2) \\ x_1 + 2x_2 \le 650 & (3) \\ x_1 \ge 140 & (4) \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

2. Решим задачу графически (рис. 2.9):

$$(1)\ 7x_1 + 3x_2 \le 1365$$

$$7x_1 + 3x_2 = 1365$$

$$x_1 = 195 x_2 = 0 (195, 0)$$

$$x_1 = 84 x_2 = 259 (84, 259)$$

$$(2) 6x_1 + 3x_2 \le 1245$$

$$6x_1 + 3x_2 = 1245$$

$$x_1 = 50 x_2 = 315 (100, 215)$$

$$x_1 = 207.5 x_2 = 0 (200, 15)$$

$$(3) x_1 + 2x_2 \le 650$$

$$x_1 + 2x_2 = 650$$

$$x_1 = 0 x_2 = 325 (0, 325)$$

$$x_1 = 150 x_2 = 250 (150, 250)$$

$$(4) x_1 \ge 140$$

$$x_1 = 140$$

$$x_1 = 140 x_2 = 350 (100, 215)$$

$$x_1 = 140 x_2 = 0 (200, 15)$$

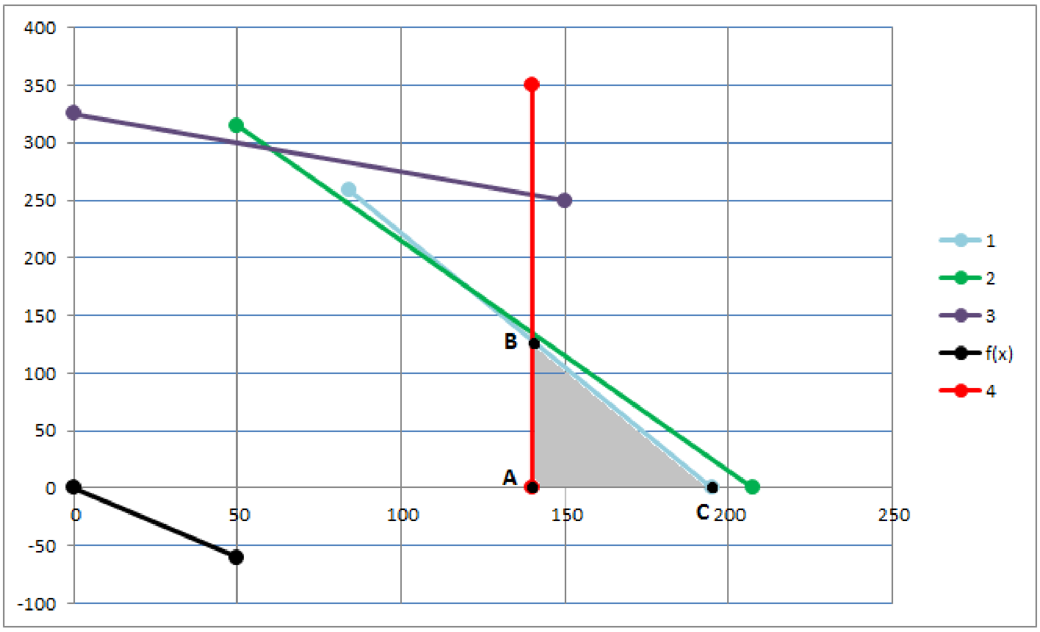


Рис. 2.9. Решение задачи 2.10

$A.\ A(140,0) f_A = 6\cdot 140 + 5\cdot 0 = 840$

$B.\ \begin{cases} x_1 = 140 \\ 7x_1 + 3x_2 = 1365 \end{cases}$

$7\cdot 140 + 3x_2 = 1365$

$3x_2 = 1365 - 980$

$3x_2 = 385$

$x_2 = 128\frac{1}{3}$

$B\left(140, 128\frac{1}{3}\right)\ f_B = 6\cdot 140 + 5\cdot 128\frac{1}{3} = 840 + \frac{1925}{3} = \frac{4445}{3} = 1481\frac{2}{3}$

$C.\ C(195,0)\ f_C = 6\cdot 195 + 5\cdot 0 = 1170$

Ответ: $f_{max} = 1481\frac{2}{3}$, при $x_1^* = 140$ и $x_2^* = 128\frac{1}{3}$.

3. Решим задачу симплекс-методом:

$$F(x) = 6x_1 + 5x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 \le 1365 & (1) \\ 6x_1 + 3x_2 \le 1245 & (2) \\ x_1 + 2x_2 \le 650 & (3) \\ x_1 \ge 140 & (4) \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0$$

Переход к каноническому виду:

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 + x_3 = 1365 \\ 6x_1 + 3x_2 + x_4 = 1245 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 650 \\ x_1 - x_6 = 140 \end{cases}$$

Введем искусственные переменные x:

$$\begin{aligned} 7x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1365 \\ 6x_1 + 3x_2 + x_4 &= 1245 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 &= 650 \\ x_1 - x_6 + x_7 &= 140 \end{aligned}$$

$F(x) = 6x_1 + 5x_2 - M \cdot x_7 \rightarrow max$

$F(x) = 6x_1 + 5x_2 - M(140 - x_1 + x_6) \rightarrow max$

Базисное решение X_0 = (0; 0; 1365; 1245; 650; 0; 140) (табл. 2.11)

Таблица 2.11. Начальная симплекс-таблица:Итерация 0

Базис	Переменные							B_j
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_3	7	3	1	0	0	0	0	1365
x_4	6	3	0	1	0	0	0	1245
x_5	1	2	0	0	1	0	0	650
x_7	1	0	0	0	0	-1	1	140
C_i	-6-M	-5	0	0	0	M	0	-140M

x_1 – разрешающий столбец, так как это наибольший коэффициент по модулю.

x_7 – разрешающая строка, так как min(1365/7, 1245/6, 650/1, 140/1) = 140

Новая симплекс-таблица(табл. 2.12):

1. C_i-строка. Предыдущая C_i -строка: (-6-M -5 0 0 0 M 0 -140M)

-(-6-M)*Новая разрешающая строка: -(-6-M 0 0 0 0 6+M -6-M -840-140M)

= Новая C_i -строка: (0 -5 0 0 0 -6 6+M 840)

2. Строка x_3.

Предыдущая x_3-строка: (7 3 1 0 0 0 0 1365)

-(7)*Новая разрешающая строка: -(7 0 0 0 0 -7 7 980)

= Новая x_3-строка: (0 3 1 0 0 7 -7 385)

3. Строка x_4.

Предыдущая x_4-строка: (6 3 0 1 0 0 0 1245)

-(6)*Новая разрешающая строка: -(6 0 0 0 0 -6 6 840)

= Новая x_4-строка: (0 3 0 1 0 6 -6 405)

4. Строка x_5.

Предыдущая x_5-строка: (1 2 0 0 1 0 0 650)

-(1)*Новая разрешающая строка: -(1 0 0 0 0 -1 1 140)

= Новая x_5-строка: (0 2 0 0 1 1 -1 510)

Итерация 1

Таблица 2.12. Новая итерация решения

Базис	Переменные							B_j
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_3	0	3	1	0	0	7	-7	385
x_4	0	3	0	1	0	6	-6	405
x_5	0	2	0	0	1	1	-1	510
x_1	1	0	0	0	0	-1	1	140
C_i	0	-5	0	0	0	-6	6+M	840

Новое базисное решение X_1 = (140; 0; 385; 405; 510; 0; 0).

x_6 – разрешающий столбец, так как содержит единственный отрицательный коэффициент.

x_3 – разрешающая строка, т.к. min(385/7, 405/6, 510/1, -) = 55

Новая симплекс-таблица(табл. 2.13):

1. C_i-строка.

Предыдущая C_i -строка: (0 -5 0 0 0 -6 6+M 840)

-(-6)*Новая разрешающая строка: -(0 -18/7 -6/7 0 0 -6 6 -330)

= Новая C_i -строка: (0 -17/7 6/7 0 0 0 M 1170)

2. Строка x_4.

Предыдущая x_4-строка: (0 3 0 1 0 6 -6 405)

-(6)*Новая разрешающая строка: -(0 18/7 6/7 0 0 6 -6 330)

= Новая x_4-строка: (0 3/7 -6/7 1 0 0 0 75)

3. Строка x_5.

Предыдущая x_5-строка: (0 2 0 0 1 1 -1 510)

-(1)*Новая разрешающая строка: -(0 3/7 1/7 0 0 1 -1 55)

= Новая x_5-строка: (0 11/7 -1/7 0 1 0 0 455)

4. Строка x_1.

Предыдущая x_1-строка: (1 0 0 0 0 -1 1 140)

-(-1)*Новая разрешающая строка: -(0 -3/7 -1/7 0 0 -1 1 -55)

= Новая x_1-строка: (1 3/7 1/7 0 0 0 0 195)

Таблица 2.13. Симплекс-таблица: Итерация 2

Базис	Переменные							B_j
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_6	0	3/7	1/7	0	0	1	-1	55
x_4	0	3/7	-6/7	1	0	0	0	75
x_5	0	11/7	-1/7	0	1	0	0	455
x_1	1	3/7	1/7	0	0	0	0	195
C_i	0	-17/7	6/7	0	0	0	M	1170

Новое базисное решение X_1 = (195; 0; 0; 75; 455; 55; 0).

x_2 – разрешающий столбец, так как содержит единственный отрицательный коэффициент.

x_6 – разрешающая строка, так как min(385/3, 525/3, 3185/11, 1365/3) = $128\frac{1}{3}$

Новая симплекс-таблица(табл. 2.14):

1. C_i-строка.

Предыдущая C_i -строка: (0 -17/7 6/7 0 0 0 M 1170)

-(-17/7)*Новая разрешающая строка: -(0 -17/7 -17/21 0 0 -17/3 17/3 -935/3)

= Новая C_i -строка: (0 0 5/3 0 0 17/3 M-17/3 4445/3)

2. Строка x_4.

Предыдущая x_4-строка: (0 3/7 -6/7 1 0 0 0 75)

-(3/7)*Новая разрешающая строка: -(0 3/7 1/7 0 0 1 -1 55)

= Новая x_4-строка: (0 0 -1 1 0 -1 1 20)

3. Строка x_5.

Предыдущая x_5-строка: (0 11/7 -1/7 0 1 0 0 455)

-(11/7)*Новая разрешающая строка: -(0 11/7 11/21 0 0 11/3 -11/3 605/3)

= Новая x_5-строка: (0 0 -2/3 0 1 -11/3 11/3 760/3)

4. Строка x_1.

Предыдущая x_1-строка: (1 3/7 1/7 0 0 0 0 195)

-(3/7)*Новая разрешающая строка: -(0 3/7 1/7 0 0 1 -1 55)

= Новая x_1-строка: (1 0 0 0 0 -1 1 140)

Таблица 2.14. Симплекс-таблица: Итерация 3

Базис	Переменные							B_j
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_2	0	1	1/3	0	0	7/3	-7/3	385/3
x_4	0	0	-1	1	0	-1	1	20
x_5	0	0	-2/3	0	1	-11/3	11/3	760/3
x_1	1	0	0	0	0	-1	1	140
C_i	0	0	5/3	0	0	17/3	M-17/3	4445/3

Полученное решение оптимально, так как в C_i-строке все коэффициенты неотрицательны. Следовательно, $f_{max} = 1481\,\frac{2}{3}$; оптимальное базовое решение $X^*=(140;\ 128\,\frac{1}{3})$.

3. ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

3.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В качестве примера задачи, связанной с поиском наилучшего решения, рассмотрим задачу выбора оптимальной структуры посевных площадей нескольких сельскохозяйственных культур. Эта задача является типичным примером задачи оптимального распределения ресурсов, часто возникающей при производстве различной продукции.

<u>Описание задачи</u>***:*** в овощеводческом хозяйстве набор выращиваемых культур и объемы их производства определяются наличием пригодных для использования земель, допустимых затрат труда, заказами на отдельные виды культур, спросом на них, а также экономической эффективностью производства. При определении структуры посевных площадей необходимо обеспечить максимальную экономическую эффективность, исходя из имеющихся ресурсов.

Для решения такой задачи необходима следующая информация:

- площадь земли, отводимая под посевы;
- наличие трудовых ресурсов, выделяемых для производства овощей как в течение всего года, так и в наиболее напряженный период (в период сбора урожая);
- затраты труда на каждую культуру (всего и в напряженный /особый/ период);
- урожайность каждой из рассматриваемых культур;
- заказ на каждую культуру и предельные объемы сбыта;

- прибыль от производства каждой культуры;
- критерий оптимальности, определяющий, какое решение считается наилучшим.

Допустим, что при решении нашей задачи используются следующие исходные данные:

выращиваемые культуры:

- капуста;
- огурцы;
- помидоры;
- свекла;
- другие виды овощей.

Для каждой культуры полагаются известными:

а) затраты труда (человеко-дней на гектар) на выращивание культуры на единице площади всего и, отдельно, в напряженный период (например, в период сбора урожая);
б) заказ и предельный спрос на культуру (в центнерах);
в) площадь используемых земель равна 313 га;
г) трудовые ресурсы для производства овощей в течение года равны 45000 человеко-дней, в том числе в напряженный период - 8600 человеко-дней;
д) в качестве критерия оптимальности принимается максимум получаемой от производства овощей прибыли.

Все необходимые для решения задачи исходные (колонки с A по G) и вспомогательные данные приведены на рис. 3.1, где показано их расположение на листе электронной таблицы с именем “Пользователь”.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Исходные данные								Оптимальное решение		
2	Наименование	Заказ	Максим.	Урожай-	Затраты труда		Прибыль		Площадь	Выход	
3			спрос	ность	всего	особо	с 1 га		посева	продукции	
4	культуры	(ц)	(ц)	(ц/га)	(чел.-дн./га)		(у.е.)		(га)	(ц)	
5	Капуста	31000	45000	325	75	26	69		130,00	42250,00	13
6	Огурцы	4500	7000	92	138	22	39		70,00	6440,00	7
7	Помидоры	6500	10000	176	346	35	38		40,00	7040,00	4
8	Свекла	5900	9500	206	158	34	14		30,00	6180,00	3
9	Другие овощи	1500	8000	52	91	40	10		30,00	1560,00	3
10											
11	Посевная площадь:			313	га				Прибыль:	13940	у.е.
12	Трудовые ресурсы (всего):			45000	чел.-дн.						
13	Трудовые ресурсы (особо):			8600	чел.-дн.						

Рис. 3.1. Исходные данные для решения задачи и их расположение на листе электронной таблицы

Помимо ранее указанных требований для удобства реализации решения площадь посевов под каждую культуру будем определять с точностью до десятков гектаров (вряд ли реально выполнить задачу выращивания огурцов на площади в точности, например, 103,673 га).

3.2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ

Для того, чтобы найти решение задачи, необходимо сформулировать математическую модель. Прежде всего, запишем ее в общем виде, используя следующие обозначения:

N – множество выращиваемых культур, $j \in \mathbf{N}$;

M – множество ресурсов (площадь земли, трудовые ресурсы и т.п.), которые можно распределять между различными видами культур, $i \in \mathbf{M}$;

$\mathbf{A}_{ij}$ – затраты i-го ресурса на 1 га посевов j-й культуры;

$\mathbf{B}_i$ – объем производственных ресурсов i-го вида;

$\mathbf{C}_j$ – прибыль, получаемая с 1 га посева j-й культуры;

dj – объем заказов на j-ю культуру;

Dj – предельный спрос на j-ю культуру;

$\mathbf{U}j$ – урожайность j-й культуры.

Переменные задачи (управляемые, искомые величины):

$\mathbf{X}_j$ – площадь, выделяемая под посев j-й культуры, уменьшенная в 10 раз.

Модель задачи в общем виде выглядит следующим образом.

Целевая функция:

$\sum 10 * \mathbf{C}_j * \mathbf{X}_j \rightarrow \max \quad j \in N$

Ограничения на объемы используемых ресурсов:

$\sum 10 * \mathbf{A}_{ij} * \mathbf{X}_j \leq \mathbf{B}_i \qquad \forall i \in \mathbf{M} \quad j \in N$

Ограничения на объемы производства культур:

$\mathbf{d}j \leq \sum 10 * \mathbf{U}_j * \mathbf{X}_j \leq \mathbf{D}_j \qquad \forall j \in \mathbf{N} \qquad j \in N$

Чтобы в процессе решения получить результаты в нужном виде – округленными до десятков значениями оптимальных посевов площадей, введем в модель дополнительное ограничение, связанное с условием целочисленности значений переменных: $\mathbf{X}_j \in Z \quad \forall j \in \mathbf{N}$

Отметим, что сформулированная математическая модель задачи включает только линейные ограничения и, следовательно, является задачей смешанного целочисленного линейного программирования (СЦЛП).

Пользуясь математической моделью общего вида, нетрудно получить конкретную модель, на основе которой и будет решаться наша задача.

Переменные:

$\mathbf{X}_1$ – площадь (га), выделяемая под посев капусты;

$\mathbf{X}_2$ – площадь (га), выделяемая под посев огурцов;

$\mathbf{X}_3$ – площадь (га), выделяемая под посев помидоров;

$\mathbf{X}_4$ – площадь (га), выделяемая под посев свеклы;

X_5 – площадь (га), выделяемая под посев других овощей.

Примечание: имеются в виду уменьшенные в 10 раз значения площадей.

Целевая функция:

$$690*X_1 + 390*X_2 + 380*X_3 + 140*X_4 + 100*X_5 \rightarrow max$$

Ограничения:

- на общую площадь посевов:

$$10 * (X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5) \leq 313$$

- на общий объем трудовых ресурсов:

$$750*X_1 + 1380*X_2 + 3460*X_3 + 1580*X_4 + 910*X_5 \leq 45000$$

- на объем ресурсов в напряженный период:

$$260*X_1 + 220*X_2 + 350*X_3 + 340*X_4 + 400*X_5 \leq 8600$$

- по заказам на каждую культуру:

$$3250 * X_1 \geq 31000$$

$$920 * X_2 \geq 4500$$

$$1760 * X_3 \geq 6500$$

$$2060 * X_4 \geq 5900$$

$$520 * X_5 \geq 1500$$

- по предельному спросу на каждую культуру:

$$3250 * X_1 \leq 45000$$

$$920 * X_2 \leq 7000$$

$$1760 * X_3 \leq 10000$$

$$2060 * X_4 \leq 9500$$

$520 * X_5 \leq 8000$

- на целочисленность значений:

X_1 , X_2 , X_3 , X_4 , X_5 - целые.

3.3. ОРГАНИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Прежде всего, присвойте одному из листов электронной таблицы имя “Пользователь” и сформируйте на нем электронный документ, показанный на рис. 3.1 (в колонки I, J и K числовые значения заносить не нужно!).

Затем сформируйте все необходимые компоненты модели (переменные, целевую функцию, ограничения).

В качестве переменных задачи определите диапазон клеток K5:K9 и первоначально занесите в них нулевые значения.

В клетку I5 занесите формулу “=K5*10” и скопируйте ее в клетки диапазона K6:K9. В этих клетках будут отображаться площади посевов каждой культуры.

В клетку J5 занесите формулу “=I5*D5” и скопируйте ее в клетки диапазона J6 : J9. Здесь отображаются урожаи каждой культуры, соответствующие площади посевов.

В клетку J11 занесем формулу, значением которой должна быть ожидаемая в результате реализации оптимального решения прибыль:

=СУММПРОИЗВ(G5 : G9 ; I5 : I9)

Значение этой формулы есть значение целевой функции задачи.

Одному из листов электронной таблицы присвойте имя “Модель”. На этом листе будут размещены формулы, соответствующие левым частям ограничений модели. Поскольку значения ограничений при поиске решения наблюдать не обязательно, они размещаются в том месте, где они не видны пользователю, например, на другом листе. Пояснительные тексты и формулы, размещаемые на листе “Модель”, показаны на рис. 3.2.

Примечание: в некоторых версиях табличного процессора Excel все сведения, относящиеся к модели, должны размещаться на одном и том же листе.

	A
1	Ограничение на площадь посевов
2	=СУММ(Пользователь!$I$5 : $I$9)
3	Ограничение на общий объем трудовых ресурсов
4	=СУММПРОИЗВ(Пользователь!$I$5 : $I$9 ; Пользователь!$E$5 : $E$9)
5	Ограничение на объем трудовых ресурсов в напряженный период
6	=СУММПРОИЗВ(Пользователь!$I$5 : $I$9 ; Пользователь!$F$5 : $F$9)

Рис. 3.2. Пояснительные тексты и формулы, размещаемые на листе электронной таблицы с именем “Модель”.

Для формирования условий оптимизационной задачи и поиска оптимального решения необходимо инициировать работу оптимизационного блока Excel с помощью команды меню “Сервис, Поиск решения...”. В результате на экране появится окно “Поиск решения”.

Далее необходимо проделать следующее. В поле окна “Установить целевую ячейку” указать адрес ячейки, значение которой используется в качестве критерия оптимизации, - в нашем случае это ячейка J11. Имя ячейки можно ввести вручную или же, сделав описываемое поле активным, указать мышкой нужную ячейку электронной таблицы. Необходимое условие - целевая ячейка обязательно должна содержать формулу, значение которой зависит от изменяемых ячеек, соответствующих переменным задачи. Рядом с целевой ячейкой необходимо установить признак вида оптимизации (максимум или минимум целевой функции или ее равенство некоторому значению, которое в этом случае требуется указать).

В поле “Изменяя ячейки” необходимо указать область ячеек, соответствующих переменным задачи. В нашем случае этой областью будет диапазон K5:K9. При нажатии кнопки “Предположить” в рассматриваемом поле будут указаны все ячейки, связанные с формированием значения целевой функции, что не всегда удобно (например, в нашем случае вместе с клетками K5:K9 будут указаны клетки G5:G9, соответствующие коэффициентам целевой функции, считающимся константами в ходе поиска решения).

Замечание: ссылки на ячейки в полях окна “Поиск решения” автоматически становятся абсолютными.

Ограничения задачи указываются в поле “Ограничения”. Для задания ограничения требуется указать ячейку, соответствующую левой части ограничения, тип ограничения - “не больше”, “не меньше”, “равно”, “целое” (последнее только по отношению к ячейкам переменных) и ячейку или числовое значение левой части ограничения.

Новое ограничение формируется при нажатии кнопки “Добавить...”, вследствие чего открывается окно “Добавление ограничения”, позволяющее задать местонахождение правой и левой части очередного ограничения и характер связи между ними

.Для рассматриваемой нами задачи необходимо определить 14 ограничений, приводимых ниже:

1. $K$5 : $K$9 = целое
2. Модель!$A$3 <= $D$11 Ограничение на площадь посевов
3. Модель!$A$5 <= $D$12 Ограничения на трудовые ресурсы
4. Модель!$A$7 <= $D$13 Ограничение на трудовые ресурсы в напряжен-ный период
5. $J$5 >= $B$5 Группа ограничений на объемы производства
6. $J$6 >= $B$6 продукции (не менее, не более)
7. $J$7 >= $B$7
8. $J$8 >= $B$8
9. $J$9 >= $B$9
10. $J$5 <= $C$5
11. $J$6 <= $C$6
12. $J$7 <= $C$7
13. $J$8 <= $C$8
14. $J$9 <= $C$9

При нажатии кнопки “Добавить” в окне “Добавить ограничение” сформированное ограничение будет добавлено к условиям задачи и станет возможным задание следующего без возврата в окно “Поиск решения”.

Сформировав все параметры задачи, выполните ее решение, нажав на кнопку “Выполнить”. Согласно требованиям Excel, изменяемые в процессе поиска оптимального решения ячейки (соответствующие переменным задачи) обязательно должны располагаться на активном листе электронной таблицы. Поэтому в момент нажатия кнопки “Выполнить” текущим должен быть лист “Пользователь”.

Сравните полученное решение с оптимальным, которое приведено на рис. 3.1. Если они совпадают, значит, Вы все сделали правильно.

3.4. ПАРАМЕТРЫ ПОИСКА РЕШЕНИЯ

Иногда, после формирования модели, приходится уточнять параметры метода решения задачи. Для получения такой возможности следует нажать кнопку “Параметры...”, в результате чего открывается окно “Параметры поиска решения”.

С помощью данного окна можно уточнить некоторые параметры используемого метода решения. Изменять стандартные установки целесообразно лишь в том случае, если Вы достаточно хорошо разбираетесь в методах математического программирования. В большинстве случаев при решении задач небольшой размерности вполне подходят стандартные установки.

Тем не менее, дадим краткие пояснения смысла некоторых параметров.

“Максимальное время” определяет предельное время поиска решения (не более 32767 секунд). Если в течение указанного времени оптимальное решение не будет найдено, процесс поиска прерывается и следует запрос о необходимости продолжить или прекратить решение задачи. В последнем случае Вы получите некоторое промежуточное, возможно, недопустимое решение.

“Итерации”. Процесс поиска оптимального решения носит пошаговый, итеративный характер (не более 32767 итераций). Решение, получаемое в ходе очередной итерации, основывается на полученном при выполнении предыдущей. При исчерпании числа итераций процесс поиска решения прерывается (см. предыдущий пункт).

Время решения и требуемое число итераций зависят от начальных значений переменных. Чем ближе они к оптимальным, тем быстрее будет получено решение.

“Относительная погрешность”. Данное поле должно содержать число из интервала (0, 1). Точность определяет близость полученного значения целевой функции к оптимальному. Чем больше точность (т.е. чем ближе указанное число к нулю), тем большее число итераций и большее время требуется для поиска оптимального решения.

“Допустимое отклонение” определяет допуск на отклонение от оптимального решения, если на переменные наложено условие целочисленности.

Из остальных возможностей стоит отметить лишь пункт “Линейная модель” - линейность всегда стоит указывать явно, поскольку это позволяет в несколько раз сократить время решения задачи и, скорее всего, получить более точный ответ.

Кнопки “Сохранить модель...” и “Загрузить модель...” позволяют сохранять параметры сформированной модели в какой-либо области электронной таблицы.

Более детальные пояснения Вы можете получить из документации на Excel 95 или пользуясь справочной системой Excel.

<u>Задание:</u> обнулите значения переменных (клетки K5:K9), установите признак линейности и снова выполните поиск решения. Теперь он займет гораздо меньше времени.

4. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

4.1. ФОРМУЛИРОВКА ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Транспортная задача линейного программирования получила в настоящее время широкое распространение в теоретических разработках и практическом применении на транспорте и в промышленности. Особенно большое значение она имеет в деле рационализации постановок важнейших видов промышленной и сельскохозяйственной продукции, а также оптимального планирования грузопотоков и работы различных видов транспорта.

Кроме того, к задачам транспортного типа сводятся многие другие задачи линейного программирования - задачи о назначениях, сетевые, календарного планирования.

Однородный груз сосредоточен у m поставщиков в объемах $a_1, a_{2,},..., a_m$. Данный груз необходимо доставить n потребителям в объемах $b_{1,}, b_2,..., b_n$. Известны c_{IJ}, j=1,2,…,n - стоимости перевозки единицы груза от каждого I-го поставщика каждому j-му потребителю. Требуется составить такой план перевозок, при котором запросы всех потребителей полностью удовлетворены и суммарные затраты на перевозку всех грузов минимальны.

Таблица 4.1. Исходные данные транспортной задачи

a_i \ b_j	b_1	b_2	…	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}
…	…	…	….	….
a_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}

Исходные данные задачи могут быть представлены также в виде вектора запасов поставщиков А=($a_1, a_2,..., a_m$), вектора запросов потребителей

В=($b_{1,}, b_2,..., b_n$) и матрицы стоимостей $C = \begin{Bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots. & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{Bmatrix}$.

В транспортных задачах под поставщиками и потребителями понимаются различные промышленные и сельскохозяйственные предприятия, заводы, фабрики, склады, магазины и т.д. Однородными считаются грузы, которые могут быть перевезены одним видом транспорта. Под стоимостью перевозок понимаются тарифы, расстояния, время, расход топлива и т.п.

В транспортной задаче предполагается, что суммарные запасы поставщиков равны суммарным запросам потребителей, т.е. $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Такая задача называется задачей с правильным балансом, а ее модель – закрытой. Если же это равенство не выполняется, то задача называется задачей с неправильным балансом, а ее модель – открытой .

4.2. ОПОРНОЕ РЕШЕНИЕ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Опорным решением транспортной задачи называется любое допустимое решение, для которого вектор-условия, соответствующие положительным координатам, линейно независимы.

Ввиду того, что ранг системы векторов-условий транспортной задачи равен m+n-1, опорное решение не может иметь отличных от нуля координат более m+n-1. Число отличных от нуля координат невырожденного опорного решения равно m+n-1, а для вырожденного опорного решения – меньше m+n-1.

Любое допустимое решение транспортной задачи можно записать в ту же таблицу, что и исходные данные. Клетки таблицы транспортной задачи, в которых находится отличные от нуля или базисные нулевые перевозки, называются занятыми, остальные – незанятыми, или свободными. Клетки таблицы нумеруются так, что клетка, содержащая перевозку x_{ij} , т.е. стоящая в i-й строке и j-м столбце, имеет номер (i,j). Каждой клетке с номером (i,j) соответствует переменная x_{ij} , которой соответствует вектор-условие A_{ij} .

Для того чтобы избежать трудоемких вычислений при проверке линейной независимости вектор-условий, соответствующих положительным координатам допустимого решения, вводят понятие цикла. Циклы также используются для перехода от одного опорного решения к другому.

Циклом называется такая последовательность клеток таблицы транспортной задачи (i_1,j_1), (i_1,j_2), (i_2,j_2), … , (i_k,j_1), в которой две и только две соседние клетки расположены в одной клетке или столбце, причем первая и последняя клетки также находятся в одной строке или столбце.

Цикл изображают в таблице транспортной задачи в виде замкнутой ломаной линии. В любой клетке цикла происходит поворот звена ломаной линии на 90^0.

4.3. МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ НАЧАЛЬНОГО ОПОРНОГО РЕШЕНИЯ

4.3.1. Метод северо-западного угла

Существует ряд методов построения начального опорного решения, наиболее простым из которых является метод северо-западного угла. В данном методе запасы очередного поставщика используются для обеспечения запросов очередных потребителей до тех пор, пока не будут исчерпаны полностью, после чего используются запасы следующего по номеру поставщика.

Заполнение таблицы транспортной задачи начинается с левого верхнего угла и состоит из ряда однотипных шагов. На каждом шаге, исходя из запасов очередного поставщика и запросов очередного потребителя, заполняется только одна клетка и соответственно исключается из рассмотрения один поставщик или потребитель. Осуществляется это таким образом:

1) если $a_i < b_j$, то $x_{ij} = a_i$ и исключается поставщик с номером i, $x_{ik} = 0$, k=1, 2, …, n, k$\neq$j, $b_j^{'} = b_j - a_i$;
2) если $a_i > b_j$, то $x_{ij} = b_j$ и исключается потребитель с номером j, $x_{kj} = 0$, k=1, 2, …, m, k$\neq$i, $a_i^{'} = a_i - b_j$;
3) если $a_i = b_j$, то $x_{ij} = a_i = b_j$ и исключается либо i-й поставщик, $x_{ik} = 0$, k=1, 2, …, n, k$\neq$j, $b_j^{'} = 0$, либо j-й потребитель, $x_{kj} = 0$, k=1, 2, …, m, k$\neq$i, $a_i^{'} = 0$.

Нулевые перевозки принято заносить в таблицу только тогда, когда они попадают в клетку (i,j), подлежащую заполнению. Если в очередную клетку таблицы (i,j) требуется поставить перевозку, а i-й поставщик или j-й потребитель имеет нулевые запасы или запросы, то в клетку ставится перевозка, равная нулю (базисный нуль), и после этого, как обычно, исключается из рассмотрения соответствующий поставщик или потребитель. Таким образом, в таблицу заносят только базисные нули, остальные клетки с нулевыми перевозками остаются пустыми.

Во избежание ошибок, после построения начального опорного решения необходимо проверить, что число занятых клеток равно m+n-1 и векторы-условия, соответствующие этим клеткам, линейно независимы.

Решение транспортной задачи, построенное методом северо-западного угла, является опорным.

4.3.2. Метод минимальной стоимости

Метод минимальной стоимости прост, он позволяет построить опорное решение, достаточно близкое к оптимальному, так как использует матрицу стоимостей транспортной задачи C=(c_{ij}), i=1,2,…,m, j=1,2,…,n. Как и метод северо-западного угла, он состоит из ряда однотипных шагов, на каждом из которых заполняется только одна клетка таблицы, соответствующая минимальной стоимости min { c_{ij} }, и исключается из рассмотрения только одна строка (поставщик) или один столбец (потребитель). Очередную клетку, соответствующую $\min\limits_{i,j}\{c_{ij}\}$, заполняют по тем же правилам, что и в методе северо-западного угла. Поставщик исключается из рассмотрения, если его запасы использованы полностью. Потребитель исключается из рассмотрения, если его запросы удовлетворены полностью. На каждом шаге исключается либо один поставщик, либо один потребитель. При этом, если поставщик еще не исключен, но его запасы равны нулю, то на том шаге, когда от данного поставщика требуется поставить груз, в соответствующую клетку таблицы заносится базисный нуль, и лишь затем поставщик исключается из рассмотрения. Аналогично с потребителем.

Решение транспортной задачи, построенное методом минимальной стоимости, является опорным.

4.4. ПЕРЕХОД ОТ ОДНОГО ОПОРНОГО РЕШЕНИЯ К ДРУГОМУ

В транспортной задаче переход от одного опорного решения к другому осуществляется с помощью цикла. Для некоторой свободной клетки таблицы строится цикл, содержащий часть клеток, занятых опорным решений. По этому циклу перераспределяются объемы перевозок. Перевозка загружается в выбранную свободную клетку, и освобождается одна из занятых клеток, получается новое опорное решение.

Если таблица транспортной задачи содержит опорное решение, то для любой свободной клетки таблицы существует единственный цикл, содержащий эту клетку и часть клеток, занятых опорным решением.

4.4.1. Означенный цикл

Цикл называется *означенным,* если его угловые клетки пронумерованы по порядку и нечетным клеткам приписан знак «+», а четным – знак «-».

Сдвигом по циклу на величину θ называется увеличение объемов перевозок во всех нечетных клетках цикла, отмеченных знаком «+», на θ и уменьшение объемов перевозок во всех четных клетках, отмеченных знаком «-», на θ.

Если таблица транспортной задачи содержит опорное решение, то при сдвиге по любому циклу, содержащему одну свободную клетку, на величину $\theta = \min\limits_{<<->>}\{x_{ij}\}$ *получится опорное решение.*

4.4.2. Метод потенциалов

Широко распространенным методом решения транспортных задач является метод потенциалов. Этот метод позволяет упростить наиболее трудоемкую часть вычислений – нахождение оценок свободных клеток.

<u>Признак оптимальности опорного решения.</u> *Если допустимое решение X=(* x_{ij} *), i=1,2,…,m, j=1,2,…,n транспортной задачи является оптимальным, то существуют потенциалы (числа) поставщиков* u_i *, i=1,2,…,m и потребителей* v_j *, j=1,2,…,n, удовлетворяющие следующим условиям:*

$u_i + v_j = c_{ij}$ *при* x_{ij} *>0,*

$u_i + v_j \le c_{ij}$ *при* x_{ij} *=0.*

Алгоритм решения транспортной задачи методом потенциалов

Порядок решения транспортной задачи методом потенциалов следующий:

1. Проверяют выполнение необходимого и достаточного условия разрешимости задачи. Если задача имеет неправильный баланс, то вводят фиктивного поставщика или потребителя с недостающими запасами или запросами и нулевыми стоимостями перевозок.

2. Строят начальное опорное решение (методом минимальной стоимости или каким-либо другим методом) и проверяют правильность его построения, для чего подсчитывают количество занятых клеток (их должно быть m+n-1) и убеждаются в линейной независимости векторов-условий (методом вычеркивания).

3. Строят систему потенциалов, соответствующих опорному решению. Для этого решают систему уравнений $u_i + v_j = c_{ij}$ при x_{ij} >0. Для того чтобы найти частное решение системы, одному из потенциалов (обычно тому, которому соответствует большее число занятых клеток) задают произвольно некоторое значение (чаще нуль). Остальные потенциалы однозначно определяются по формулам

   $u_i = c_{ij} - v_j$ при x_{ij} >0, если известен потенциал v_j, и

   $v_j = c_{ij} - u_i$ при x_{ij} >0, если известен потенциал u_i.

4. Проверяют, выполняется ли условие оптимальности для свободных клеток таблицы. Для этого вычисляют оценки для всех свободных клеток по формулам

   $\Delta_{lk} = u_i + v_j - c_{ij}$, и те оценки, которые больше нуля, записывают в левые нижние углы клеток. Если для всех свободных клеток $\Delta_{ij} \le 0$, то вычисляют значение целевой функции, и решение задачи заканчивается, так как полученное решение является оптимальным. Если же имеется хотя бы одна клетка с положительной оценкой, то опорное решение не является оптимальным.

5. Переходят к новому опорному решению, на котором значение целевой функции будет меньше. Для этого находят клетку таблицы задачи, которой соответствует

наибольшая положительная оценка max{Δ_{ij}}=Δ_{lk}. Строят цикл, включающий в свой состав данную клетку и часть клеток, занятых опорным решением. В клетках цикла расставляют поочередно знаки «+» и «-», начиная с «+» в клетке с наибольшей положительной оценкой. Осуществляют сдвиг

(перераспределение груза) по циклу на величину $\theta = \min\limits_{<<->>} \{x_{ij}\}$.

Клетка со знаком «-», в которой достигается $\min\limits_{<<->>} \{x_{ij}\}$, остается пустой. Если минимум достигается в нескольких клетках, то одна из них остается пустой, а в остальных проставляют базисные нули, чтобы число занятых клеток оставалось равным m+n-1. Далее возвращаемся к пункту 3 алгоритма.

4.5. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Задание: Имеются три пункта отправления с запасами груза a={90; 70; 50} и четыре пункта назначения с заявками b={80;60;40;30}. Стоимость перевозки составляет из 1-го пункта отправления {2;1;3;2}; из 2-го пункта отправления {2;3;3;2}; из 3-го пункта отправления {3;3;2;1}. Суммарное количество груза в пунктах отправления 90+70+50=210 равно суммарному количеству по заявкам: 80+60+40+30=210. Имеем сбалансированную транспортную задачу.

Решение:

При составлении первого опорного плана используется метод северо-западного угла (табл. 4.1.1.). В первую очередь заполняется клетка (1,1) - в нее записывается значение, равное min[b(1),a(1)]=min[80,90]=80. Заявка первого пункта назначения выполнена, поэтому клетки (2,1) и (3,1) остаются незаполненными. Для выполнения заявки 2-го пункта назначения в клетку (1,2) записывается значение, равное min(90-80;60)=10. Клетки (1,3) и (1,4) остаются незаполненными, так как запас 1-го пункта отправления использован. Для выполнения заявки 2-го пункта назначения в клетку (2,2) записывается значение, равное min(60-10,70)=50. Заявка 2-го пункта назначения выполнена, поэтому клетка (3,2) остается незаполненной. Для выполнения заявки 3-го пункта назначения в клетку (2,3) записываются значение, равное min(70-50;60)=20; клетка (2,4) остается незаполненной, так как запас 2-го пункта отправления использован. Для выполнения заявки 3-го пункта назначения в клетку (3,3) записывается значение, равное min(40-20,50)=20. Заявка 3-го пункта назначения выполнена. Для выполнения заявки 4-го пункта назначения в клетку (3,4) записывается значение, равное min(30;50-20)=30. Заявка 4-го пункта назначения выполнена; запас 3-го пункта отправления использован.

В правом нижнем углу таблицы записывается значение целевой функции F1=2*80+1*10+3*50+3*20+2*20+1*30=450.

Таблица 4.1.1. Потенциалы по заполненным клеткам 1-го опорного плана

	1	2	3	4	Ai	Ui
1	- 2 80	+ 1 10	3	2	90	0
2	+ 2	- 3 50	3 20	1	70	2
3	3	3	2 20	1 30	50	1
Bi	80	60	40	30	450	
Vi	2	1	1	0		

<u>Первый опорный план</u>

Дальнейшее улучшение первого опорного плана и получение оптимального плана производится специальным методом, основанным на теории двойственности и получившим название метода потенциалов.

Сумма потенциалов u(i)+v(j) определяет выручку за перевозку груза из i-го пункта отправления в j-ый пункт назначения - «псевдостоимости» C'(i,j). Для оптимального плана значения C'(i,j) не должны превышать значения коэффициентов C(i,j) целевой функции при переменных Xij. При этом для клеток, в которых значения Xij>0, должно выполняться условие равенства u(i)+v(j)=C(i,j); а для клеток, в которых значения Xij=0, должно выполняться условие u(i)+v(j)<=C(i,j).

В качестве оценок клеток транспортной таблицы можно рассматривать разность между заданной стоимостью C(i,j) и полученной суммой потенциалов d(i,j)

= C(i,j) – [u(i)+v(j)]. Для заполненных клеток эти оценки будут равны нулю. Для свободных клеток соотношение между заданной стоимостью и суммой потенциалов может быть различным. Для оптимального плана оценки свободных клеток должны быть неотрицательны.

Для значений потенциалов в транспортной таблице предназначены соответственно последний столбец – для u(i) и последняя строка – для v(j). Расчет потенциалов выполняется после составления опорного плана по заполненным клеткам в соответствии с приведенными выше соотношениями. Следует отметить, что число искомых потенциалов равно n+m, а число заполненных клеток равно числу независимых ограничений (n+m-1), поэтому одна из переменных u(i), v(j) может задаваться произвольно, например, можно всегда считать u(1)=0.

Рассчитаем потенциалы по заполненным клеткам 1-го опорного плана:

для клетки (1,1) u(1)+v(1)=2; при u(1)=0; v(1)=2; для клетки (1,2) u(1)+v(2)=1; → v(2)=1; для клетки (2,2) u(2)+v(2)=3; → u(2)=2; для клетки (2,3) u(2)+v(3)=3; → v(3)=1; для клетки (3,3) u(3)+v(3)=2; → u(3)=1; для клетки (3,4) u(3)+v(4)=1; → v(4)=0.

Таблица 4.2.

D13	2
D14	2
D21	-2
D24	-1
D31	0
D32	1

Отрицательную оценку имеют клетки (2,1) и (2,4). Значит, полученный план неоптимальный, его необходимо преобразовать. План может быть улучшен за счет перераспределения груза в клетку (2,1) с минимальным значением оценки (-2).

Отметим «+» клетки, в которых будет добавляться продукция,

и «-» - клетки, из которых будет удаляться некоторое количество груза (табл. 4.2). В цикл перераспределения, кроме выбранной свободной клетки (2,1), включаются заполненные клетки; каждый цикл имеет четное число вершин, для чего в каждой строке транспортной таблицы знаку «+» должен соответствовать знак «-»; аналогичное соотношение должно выполняться для каждого столбца транспортной таблицы.

В первом опорном плане «+» отмечены клетки (2,1) и (1,2), а «-» клетки (1,1) и (2,2). Для перераспределения из условия неотрицательности переменных выбираем минимальное значение из заполненных клеток, отмеченных «-», min(80; 50)=50.

<u>Второй опорный план</u>

Составляем второй опорный план: в клетку (2,1) записываем 50; в клетку (1,2) записываем 10+50=60; в клетку (1,1) записываем 80-50=30; клетка (2,2) освобождается. Цена цикла переноса равна (-2)*50=-100. Значение целевой функции равно: предыдущее плюс цена цикла переноса , т.е. F2=450+(-100)=350 (меньше предыдущего) (табл. 4.3).

Таблица 4.3. Потенциалы по заполненным клеткам 2-го опорного плана

	1	2	3	4	Ai	Ui
1	2 30	1 60	3	2	90	0
2	2 50	3	- 3 20	+ 1	70	0
3	3	3	+ 2 20	- 1 30	50	-1
Bi	80	60	40	30	350	
Vi	2	1	3	2		

Рассчитаем потенциалы по заполненным клеткам 2-го опорного плана:

для клетки(1,1) u(1)+v(1)=2; при u(1)=0; v(1)=2; для клетки (1,2) u(1)+v(2)=1; → v(2)=1;

для клетки (2,1) u(2)+v(1)=2; → u(2)=0; для клетки (2,3) u(2)+v(3)=3; → v(3)=3;

для клетки (3,3) u(3)+v(3)=2; → u(3)= -1; для клетки (3,4) u(3)+v(4)=1; → v(4)=2.

Результаты расчета оценок свободных клеток приведены в табл.4.4. Отрицательную оценку (-1) имеет клетка (2,4). Значит, полученный план неоптимальный, его необходимо преобразовать. План может быть улучшен за счет перераспределения груза в эту клетку.

Во втором опорном плане «+» отмечены клетки (2,4) и (3,3), а «-» клетки (2,3) и (3,4). Для перераспределения из условия неотрицательности переменных выбираем минимальное значение из заполненных клеток, отмеченных «-», min(20; 30)=20.

Таблица 4.4.

D13	0
D14	0
D22	2
D24	-1
D31	2
D32	3

Составляем третий опорный план: в клетку (2,4) записываем 20; в клетку (3,3) записываем 20+20=40; в клетку (3,4) записываем 30-20=10; клетка (2,3) освобождается. Цена цикла переноса равна (-1)*20=-20. Значение целевой функции равно: предыдущее плюс цена цикла переноса , т.е. F3=350+(-20)=330 (меньше предыдущего).

Третий опорный план – оптимальный

Рассчитаем потенциалы по заполненным клеткам 3-го опорного плана: для клетки(1,1) u(1)+v(1)=2; при u(1)=0; v(1)=2; для клетки (1,2) u(1)+v(2)=1; → v(2)=1; для клетки (2,1) u(2)+v(1)=2; → u(2)=0; для клетки (2,4) u(2)+v(4)=1; → v(4)=1; для клетки (3,4) u(3)+v(4)=1; → u(3)= 0; для клетки (3,3) u(3)+v(3)=2; → v(3)=2 (табл.4.5).

Таблица 4.5. Потенциалы по заполненным клеткам 3-го опорного плана

	1	2	3	4	Ai	Ui
1	2 30	1 60	3	2	90	0
2	2 50	3	3	1 20	70	0
3	3	3	2 40	1 10	50	0
Bi	80	60	40	30	330	
Vi	2	1	2	1		

Рассчитаем потенциалы по заполненным клеткам 3-го опорного плана: для клетки(1,1) u(1)+v(1)=2; при u(1)=0; v(1)=2; для клетки (1,2) u(1)+v(2)=1; → v(2)=1; для клетки (2,1) u(2)+v(1)=2; → u(2)=0; для клетки (2,4) u(2)+v(4)=1; → v(4)=1; для клетки (3,4) u(3)+v(4)=1; → u(3)= 0; для клетки (3,3) u(3)+v(3)=2; → v(3)= 2.

Таблица 4.6.

D13	1
D14	1
D22	2
D24	1
D31	1
D32	2

Для всех свободных клеток имеем положительные оценки – значит, полученный план оптимальный и единственный(табл.4.6).

4.6. МЕТОД ФОГЕЛЯ

Тот же план можно было получить, используя для составления первого опорного плана метод Фогеля, основанный на выборе минимальных стоимостей.

	1	2	3	4		штраф
1	2	1	3	2	90	1
2	2	3	3	1	70	1
3	3	3	2	1	50	1
	80	60	40	30		
штраф	0	2	1	0		
		макс				
		1.2	60			

1-й этап. Рассчитываются «штрафы» для всех строк и столбцов: разность между двумя наименьшими в строке или в столбце: для 1-й строки: 2-1=1; для 2-й строки: 2-1=1; для 3-й строки: 2-1=1; для 1-го столбца: 2-2=0; для 2-го столбца: 3-1=2; для 3-го столбца: 3-2=1; для 4-го столбца: 1-1=0; максимальный штраф по строкам и столбцам равен 2 — соответствует 2-му столбцу, в котором выбирается строка с минимальной стоимостью — строка 1- соответствует стоимости 1. В клетку (1,2) записываем груз, равный минимальному из (90; 60)=60, и вычеркиваем второй столбец.

	1	3	4		штраф
1	2	3	2	30	0
2	2	3	1	70	1
3	3	2	1	50	1
	80	40	30		
штраф	0	1	0		
		макс			
		3.3	40		

2-й этап. Рассчитываются «штрафы» для всех строк и столбцов: для 1-й строки: 2-2=0; для 2-й строки: 2-1=1; для 3-й строки: 2-1=1; для 1-го столбца: 2-2=0; для 3-го столбца: 3-2=1; для 4-го столбца: 1-1=0; максимальный штраф по строкам и столбцам равен 1. Из всех вариантов максимального штрафа, равного 1, выбирается тот, в котором строка с минимальной стоимостью соответствует наибольшему грузу: для строки 2 и стоимости 1 это (2,4), куда можно направить груз min(30;70)=30; для строки 3 и стоимости 1 это (3,4), куда можно направить груз min(30;50)=30; для столбца 3 и стоимости 2 это (3,3), куда можно направить груз min(40;50)=40. В клетку (3,3) записываем груз, равный минимальному из (40; 50)=40, и вычеркиваем третий столбец.

	1	4		штраф	
1	2	2	30	0	
2	2	1	70	1	
3	3	1	10	2	макс
	80	30			
штраф	0	0			
		3.4	10		

3-й этап. Рассчитываются «штрафы» для всех строк и столбцов: для 1-й строки: 2-2=0; для 2-й строки: 2-1=1; для 3-й строки: 3-1=2; для 1-го столбца: 2-2=0; для 4-го столбца: 1-1=0; максимальный штраф по строкам и столбцам равен 2 и соответствует строке 3, в которой выбирается столбец 4 с минимальной стоимостью 1 это (3,4), куда можно направить груз min(30;10)=10. В клетку (3,4) записываем груз, равный минимальному из (30; 10)=10, и вычеркиваем третью строку.

	1	4		штраф	
1	2	2	30	0	
2	2	1	70	1	макс
	80	30			
	0	0			
		2.4	20		

4-й этап. Рассчитываются «штрафы» для всех строк и столбцов:

для 1-й строки: 2-2=0; для 2-й строки: 2-1=1; для 1-го столбца: 2-2=0; для 4-го столбца: 2-1=1; максимальный штраф по строкам и столбцам равен 1 и соответствует строке 2, в которой выбирается столбец 4 с минимальной стоимостью 1 это (2,4), куда можно направить груз min(20;70)=20. В клетку (2,4) записываем груз, равный минимальному из (20;70)=20 и вычеркиваем четвертый столбец.

	1		
1	2	30	
2	2	50	
	80		
		1.1	30
		2.1	50

5-й этап. Оставшийся груз распределяем по клеткам: в (1,1) направляем груз , равный min(30;80)=30; в (2,1) направляем груз, равный min(50;80-30)=50. Получили приведенный ниже план, соответствующий полученному ранее оптимальному.

Опорный план по методу Фогеля (минимальных стоимостей) - оптимальный

	1	2	3	4	Ai	Ui
1	2 30	1 60	3	2	90	0
2	2 50	3	3	1 20	70	0
3	3	3	2 40	1 10	50	0
Bi	80	60	40	30	330	
Vi	2	1	2	1		

Библиографический список.

1. Лемешко Б.Ю. Теория игр и исследование операций: учебное пособие [Электронный ресурс].- Новосибирск: Изд-во НГТУ,2013. -167 с. - Режим доступа («Книгафонд»): http://www.knigafund.ru/books/185330;

2. Юрьева А.А. Математическое программирование: учебное пособие. [Гриф УМО].- 2-е изд. - СПб.:Изд-во «Лань», 2014.-432 с.

3. Гадельшина Г.А. Введение в теорию игр: учебное пособие [Электронный ресурс]. - Казань: Изд-во КНИТУ, 2014. -112 с. - Режим доступа («Книгафонд»): http://www.knigafund.ru/books/185757.

Н.Л. Леонова

ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

Редактор и корректор Н.П. Новикова
Техн. редактор Л.Я. Титова Темплан 2017 г., поз. 34

Подп. к печати 04.04.17. Формат 60х84/16. Бумага тип.№ 1.
Печать офсетная. 4,25 уч.-изд. л.; 4,25 усл. печ. л. Тираж 30 экз. Изд. № 34.
Цена «С». Заказ

Ризограф Высшей школы технологии и энергетики СПбГУПТД, 198095,
СПб., ул. Ивана Черных, 4.