

**Г.Ю. БУТКО, А.О. НИКИФОРОВ**

# **МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА**

**Учебное пособие**

**Санкт-Петербург**

**2018**

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»**

---

**ВЫСШАЯ ШКОЛА ТЕХНОЛОГИИ И ЭНЕРГЕТИКИ**

**Г.Ю. БУТКО, А.О. НИКИФОРОВ**

# **МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА**

**Учебное пособие**

**Санкт-Петербург**

**2018**

УДК 532 (075)

ББК 22.253я7

Б 932

**Бутко Г.Ю; Никифоров А.О.** Механика жидкости и газа: учебное пособие/ ВШТЭ СПбГУПТД. – СПб., 2018. – 100с.

В учебном пособии рассмотрены физические свойства жидкостей, влияние и взаимодействие сил, действующих в жидкости, гидростатика, кинематика и динамика, даны основы расчёта потерь давления по длине и на местные сопротивления, а также расчёт трубопроводов, основы теории подобия и вывод основных гидродинамических критериев.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям 15.03.02 «Технологические машины и оборудование», 18.03.01 «Химическая технология», 18.03.02 «Энерго- и ресурсосберегающие процессы в химической технологии, нефтехимии и биотехнологии», 13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника».

*Рецензенты:*

доктор технических наук, профессор СПбГТУ М. А. Яблокова;

доктор технических наук, профессор ВШТЭ СПбГУПТД

А. В. Александров

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом ВШТЭ СПбГУПТД в качестве учебного пособия.

© Бутко Г. Ю., Никифоров А. О., 2018

© Высшая школа технологии и энергетики,  
СПбГУПТД, 2018

## ВВЕДЕНИЕ

Механика жидкости и газа изучает законы равновесия и движения жидкостей и газов, являющиеся основой целого ряда специальных курсов и дисциплин. Трудно назвать какую-либо область инженерной деятельности, в которой не приходилось иметь дело с движением жидкостей или газов и, следовательно, не применять в той или иной мере законы механики жидкостей и газов.

Широко используются законы механики жидкостей и газов в технологическом оборудовании, строительно-дорожной технике, в горнодобывающей промышленности и летательных аппаратах.

Теоретические законы механики жидкости и газов базируются на основных принципах физики, которые устанавливают связь между действующими силами, скоростями движения и деформационными скоростями, выражающуюся обычно в форме сложных дифференциальных уравнений.

Совокупность теории, отражающей физическую сущность явления и данных опытов и практики, позволила глубоко разработать современные законы прикладной гидравлики.

Следует отметить, что законы равновесия и движения газов в тех случаях, когда в процессе изменения состояния не изменяется плотность газа, во многом тождественны законам, установленным для капельных жидкостей.

# 1. ЖИДКИЕ ТЕЛА, ИХ СВОЙСТВА И ОСОБЕННОСТИ

Рабочим телом в гидросистемах являются в основном различные сорта минеральных жидкостей, и реже – жидкости на основе органических и кремнийорганических соединений.

Основная функция жидкости – она является главным рабочим телом, носителем энергии.

Вспомогательная функция – смазка сопряжений, охлаждение, защита от коррозии, удаление продуктов износа.

Основными критериями оценки качества жидкости являются плотность, вязкостно-температурные свойства, химическая и физическая стабильность, межфазное натяжение.

## 1.1. Плотность жидкостей и газов и их зависимости

Плотность жидкости  $\rho$  – физическая величина, представляющая отношение массы жидкости к ее объему.

При равномерном распределении массы в указанном объеме  $V$  её плотность равна

$$\rho = \frac{m}{V},$$

где  $V$  – объем системы.

Удельный вес  $\gamma = \rho \cdot g$ , где  $g$  - ускорение свободного падения.

Большая плотность жидкости потребует больших затрат энергии на её транспортировку:

кинетическую энергию –  $E = \frac{m \cdot V^2}{2}$  делим на объем – получаем

$$\frac{E}{W} = \rho \frac{1}{2} \Delta V^2.$$

Малая плотность нецелесообразна, так как жидкость маловязка, а это приводит к большим утечкам в зазорах подвижных соединений.

Плотность жидкости зависит от температуры, так как с изменением  $T^\circ$  изменяется и объем  $W$ .

Эта зависимость характеризуется коэффициентом объемного расширения  $\alpha$ :

$$\alpha \rightarrow (1/\text{град}),$$

$$\alpha = \frac{\Delta W}{W_0 \Delta T};$$

$\Delta T = T - T_0$  – изменение температуры от  $T_0$  до  $T$ ,

$\Delta W = W - W_0$  – изменение объема.

$$\Delta W = \alpha \Delta T \cdot W; W = W_0 + \Delta T \cdot W_0.$$

Плотность жидкости при заданной  $T = T_0 + \Delta T$

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \alpha \Delta T}.$$

Для масла АМГ-10 в диапазоне давления  $0 \div 20$  МПа  $\alpha = 8 \cdot 10^{-4} 1/\text{град}$ . У других минеральных масел с более высокой вязкостью - коэффициент  $\alpha = 7 \cdot 10^{-4} 1/\text{град}$ .

Максимальное значение температурного коэффициента имеют синтетические масла  $\alpha = 9,52 \cdot 10^{-4} 1/\text{град}$ .

Плотность жидкостей вследствие её сжимаемости зависит от величины давления.

При изменении давления от 0 до 20 МПа плотность  $\rho$  меняется на 10 %.

Для газа имеют место другие соотношения.

Для газов распространенным показателем является удельный объем

$$W_y = \frac{1}{\rho}.$$

Для идеального газа

$$pW_y = RT,$$

где  $p$  – давление;

$R$  – газовая постоянная;

$T$  – температура.

$$R = 287,1 \left[ \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2 \times \text{С}^0} \right] = \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \times \text{К}} \right] - \text{для сухого воздуха.}$$

$$\frac{p}{\rho} = RT.$$

Таким образом, существует сложная связь между  $p, T$  и  $\rho$ .

При изотермическом процессе, т.е.  $T = const$ , имеет место следующая зависимость (рис. 1).

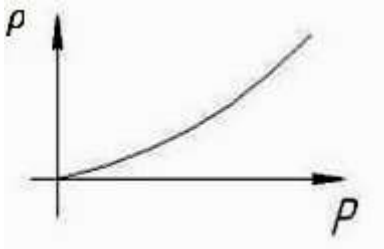


Рис. 1

$$pW_y = const$$

При адиабатическом процессе,

$$pW_y^{\kappa} = const,$$

$$\kappa = \frac{C_p}{C_v} - \text{показатель адиабаты, } \kappa = 1,4.$$

$C_p, C_v$  – удельные теплоемкости при постоянном давлении и постоянном объеме.

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{\rho_1} \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{\kappa}};$$

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{\rho_1} \left( \frac{T_1}{T_2} \right)^{\kappa}.$$

График выведен на рис. 2.

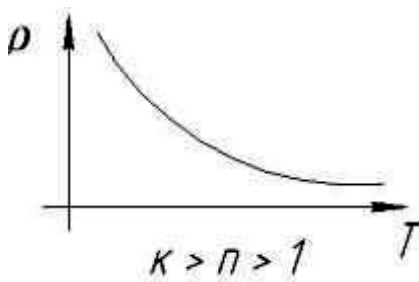


Рис. 2

Политропный процесс – средний между изотермическим и адиабатным процессами:

$$\frac{p}{\rho^n} = const.$$

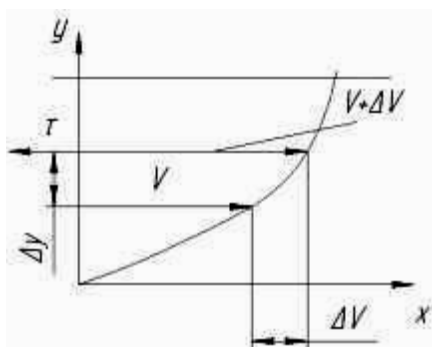
$$p_1^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\rho_1} = p_2^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\rho_2}.$$

## 1.2. Вязкость жидкостей. Ньютонские и неньютоновские жидкости

Вязкость – это свойство жидкости сопротивляться деформации сдвига ее слоев.

Механизм возникновения вязкости обусловлен тем, что при течении жидкости вдоль твердой стенки скорости ее слоев в результате торможения потока различны, вследствие чего между слоями возникает сила трения.

Согласно гипотезе Ньютона, касательные напряжения при трении пропорциональны градиенту скорости и динамической вязкости (рис.3).



$$\tau = +\mu \frac{dv}{dy},$$

где  $\mu$  – коэффициент пропорциональности или динамической вязкости – 1 Па·с(в СИ).

Рис. 3

В гидравлических расчётах применяется кинематическая вязкость, представляющая собой отношение динамической вязкости к плотности жидкости

$$v = \frac{\mu}{\rho} = \frac{\text{Па} \cdot \text{с}}{\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}} = \frac{\text{м}^2}{\text{с}}.$$

$$1 \text{ см}^2/\text{с} = 1 \text{ ст} = 100 \text{ сст} = 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}.$$

По стандарту РФ вязкость масла дается при температуре 50 °С. Также вязкость измеряется в градусах Энглера, Е°; ВУ.

Отношение времени  $t_{\text{ж}}$  истечения 200 см<sup>3</sup> масла ко времени  $t_{\text{в}}$  этого же объема дистиллированной воды через отверстие Ø2,9 мм при одинаковой температуре.

В США и Великобритании используются секунды Сейблера. Вязкость зависит от  $T$  и  $p$ .



С повышением  $T$  вязкость уменьшается (рис. 4).

С повышением давления  $p$  вязкость возрастает (рис. 5).

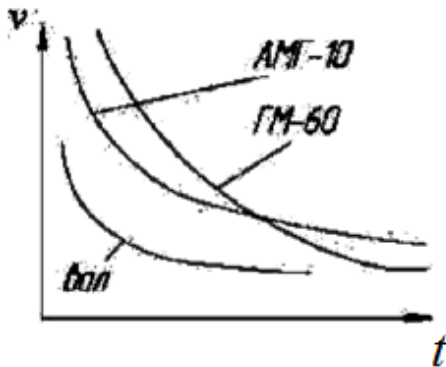


Рис. 4

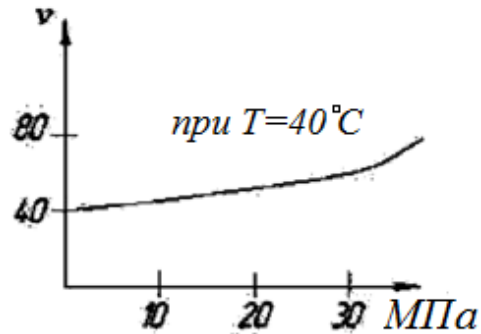


Рис. 5

При изменении давления  $p$  от 0 до 40÷50 МПа вязкость практически меняется линейно.

Зависимость вязкости от  $T^0$  — нежелательный фактор, поэтому:

- а) используют специальные присадки для стабилизации вязкости;
- б) ограничивают рабочий диапазон температур.

Так как вязкость незначительно меняется от давления  $p$ , то в дальнейшем эту зависимость учитывать не будем.

Что определяет вязкость жидкости в приводе?

- 1) несущую способность деталей машин, т. е. смазываемость;
- 2) демпфирующие свойства машин, т. е. поглощение энергии колебаний;
- 3) величину зазора или утечек.

Для газов также наблюдается зависимость вязкости от температуры  $T$  (рис. 6) и давления  $p$  (рис. 7).

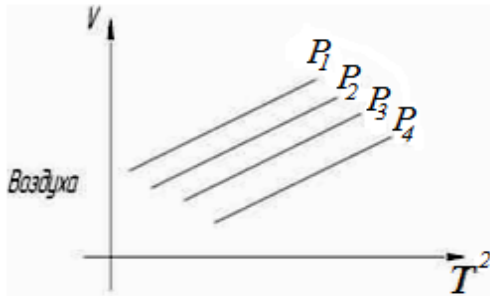


Рис. 6

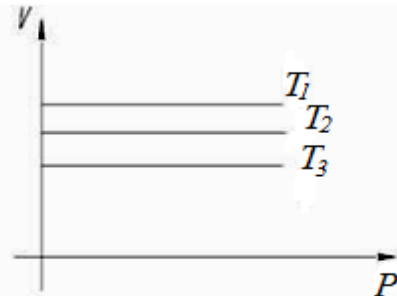


Рис. 7

Если от давления  $p$  вязкость  $\nu$  зависит незначительно, то от температуры  $T^0$  зависимость имеет уже выраженный характер.

### 1.3. Сжимаемость жидкостей и газов

Жидкости являются упругими телами и при некотором допущении подчиняются закону Гука.

Сжимаемость жидкости характеризуется коэффициентом относительного объемного сжатия

$$\beta = \frac{1}{\Delta p} \cdot \frac{\Delta W}{W},$$

где  $\Delta W$  – изменение объема  $W$ ;

$W$  – начальный объём;

$\Delta p$  – изменение давления  $p_1$  до  $p_2$ .

Величина, обратная  $\beta$ , называется объёмным модулем упругости жидкости при всестороннем сжатии:

$$E = \frac{1}{\beta} = W_0 \frac{\Delta p}{\Delta W}.$$

$E$  и  $\beta$  зависят от давления  $p$ , температуры  $T$  и не растворенного в жидкости воздуха.

Зависимость модуля упругости  $E$  от давления  $p$  можно представить в виде

$$E = E_0 + A \cdot P.$$

где  $A$  – зависит от типа жидкости и температуры: для турбулентного течения:  $A=12$ ; для АМГ-10  $A=12,75 (20^\circ) \div 10,6(80^\circ)$  (рис. 8).

При быстрых изменениях давления сжатие происходит адиабатически, т. е. без потерь тепла в окружающую среду.

Установив, что

$$E_a = W \frac{dp}{dW},$$

где  $E_a = \rho \cdot a^2$  – адиабатический модуль упругости;

$a$  – скорость распространения звука в жидкости,

получаем опытную зависимость  $E_a = f(\rho)$  (рис.8)

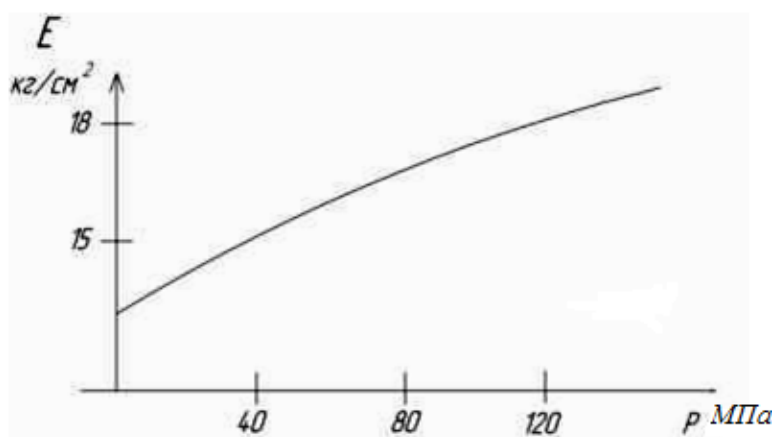


Рис. 8

С повышением температуры модуль упругости уменьшается (рис. 9).

Влияние нерастворенного воздуха. Так как модуль объемной упругости газа равен приблизительно абсолютному значению давления, поэтому он значительно влияет на модуль упругости:

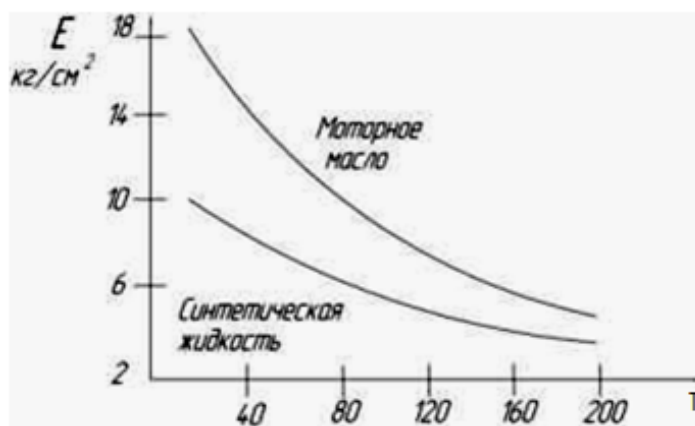


Рис. 9

$$\Delta W_g = W_g \frac{\Delta p}{p} \text{ – для воздуха при изотермическом процессе.}$$

Для жидкости:

$$\Delta W_{ж} = W_{ж} \frac{\Delta p}{E_{ж}},$$

$$\Delta W_c = \Delta W_{ж} + \Delta W_B = \left( \frac{W_{ж}}{E_{ж}} + \frac{W_B}{p} \right) \Delta p = \frac{W_{ж}}{E_{ж}} \Delta p \left( 1 + \frac{W_{ж}}{W_{ж}} \cdot \frac{E_{ж}}{p} \right),$$

где  $W_B = W_{об} \cdot \frac{p_0}{p}$ ;

$W_{об}$  – объём газа при давлении  $p_0$ .

$$E_c = \frac{W_{ж} + W_B}{\Delta W_{ж} + \Delta W_B} \Delta p;$$

$$E_c = E_{ж} \cdot \frac{1 + \frac{W_{об}}{W_{ж}} \cdot \frac{p_0}{p}}{1 + \frac{W_{об}}{W_{ж}} \cdot \frac{p_0}{p} \cdot E_{ж}}.$$

Что является следствием упругости жидкости?

1. Энергия, расходуемая на сжатие, не может быть использована для совершения полезной работы, поэтому понижается КПД.
2. В системах со значительной инерционной нагрузкой и большим трением покоя упругость жидкости приводит к прерывистому неравномерному движению и возможной потере устойчивости.

#### 1.4. Растворение и растворимость газов в жидкостях

Все жидкости обладают способностью растворять газы, которые в растворенном состоянии не оказывают существенного влияния на работу гидро-системы. Если давление в какой-либо точке объема жидкости уменьшается, газы выделяются из раствора в виде пузырьков, которые ухудшают механические свойства жидкости и понижают ее химическую стойкость.

Растворимость газа определяется коэффициентом растворимости:

$$K = \frac{W_r}{W_{ж}} \cdot \frac{p_1}{p_2},$$

где  $W_{ж}$  – объём жидкости;  $W_r$  – объём газа;

$p_1$  и  $p_2$  – начальное и конечное давление газа, находящегося в контакте с жидкостью.

Для минеральных масел плотностью  $\rho = (800 \div 900) \text{ кг/м}^3$ ;

$K = 0,08 \div 0,1$ .

Растворимость кислорода в жидкости выше, чем атмосферного воздуха, что интенсифицирует окисление жидкости и способствует разрушению резиновых деталей гидросистем.

Присутствие газа, выделившегося из жидкости во всасывающей магистрали насоса, уменьшает её подачу и ухудшает режим работы насоса.

### **1.5. Устойчивость во времени вязких жидкостей**

Для работы гидросистем необходимо, чтобы жидкости сохраняли свои физические и химические свойства во время эксплуатации и хранения.

Под стабильностью характеристик жидкостей понимается стабильность их физических и химических свойств.

Основной причиной нарушения физической стабильности является нарушение ее молекулярной структуры при длительной работе в условиях высоких давлений. В результате этого происходит изменение молекулярной структуры жидкости, сопровождающееся понижением ее вязкости, а также ухудшением её смазывающих свойств.

В эксплуатации не допускается снижение вязкости более чем на 20 % от первоначального значения.

Химическая стабильность зависит от химического состава и строения составляющих ее компонентов. В результате окисления жидкостей и, в особенности, минеральных масел, происходит выпадение из них отложений в виде смол, а также понижение вязкости, сопровождающееся потерей смазывающих качеств.

Интенсивность окисления в значительной мере зависит от температуры на поверхности контакта жидкости с воздухом, например, при повышении температуры на  $8 \div 10$  °С интенсивность окисления минерального масла практически удваивается.

## 1.6. Теплопроводящие и теплоемкие свойства жидкостей

Для поглощения и эвакуации из гидросистемы теплоты, выделяющейся при работе, необходимо, чтобы рабочие жидкости обладали определенными значениями удельной теплоемкости и теплопроводности.

Теплопроводность жидкости характеризуется количеством теплоты, которая проходит в единицу времени через единицу площади слоя жидкости толщиной в единицу длины.

$$\text{Размерность } \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}^2} \frac{\text{ккал}}{\text{м}\cdot\text{ч}\cdot^\circ\text{C}^2} \frac{\text{кал}}{\text{см}\cdot\text{с}\cdot^\circ\text{C}}.$$

Для большинства нефтепродуктов теплопроводность равна примерно  $(4,0 \div 4,8) \cdot 10^{-4} \frac{\text{кал}}{\text{см}\cdot\text{с}\cdot^\circ\text{C}}$ .

Удельная теплоемкость рабочих жидкостей, под которой понимается количество теплоты, необходимое для нагревания единицы массы на  $1^\circ\text{C}$ , определяет интенсивность повышения температуры в гидросистеме.

Для распространенных рабочих жидкостей минерального происхождения удельная теплоемкость в интервале температур  $0 \div 100^\circ\text{C}$  в среднем равна  $0,45 \frac{\text{ккал}}{\text{кг}\cdot^\circ\text{C}}$ .

## 1.7. Кавитационные явления в жидкостях

При понижении давления в какой-либо точке потока жидкость вскипает, выделившиеся при этом пузырьки газа и пара увлекаются потоком и переносятся в область более высокого давления, в которой паровые пузырьки конденсируются, а газовые сжимаются. Так как процесс конденсации паровых и сжатия газовых пузырьков происходит мгновенно, частицы жидкости перемещаются к их центрам с большой скоростью (до нескольких сотен метров в секунду), получают местные гидравлические микроудары. Это сопровождается повышением давления и температуры в центрах пузырьков (до  $1000 - 1500^\circ\text{C}$ ).

Если процессы кавитации протекают вблизи стенок ограждающих каналов, то последние будут подвергаться непрерывным тепловым и гидравлическим ударам, которые вызывают местные разрушения стенок.

Разрушительному воздействию кавитации подвергаются насосы, золотники, клапаны и прочие гидроагрегаты. С появлением кавитации в насосах понижается их подача, а также наблюдаются высокочастотные колебания давления в нагнетательной линии насоса и ударные нагрузки на детали.

### **1.8. Межфазное и поверхностное натяжение в жидкостях**

Жидкость является агрегатным состоянием вещества, промежуточным между газообразным и твердым, поэтому она обладает свойствами как газообразных, так и твердых веществ. Жидкости, подобно твердым телам, обладают определенным объемом, а подобно газам, принимают форму сосуда, в котором они находятся. Молекулы газа практически не связаны между собой силами межмолекулярного взаимодействия, и в данном случае средняя энергия теплового движения молекул газа гораздо больше средней потенциальной энергии, обусловленной силами притяжения между ними, поэтому молекулы газа разлетаются в разные стороны, и газ занимает предоставленный ему объем. В твердых и жидких телах силы притяжения между молекулами уже существенны и удерживают молекулы на определенном расстоянии друг от друга. В этом случае средняя энергия хаотического (теплового) движения молекул меньше средней потенциальной энергии, обусловленной силами межмолекулярного взаимодействия, и ее недостаточно для преодоления сил притяжения между молекулами, поэтому твердые тела и жидкости имеют определенный объем.

Рентгеноструктурный анализ жидкостей показал, что характер расположения частиц жидкости промежуточен между газом и твердым телом. В газах молекулы движутся хаотично, поэтому нет никакой закономерности в их взаимном расположении. Для твердых тел наблюдается так называемый дальний порядок в расположении частиц, т. е. их упорядоченное расположе-

ние, повторяющееся на больших расстояниях. В жидкостях имеет место так называемый ближний порядок в расположении частиц, т. е. их упорядоченное расположение, повторяющееся на расстояниях, сравнимых с межатомными.

Теория жидкости до настоящего времени полностью не развита. Разработка ряда проблем в исследовании сложных свойств жидкости принадлежит Я. И. Френкелю (1894–1952). Тепловое движение в жидкости он объяснял тем, что каждая молекула в течение некоторого времени колеблется около определенного положения равновесия, после чего скачком переходит в новое положение, отстоящее от исходного на расстояние порядка межатомного. Таким образом, молекулы жидкости довольно медленно перемещаются по всей массе жидкости, и диффузия происходит гораздо медленнее, чем в газах. С повышением температуры жидкости частота колебательного движения резко увеличивается, возрастает подвижность молекул, что, в свою очередь, является причиной уменьшения вязкости жидкости.

На каждую молекулу жидкости со стороны окружающих молекул действуют силы притяжения, быстро убывающие с расстоянием; следовательно, начиная с некоторого минимального расстояния силами притяжения между молекулами можно пренебречь. Это расстояние (порядка  $10^{-9}$  м) называется радиусом молекулярного действия  $r$ , а сфера радиуса  $r$  – сферой молекулярного действия.

Выделим внутри жидкости какую-либо молекулу А (рис. 10) и проведем вокруг нее сферу радиуса  $r$ . Достаточно, согласно определению, учесть действие на данную молекулу только тех молекул, которые находятся внутри сферы молекулярного действия. Силы, с которыми эти молекулы действуют на молекулу А, направлены в разные стороны и в среднем скомпенсированы, поэтому результирующая сила, действующая на молекулу внутри жидкости со стороны других молекул, равна нулю. Иначе обстоит дело, если молекула, например, молекула В, расположена от поверхности на расстоянии, меньшем  $r$ . В данном случае сфера молекулярного действия лишь частично располо-



жена внутри жидкости. Так как концентрация молекул в расположенном над жидкостью газе мала по сравнению с их концентрацией в жидкости, то равнодействующая сил  $F$ , приложенных к каждой молекуле поверхностного слоя, не равна нулю и направлена внутрь жидкости (см. рис. 10). Таким образом, результирующие силы всех молекул поверхностного слоя оказывают на жидкость давление, называемое молекулярным (или внутренним). Молекулярное давление не действует на тело, помещенное в жидкость, так как оно обусловлено силами, действующими только между молекулами самой жидкости.

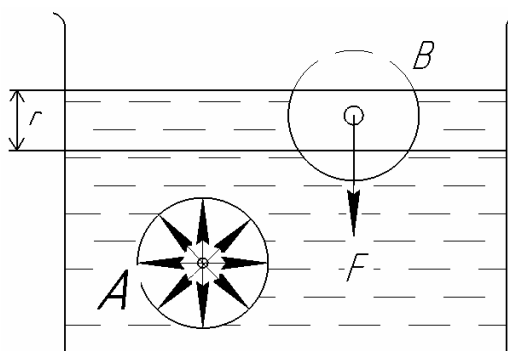


Рис.10

Суммарная энергия частиц жидкости складывается из энергии их хаотического (теплового) движения и потенциальной энергии, обусловленной силами межмолекулярного взаимодействия. Для перемещения молекулы из глубины жидкости в поверхностный слой надо затратить работу. Эта работа совершается за счет кинетической энергии молекул и идет на увеличение их потенциальной энергии. Поэтому молекулы поверхностного слоя жидкости обладают большей потенциальной энергией, чем молекулы внутри жидкости. Эта дополнительная энергия, которой обладают молекулы в поверхностном слое жидкости, называемая поверхностной энергией, пропорциональна площади слоя  $S$ :

$$\Delta E = \sigma \Delta S,$$

где  $\sigma$  — поверхностное натяжение.

Так как равновесное состояние характеризуется минимумом потенциальной энергии, то жидкость при отсутствии внешних сил будет принимать

такую форму, чтобы при заданном объеме она имела минимальную поверхность, т. е. форму шара. Наблюдая мельчайшие капельки, взвешенные в воздухе, можем видеть, что они действительно имеют форму шариков, но несколько искаженную из-за действия сил земного тяготения. В условиях невесомости капля любой жидкости (независимо от ее размеров) имеет сферическую форму, что доказано экспериментально на космических кораблях.

Итак, условием устойчивого равновесия жидкости является минимум поверхностной энергии. Это означает, что жидкость при заданном объеме должна иметь наименьшую площадь поверхности, т. е. жидкость стремится сократить площадь свободной поверхности. В этом случае поверхностный слой жидкости можно уподобить растянутой упругой пленке, в которой действуют силы натяжения.

Рассмотрим поверхность жидкости (рис. 11), ограниченную замкнутым контуром. Под действием сил поверхностного натяжения (направлены по касательной к поверхности жидкости и перпендикулярно участку контура, на который они действуют), поверхность жидкости сократилась, и рассматриваемый контур переместился в положение, отмеченное светло-серым цветом. Силы, действующие со стороны выделенного участка на граничащие с ним участки, совершают работу

$$\Delta A = f \Delta l \Delta x,$$

где  $f$  – сила поверхностного натяжения, действующая на единицу длины контура поверхности жидкости.

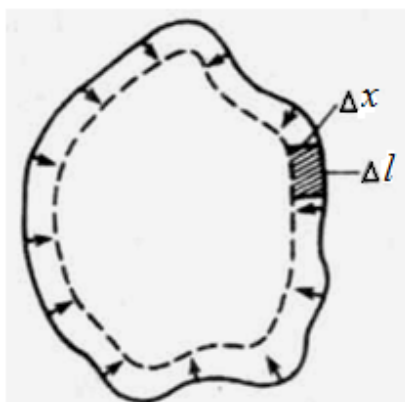


Рис. 11

На рис. 11 видно, что  $\frac{\Delta l}{\Delta x} = \Delta S$ , т.е.

$$\Delta A = f \Delta S.$$

Эта работа совершается за счет уменьшения поверхностной энергии, т. е.

$$\Delta A = \Delta E.$$

Из сравнения выражений можно заключить, что

$$\sigma = f.$$

То есть, поверхностное натяжение  $\sigma$  равно силе поверхностного натяжения, приходящейся на единицу длины контура, ограничивающего поверхность. Единица поверхностного натяжения – ньютон на метр (Н/м) или джоуль на квадратный метр (Дж/м<sup>2</sup>). Большинство жидкостей при температуре 300 К имеет поверхностное натяжение порядка  $10^{-2}$ – $10^{-1}$  Н/м. Поверхностное натяжение с повышением температуры уменьшается, так как увеличиваются средние расстояния между молекулами жидкости.

Поверхностное натяжение существенным образом зависит от примесей, имеющих в жидкостях. Вещества, ослабляющие поверхностное натяжение жидкости, называют поверхностно-активными. Наиболее известным поверхностно-активным веществом по отношению к воде является мыло. Оно сильно уменьшает ее поверхностное натяжение (примерно с  $7,5 \cdot 10^{-2}$  до  $4,5 \cdot 10^{-2}$  Н/м). Поверхностно-активными веществами, понижающими поверхностное натяжение воды, являются также спирты, эфиры, нефть и др.

Существуют вещества (сахар, соль), которые увеличивают поверхностное натяжение жидкости благодаря тому, что их молекулы взаимодействуют с молекулами жидкости сильнее, чем молекулы жидкости между собой. Например, если посолить мыльный раствор, то в поверхностный слой жидкости выталкивается молекул мыла больше, чем в пресной воде. В мыловаренной технике мыло «высаливается» этим способом из раствора.

Из практики известно, что капля воды растекается на стекле и принимает форму, изображенную на рис. 12, в то время как ртуть на той же поверхности превращается в несколько сплюснутую каплю (рис. 13). В первом

случае говорят, что жидкость смачивает твердую поверхность, во втором – не смачивает ее. Смачивание зависит от характера сил, действующих между молекулами поверхностных слоев соприкасающихся сред. Для смачивающей жидкости силы притяжения между молекулами жидкости и твердого тела больше, чем между молекулами самой жидкости, и жидкость стремится увеличить поверхность соприкосновения с твердым телом. Для несмачивающей жидкости силы притяжения между молекулами жидкости и твердого тела меньше, чем между молекулами жидкости, и жидкость стремится уменьшить поверхность своего соприкосновения с твердым телом.

К линии соприкосновения трех сред (точка  $O$  есть ее пересечение с плоскостью чертежа) приложены три силы поверхностного натяжения, которые направлены по касательной внутрь поверхности соприкосновения соответствующих двух сред (см. рис. 12 и 13). Эти силы, отнесенные к единице длины линии соприкосновения, равны соответствующим поверхностным натяжениям  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{23}$ . Угол  $\theta$  между касательными к поверхности жидкости и твердого тела называется краевым углом. Условием равновесия капли является равенство нулю суммы проекций сил поверхностного натяжения на направление касательной к поверхности твердого тела, т. е.

$$-\sigma_{12} + \sigma_{13} + \sigma_{23} \cos \theta = 0,$$

откуда

$$\cos \theta = \left( \frac{\sigma_{13} - \sigma_{12}}{\sigma_{23}} \right).$$

Из условия вытекает, что краевой угол может быть острым или тупым в зависимости от значений  $\sigma_{13}$  и  $\sigma_{12}$ . Если  $\sigma_{13} > \sigma_{12}$ , то  $\cos \theta > 0$  и угол  $\theta$  – острый, т. е. жидкость смачивает твердую поверхность. Если  $\sigma_{13} < \sigma_{12}$ , то  $\cos \theta < 0$  и угол  $\theta$  – тупой, т. е. жидкость не смачивает твердую поверхность.

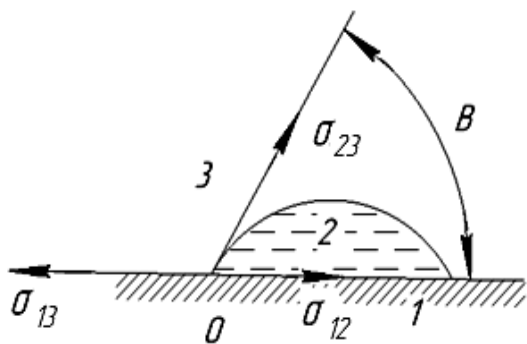


Рис.12

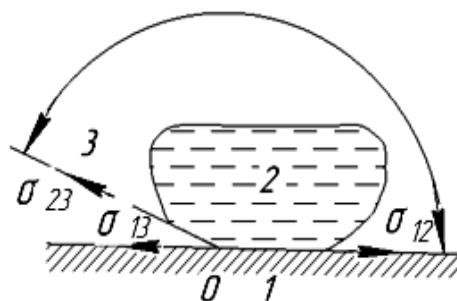


Рис.13

Краевой угол удовлетворяет условию, если

$$\frac{|\sigma_{13} - \sigma_{12}|}{\sigma_{23}} \leq 1.$$

Если условие не выполняется, то капля жидкости ни при каких значениях  $\theta$  не может находиться в равновесии. Если  $\sigma_{13} > \sigma_{12} + \sigma_{23}$ , то жидкость растекается по поверхности твердого тела, покрывая его тонкой пленкой (например, керосин на поверхности стекла), – имеет место полное смачивание (в данном случае  $\theta = 0$ ). Если  $\sigma_{12} > \sigma_{13} + \sigma_{23}$ , то жидкость стягивается в шаровую каплю, в пределе имея с ней лишь одну точку соприкосновения (например, капля воды на поверхности парафина), – имеет место полное несмачивание (в данном случае  $\theta = \pi$ ).

Смачивание и несмачивание являются понятиями относительными, т.е. жидкость, смачивающая одну твердую поверхность, не смачивает другую. Например, вода смачивает стекло, но не смачивает парафин; ртуть не смачивает стекло, но смачивает чистые поверхности металлов.

Явления смачивания и несмачивания имеют большое значение в технике. Например, в методе флотационного обогащения руды (отделение руды от пустой породы) ее, мелко раздробленную, взбалтывают в жидкости, смачивающей пустую породу и не смачивающей руду. Через эту смесь продувается воздух, а затем она отстаивается. При этом смоченные жидкостью частицы породы опускаются на дно, а крупинки минералов «прилипают» к пузырькам воздуха и всплывают на поверхность жидкости. При механической обработке

металлов их смачивают специальными жидкостями, что облегчает и ускоряет обработку.

### 1.9. Давление под непрямой поверхностью жидкости

Если поверхность жидкости не плоская, а искривленная, то она оказывает на жидкость избыточное (добавочное) давление. Это давление, обусловленное силами поверхностного натяжения, для выпуклой поверхности положительно, а для вогнутой поверхности – отрицательно.

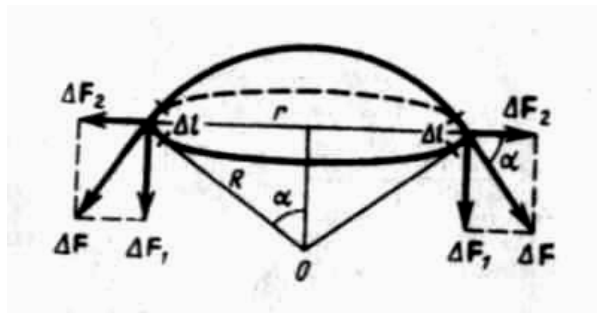


Рис.14

Для расчета избыточного давления предположим, что свободная поверхность жидкости имеет форму сферы радиуса  $R$ , от которой мысленно отсечен шаровой сегмент, опирающийся на окружность радиуса

$$r = R \sin \alpha \text{ (рис. 14).}$$

На каждый бесконечно малый элемент длины  $l$  этого контура действует сила поверхностного натяжения  $\Delta F = \sigma \Delta l$ , касательная к поверхности сферы. Разложив  $\Delta F$  на два компонента ( $\Delta F_1$  и  $\Delta F_2$ ), видим, что геометрическая сумма сил  $\Delta F$  равна нулю, так как эти силы на противоположных сторонах контура направлены в разные стороны и взаимно уравновешиваются. Поэтому равнодействующая сил поверхностного натяжения, действующих на вырезанный сегмент, направлена перпендикулярно плоскости сечений внутрь жидкости и равна алгебраической сумме составляющих  $\Delta F_1$ :

$$F = \sum \Delta F_1 = \sum \Delta F \sin \alpha = \sum \sigma \Delta l \frac{r}{R} = \frac{\sigma r}{R} \sum \Delta l = \frac{\sigma r}{R} 2\pi r.$$

Разделив эту силу на площадь основания сегмента  $\pi r^2$ , вычислим избыточное давление на жидкость, создаваемое силами поверхностного натяжения и обусловленное кривизной поверхности:

$$\Delta p = \frac{F}{s} = \frac{2\sigma\pi r^2}{R\pi r^2} = \frac{2\sigma}{R}.$$

Если поверхность жидкости вогнутая, то можно доказать, что результирующая сила поверхностного натяжения направлена из жидкости и равна

$$\Delta p = -\frac{2\sigma}{R}.$$

Следовательно, давление внутри жидкости под вогнутой поверхностью меньше, чем в газе, на величину  $\rho$ .

Формулы являются частным случаем формулы Лапласа, определяющей избыточное давление для произвольной поверхности жидкости двойкой кривизны:

$$\Delta p = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где  $R_1$  и  $R_2$  – радиусы кривизны двух любых взаимно перпендикулярных нормальных сечений поверхности жидкости в данной точке. Радиус кривизны положителен, если центр кривизны соответствующего сечения находится внутри жидкости, и отрицателен, если центр кривизны находится вне жидкости.

Для сферической искривленной поверхности ( $R_1=R_2 = R$ ) выражение переходит – для цилиндрической ( $R_1 = R$  и  $R_2 = \infty$ ) – избыточное давление

$$\Delta p = \sigma \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{\infty} \right) = \frac{\sigma}{R}.$$

В случае плоской поверхности ( $R_1 = R_2 = \infty$ ) силы поверхностного натяжения избыточного давления не создают.

В табл. 1 приведены значения  $\sigma$  для некоторых жидкостей.

Таблица 1

Поверхностное натяжение жидкостей (при 20 °С)

Вещество	Поверхностное натяжение, $\sigma \cdot 10^3 \frac{Н}{м}$	Вещество	Поверхностное натяжение, $\sigma \cdot 10^3 \frac{Н}{м}$
Азотная кислота 70%	59,4	Нефть	26
Анилин	42,9	Нитробензол	43,9
Ацетон	23,7	Серная кислота 85%	57,4
Бензол	29,0	Спирт метиловый	22,6
Вода	72,8	Спирт пропиловый	23,8
Глицерин	59,4	Спирт этиловый	223,8
Керосин	28,9(0 °С)	Толуол	28,5
Масло касторовое	36,4 (18 °С)	Уксусная кислота	27,8
Масло оливковое	33,8 (18 °С)	Эфир этиловый	16,9

В табл. 2 приведены значения  $\sigma$  для некоторых металлов в жидком состоянии.

Таблица 2

Поверхностное натяжение металлов при различных температурах.

Металл	Температура, °С	Поверхностное натяжение, $\sigma \cdot 10^3 \frac{Н}{м}$
Алюминий	750	520
Висмут	300	376
	400	370
	500	363
Калий (в атм. CO <sub>2</sub> )	64	410
Натрий	100	206,4
	250	199,5



В табл. 3 показана зависимость  $\sigma$  для воды и этилового спирта от температуры.

Таблица 3

Поверхностное натяжение воды и этилового спирта

при различных температурах,  $\sigma \cdot 10^3 \frac{H}{M}$

Вещество	Температура, °C	Поверхностное натяжение	Вещество	Температура, °C	Поверхностное натяжение
Вода	0	75,6	Спирт этиловый	0	24,4
	30	71,18		30	21,9
	60	66,18		60	19,2
	90	60,75		90	16,4
	120	54,9		120	13,4
	150	48,63		150	10,1
	180	42,25		180	6,7
	210	35,4		210	3,3
	240	28,57		240	0,1
	300	14,40		300	-
370	0,47	370	-		

### 1.10. Капиллярные процессы

Если поместить узкую трубку (капилляр) одним концом в жидкость, налитую в широкий сосуд, то вследствие смачивания или несмачивания жидкостью стенок капилляра кривизна поверхности жидкости в капилляре становится значительной. Если жидкость смачивает материал трубки, то внутри ее поверхность жидкости – мениск – имеет вогнутую форму, если не смачивает – выпуклую (рис. 15).

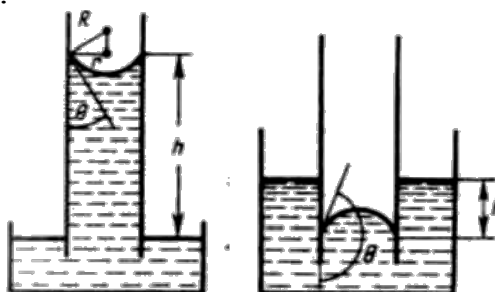


Рис. 15

Под вогнутой поверхностью жидкости появится отрицательное избыточное давление, определяемое по формуле  $\Delta p = -\frac{2\sigma}{R}$ . Наличие этого давления приводит к тому, что жидкость в капилляре поднимается, так как под плоской поверхностью жидкости в широком сосуде избыточного давления нет. Если жидкость не смачивает стенки капилляра, то положительное избыточное давление приведет к опусканию жидкости в капилляре. Явление изменения высоты уровня жидкости в капиллярах называется капиллярностью. Жидкость в капилляре поднимается или опускается на такую высоту  $h$ , при которой давление столба жидкости (гидростатическое давление)  $\rho gh$  уравновешивается избыточным давлением  $\rho$ , т. е.

$$\frac{2\sigma}{R} = \rho gh,$$

где  $\rho$  – плотность жидкости;  $g$  – ускорение свободного падения.

Если  $r$  – радиус капилляра,  $\theta$  – краевой угол, то из рис. 15 следует, что

$$\frac{(2\sigma \cos\theta)}{h} = \rho gh,$$

откуда

$$h = \frac{(2\sigma \cos\theta)}{(\rho gh)}.$$

В соответствии с тем, что смачивающая жидкость по капилляру поднимается, а несмачивающая – опускается, из формулы ( $\cos\theta > 0$ ) при  $\theta < \frac{\pi}{2}$  получим положительные значения  $h$ , а при  $\theta > \frac{\pi}{2}$  ( $\cos\theta < 0$ ) – отрицательные. Из выражения следует также, что высота поднятия (опускания) жидкости в капилляре обратно пропорциональна его радиусу. В тонких капиллярах жидкость поднимается достаточно высоко. Так, при полном смачивании ( $\theta = 0$ ) вода ( $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $\sigma = 0,073 \text{ Н/м}$ ) в капилляре диаметром 10 мкм поднимается на высоту  $h \approx 3 \text{ м}$ .

Капиллярные явления играют большую роль в природе и технике. Например, влагообмен в почве и в растениях осуществляется за счет поднятия

воды по тончайшим капиллярам. На капиллярности основано действие фитилей, впитывание влаги бетоном и т.д.

Дополнительные свойства жидкости:

1. Пенообразование.
2. Давление насыщенных паров.
3. Токсичность.
4. Облитерация – способность заращивать рабочие каналы.
5. Температура вспышки.

### **1.11. Жидкости, используемые в гидромеханике**

Издавна жидкостью, применяемой в гидросистемах, была вода.

Недостатки:

- 1) низкая вязкость;
- 2) коррозия деталей гидросистем;
- 3) трудность обеспечения герметичности.

Положительным является то, что вода имеет малую сжимаемость. Вода сейчас используется в гидродинамике, но ее используют в смеси, например, в горном деле – водомасляную эмульсию – в целях пожаробезопасности.

В гидроприводах станков используются минеральные масла:

Индустриальные ИГП-18, ИГП-30, ИГП-38, ИГП-49; турбинные Т<sub>22</sub>, Т<sub>30</sub>, Т<sub>46</sub>; АМГ-10, АМГ-30; МГ-20, МГ-40.

Получили распространение синтетические жидкости, в случаях, когда требуется работа при повышенных температурах.

При более высоких температурах ( $T \approx 700$  °С) используются жидкие металлы. Это эвтектический сплав натрия 77 % и калия 23 % ( $E = 52500$  кг/см<sup>2</sup>).

К маслам предъявляются следующие требования:

1. Продолжительность работы до замены без ухудшения свойств 12 месяцев.
2. Антикислотная стабильность при хранении и работе.
3. Высокая смазывающая способность.

4. Высокая противопенная стойкость.

5. Отсутствие загрязняющих частиц.

**Кислотное число** для жидкости  $A$  – это содержание КОН в объеме жидкости 1 г КОН на 1 л жидкости:

$A = (0,4 \div 1,5)$  – нормальная;

$A = (1,5 \div 3)$  – слабокислая;

$A = (6 \div 8)$  – агрессивная, ее надо менять.

Индекс масла  $i = \frac{v_{20}}{v_{50}}$ , чем он меньше – тем лучше.

**Классы чистоты** жидкости:

Различают 18 классов чистоты: от 0 до 17.

Если требования 12÷17 классов, то очистка не применяется.

Если 7÷12 классов – грубая очистка 100 % и 10 % тонкой очистки.

Если 0÷6 классов – 100%-я тонкая очистка.

Класс чистоты определяется величиной твердых частиц и их количеством в определенном объеме.

Например: 7 класс – 2000 частиц, размер 5 ÷ 10 мкм в 100 см<sup>3</sup>; 12 класс – таких же частиц в том же объеме – 63000 частиц.

## 2. ХАРАКТЕРИСТИКА СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ В ЖИДКОСТЯХ

В гидравлике жидкость рассматривается, как непрерывная среда без пустот и промежутков (однофазная среда).

Вследствие текучести жидкости в ней нет сосредоточенных сил, т. е. сил, которые могли бы действовать в отдельных точках жидкости.

На жидкость действуют силы, непрерывно распределенные по объему (массе) и по поверхности. Их называют массовые и поверхностные силы.

*Массовые силы* пропорциональны массе, к ним относятся силы тяжести и силы инерции.

В гидромеханике пользуются понятием единичной массовой силы – это сила, отнесенная к массе (рис. 16).

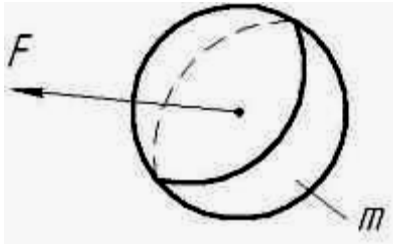


Рис. 16

Единичная массовая сила –  $R$ ,  $R = \frac{F}{m} \left[ \frac{M}{c^2} \right]$ . Обычно  $R$  рассматривается в проекциях на декартовы координаты  $R \rightarrow X, Y, Z \left[ \frac{M}{c^2} \right]$ .

*Пример.*

Покоящаяся жидкость в сосуде (рис. 17)

$$X = 0; Y = 0.$$

$$Z = -g = -\frac{G}{m}.$$

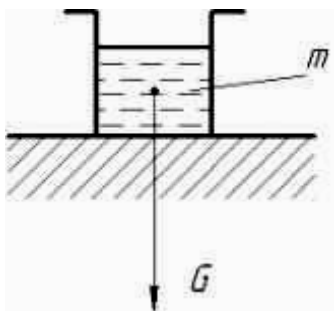


Рис. 17

*Поверхностные силы* – это силы, непрерывно распределенные на поверхности, пропорциональны этой поверхности.

Эти силы обусловлены непосредственным воздействием соседних объемов жидкости на данный объем или объемов газа или твердого тела, контактирующих с данным объектом.

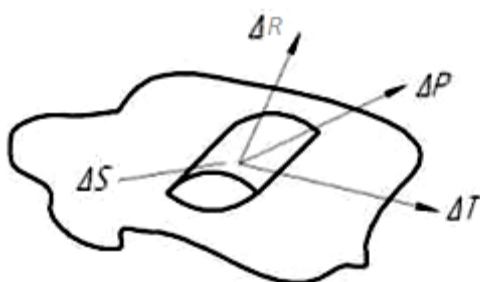


Рис. 18

Если на поверхности жидкости определить площадку  $\Delta S$ , то равнодействующую  $\Delta R$  можно разложить на касательную и нормальную.

Сила  $\Delta P$  – нормальная составляющая, она называется силой давления.

Сила  $\Delta T$  – касательная составляющая – называется силой трения.

Эти силы относятся к поверхности.

Единичная поверхностная сила называется напряжением поверхности.

Нормальное напряжение  $\Delta P$ , т.е. напряжение от силы давления, называется гидродинамическим (в нашем случае гидростатическим) давлением.

$$p = \frac{\Delta P}{\Delta S} \text{ — при равномерном распределении.}$$

$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta S} \text{ — при неравномерном распределении.}$$

В гидромеханике существуют понятия абсолютного, атмосферного и избыточного давлений:

$$p_{абс} = p_{атм} + p_{избыт} ,$$

$$p = \frac{\Delta P}{\Delta S} = \left[ \frac{Н}{м^2} \right] = [Па],$$

$$\text{а раньше } 1_{атм} = \frac{кг}{см^2} = 0.1 \text{ МПа} = 10^5 \left[ \frac{Н}{м^2} \right].$$

Аналогично определяют касательные напряжения

$$\tau = \frac{\Delta T}{\Delta S}; \quad \tau = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta S}.$$

### 3. ПОКОЯЩИЕСЯ ЖИДКОСТИ. ГИДРОСТАТИКА

Гидростатика рассматривает покоящееся состояние жидкости.

Различают два вида покоя:

- 1) абсолютно покоящаяся жидкость;
- 2) относительно покоящаяся жидкость.

Абсолютно покоящаяся жидкость – это такое состояние, когда частицы жидкости относительно друг друга не перемещаются и весь объем тоже неподвижен.

Относительный покой – это когда частицы друг относительно друга не движутся, а весь объем перемещается в пространстве (рис.19).

Уровень жидкости при ускоренном линейном движении показан на рис. 19.

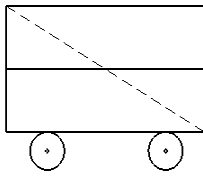


Рис. 19

Поверхности, на которых устанавливается одинаковое давление, называются поверхностями уровня.

В покоящейся жидкости нет других напряжений, кроме напряжений сжатия.

Она обладает двумя свойствами:

1. На внешней поверхности жидкости гидростатическое давление всегда направлено по нормали внутрь рассматриваемого объема.

**Доказательство.** Если это давление не нормально, тогда должно быть касательное напряжение. Это значит, что жидкость выведется из покоя.

Это противоречит определению покоящейся жидкости.

2. В любой точке внутри жидкости гидростатическое давление одинаково, т. е. давление не зависит от угла наклона площадки на которую действует сила в данной точке  $x$ .

**Доказательство.** Под внешней поверхностью понимается не только поверхность раздела жидкости с воздухом, но и поверхности с элементарным объемом, мысленно выделенным в жидкости.

Пусть действует массовая сила  $R \rightarrow X, Y, Z$  (рис. 20).

Запишем проекции на ось  $OX$  силы давления  $P_x \cdot \frac{1}{2} dydz$ ;

$$P_n \cdot dS \cos(x, n); \text{ — нормаль к } dS,$$

$$X\rho \frac{1}{6} dx dy dz.$$

Запишем уравнение сил

$$P_x \cdot \frac{1}{2} dydz - P_n \cdot dS \cos(x, n) + X\rho \frac{1}{6} dx dy dz = 0.$$

Если учесть, что  $dS \cos(x, n) = \frac{1}{2} dydz$  и поделить всё на  $\frac{1}{2} dydz$ , полу-

чим  $P_x - P_n + X\rho \frac{1}{3} dx = 0$ .

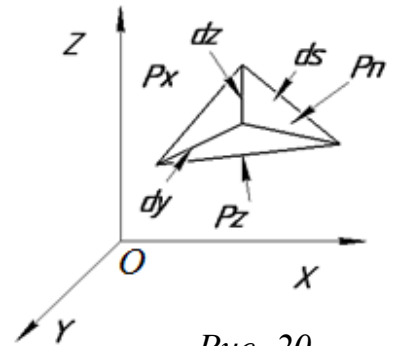


Рис. 20

Если от рассматриваемого объема перейти к точке, т.е.  $dx \rightarrow 0$ , имеем  $P_x = P_n$ .

Если запишем уравнение относительно других осей  $OZ, OY$ , то можно записать  $P_x = P_y = P_z = P_n$ .

Это свойство справедливо не только для покоящейся жидкости, но и для движущейся идеальной невязкой жидкости.

### 3.1. Основное уравнение гидростатики. Закон Паскаля

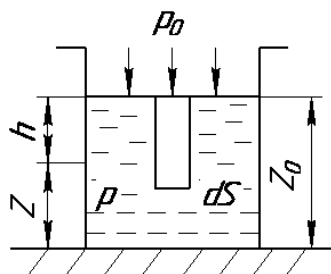


Рис. 21

Основное уравнение гидростатики описывает абсолютно покоящуюся жидкость и позволяет определить давление в любой ее точке.

Рассмотрим объем жидкости, на поверхности которой действует давление (рис. 21).

Определим давление в какой-либо точке. Выделим площадку  $dS$  и объем жидкости, который действует своим весом на эту площадку. Запишем уравнение сил, действующих на эту площадь  $dS$ :

$$p_0 dS + \rho \cdot g \cdot h \cdot dS = p \cdot dS.$$

$p = p_0 + \rho \cdot g \cdot h$  – основное уравнение гидростатики.

Его можно записать и так, учитывая, что  $h = z_0 - z$ ;  $g \cdot \rho = \gamma$ :

$$z + \frac{p}{\gamma} = z_0 + \frac{p_0}{\gamma},$$

где  $z$  – нивелирная высота;

$\frac{p}{\gamma}$  – пьезометрическая высота;

$z + \frac{p}{\gamma}$  – гидростатический напор – характеризует потенциальную

энергию покоящейся жидкости, отнесенную к единице ее веса;  $\gamma = \rho g$ .

Поверхности, в каждой точке которых давление одинаковы, называются поверхностями уровня.

В нашем случае – это горизонтальные плоскости.



## 3.2. Измерение пьезометрического давления.

### Пьезометры и их применение

$\frac{p}{\gamma} = H[M]$  – пьезометрическая высота. Приборы для её измерения называют пьезометрами.

Пьезометры – это трубочки, по уровню жидкости в которых определяется давление (рис. 22).

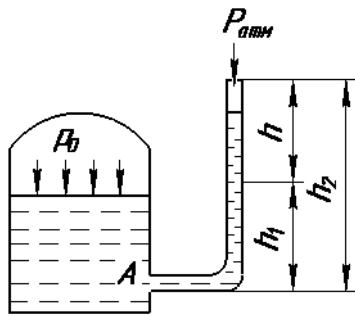


Рис. 22

Из уравнения гидростатики:

$$p_A = p_0 + h_1\gamma;$$

$$p_A = p_{атм} + h_2\gamma.$$

Отсюда

$$p_0 = p_{атм} + (h_2 - h_1)\gamma = p_{атм} + h\gamma.$$

В качестве пьезометров используются более сложные приборы. Если измерение определяемых давлений небольшое, то применяют пьезометры с легкой жидкостью. Если диапазон большой, то применяют тяжелую жидкость. Все зависит от требуемой точности измерения.

*Пример.*

Каково должно быть значение  $H$ , чтобы измерить давление жидкости  $1 \text{ кг/см}^2$  с удельным весом  $\gamma = 10^{-3} \text{ кг/см}^3$ ?

$$H = \frac{1 \text{ кг/см}^2}{10^{-3} \text{ кг/см}^3} = 1000 \text{ см} = 10 \text{ м.}$$

Если взять ртуть ( $\gamma = 13,6 \cdot 10^3 \text{ кг/см}^3$ ),

$$H = \frac{1}{13,6 \cdot 10^3} = \frac{1000}{13,6} = 76 \text{ см.}$$

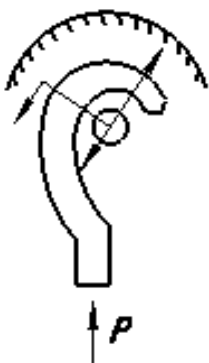


Рис. 23

В машиностроении применяют манометры. Они основаны на том, что под действием давления жидкости деформируется мембрана или металлическая трубка. Эти деформации передаются на стрелку прибора (рис. 23).

В некоторых случаях необходимо измерять давление ниже атмосферного  $p_A = p_{абс} = p_{атм} - h\gamma$ .

Величина давления, недостающая до атмосферного, называется вакуумом.

На рис. 24 показано, что давление, соответствующее вакууму  $p_B = h\gamma$ .  
 $p = 0$  – абсолютный ноль.

Давление, измеряемое относительно абсолютного нуля, называется абсолютным  $P_{абс}$ .

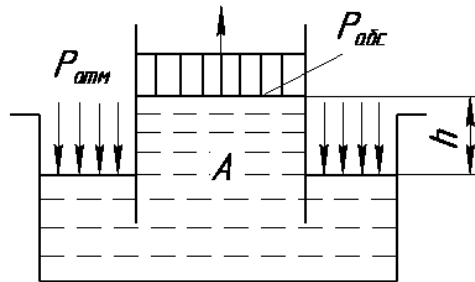


Рис. 24

Давление, измеряемое относительно атмосферного, называется избыточным  $p_{изб}$  (рис. 25).

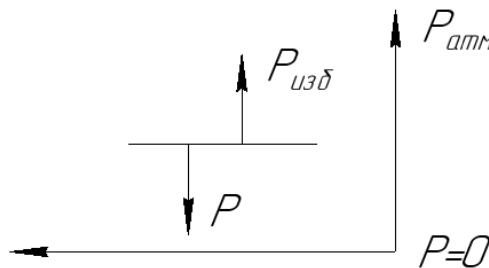


Рис. 25

### 3.3. Давление на наклонную плоскость

Для ее определения поступают иначе, чем в случае, показанном на (рис. 25).

В пределах площади  $S$  можно записать элементарную силу, действующую на элементарную поверхность

$$dN = (p_0 + h \cdot \gamma)dS.$$

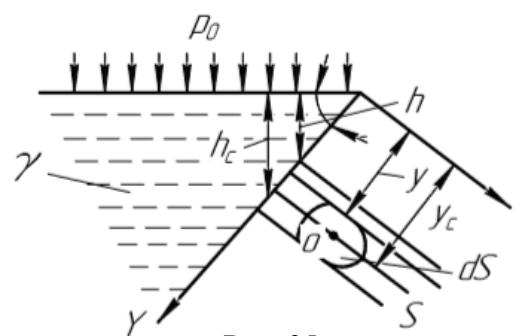


Рис. 25

Чтобы определить силу, необходимо проинтегрировать

$$N = \int_S p_0 dS + \int_S h \cdot \gamma \cdot dS;$$

$$\int_S dS = S; \quad h = y \sin \alpha;$$

$$N = p_0 S + \sin \alpha \int_S y dS,$$

где  $\int_S y dS = y_c S$  – статический момент площади;

$y_c$  – координаты центра тяжести;

$$N = p_0 S + \gamma \sin \alpha y_c S; \quad y_c \sin \alpha = h_c$$

$$N = p_0 S + \gamma \cdot h_c S;$$

$$N = p_c S,$$

где  $p_c$  – давление в центре тяжести.

Полная сила давления жидкости на наклонную поверхность определяется произведением площади этой стенки на величину гидростатического давления в центре тяжести этой площади.

### 3.4. Дифференциальное уравнение покоящейся жидкости и его интегрирование в простейшем случае

Это уравнение позволяет определить давление в относительно покоящейся жидкости.

Рассмотрим объем жидкости  $dW$ . На него действует массовая сила давления жидкости.  $R$  имеет проекции на оси  $X, Y, Z$ .

Так как объем движется, то на разных гранях могут быть разные давления.

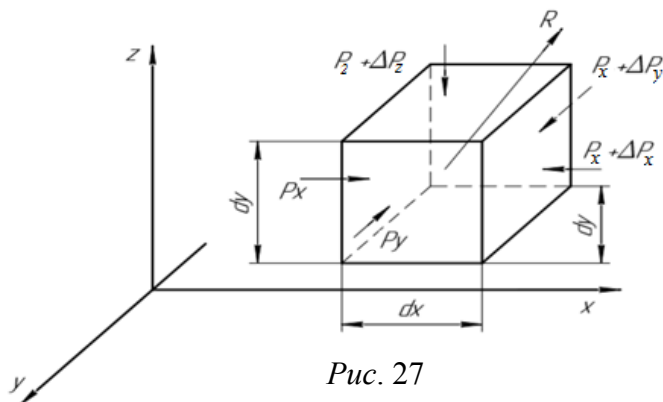


Рис. 27

Рассмотрим действующие силы (рис. 27).

а) силы давления.

Поскольку давление во всех точках исследуемого объема неодинаково, то имеет место градиент давления. В общем случае его можно привести по осям.

$\frac{\partial p}{\partial x}$  – градиент давления вдоль оси  $X$  (некоторое изменение давления в каждой точке вдоль оси  $X$ ).

Аналогичны будут градиенты вдоль осей  $Y$  и  $Z$ :

$$y \rightarrow \frac{\partial p}{\partial y}; \quad z \rightarrow \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Распишем вдоль оси  $X$ :

$$\Delta p_x = \frac{\partial p}{\partial x} dx, \text{ тогда } p_x dy \cdot dz = \left( p_x + \frac{\partial p_x}{\partial x} dx \right) dy \cdot dz.$$

б) массовые силы.

Рассмотрим силы, действующие вдоль оси  $X$ .

$X \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$  – компоненты сил тяжести, которая уравновешивает силы давления.

$$p_x dy \cdot dz - p_x dy \cdot dz - \frac{\partial p_x}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz + X \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz = 0.$$

$$X \cdot \rho - \frac{\partial p_x}{\partial x} = 0.$$

Аналогично можно записать вдоль всех осей:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p_x}{\partial x} &= 0, \\ Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p_y}{\partial y} &= 0, \\ Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Выше приведена система дифференциальных уравнений равновесия жидкости Эйлера.

В таком виде интегрировать уравнения трудно, поэтому мы их несколько преобразуем:

1 - е уравнение умножаем на  $dx$ , 2 - е – на  $dy$ , 3 - е – на  $dz$ .

Кроме того, мы доказывали, что в (·)  $p_y = p_x = p_z = p$ , тогда, сложив эти уравнения, получим

$$X \cdot dx + Ydy + Zdz - \frac{1}{\rho} \left( \frac{p_x}{\partial x} dx + \frac{p_y}{\partial x} dy + \frac{p_z}{\partial x} dz \right);$$

$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz)$  – уравнение Эйлера в свернутом виде.

Этим уравнением легче пользоваться при интегрировании.

Это уравнение позволяет определить в любой точке относительно покоящейся жидкости величины давления, а также перемещения в любом направлении с неким ускорением.

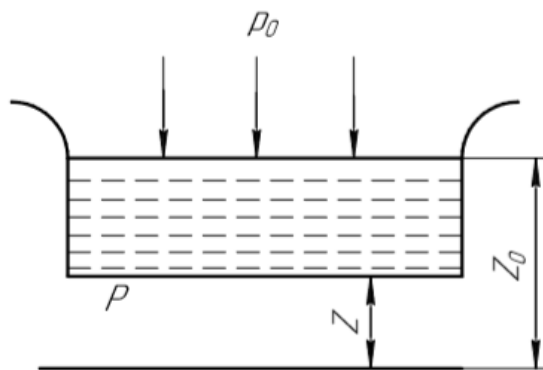


Рис. 28

*Пример 1.*

Абсолютно покоящаяся жидкость (рис. 28).

$$z_0 - z = h. \quad X = 0; \quad Y = 0; \quad Z = -g$$

$$dp = p(-g)dz$$

$$p = -\rho \int g dz + c,$$

$$p = -\gamma \cdot z + c,$$

где  $c$  – постоянная интегрирования граничных условий.

При  $z = z_0 \rightarrow p = p_0$

$$p_0 = -\gamma \cdot z_0 + c,$$

$$c = p_0 + \gamma \cdot z_0.$$

Подставим в исходное уравнение

$$z + \frac{p}{\gamma} = z_0 + \frac{p_0}{\gamma} \quad \text{или} \quad p = p_0 + \gamma \cdot h$$

Дадим понятие эквивалентной поверхности.

Эквивалентной поверхностью, или поверхностью уровня, называется поверхность в жидкости, давление в каждой точке которой одинаково.

Пример 2.

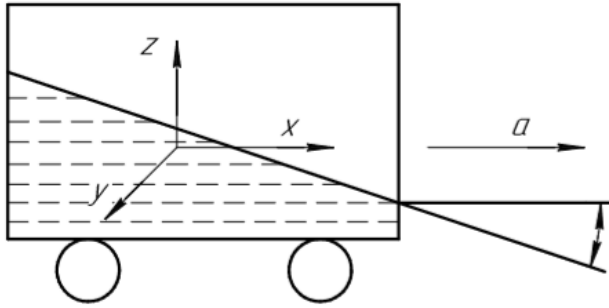


Рис. 29

Сосуд с жидкостью перемещается в горизонтальном направлении с ускорением  $a = \text{const}$  (рис. 29). Определить давления в любой точке жидкости и определить эквипотенциальные поверхности.

$x = +a$  – единичная сила, направленная противоположно.

$$Y = 0, \quad Z = -g.$$

Система координат в центре сосуда:

$$dp = \rho + (+adx - dgz),$$

$$p = +\rho \cdot a \cdot x - \rho \cdot g \cdot z + C,$$

начальные условия  $x = 0; z = 0; p = p_0$ , отсюда  $C = p_0$ ,

$$p = p_0 + \rho \cdot a \cdot x - g \cdot z \cdot \rho.$$

Определим эквипотенциальные поверхности.

Условие:  $p = p_0$ .

Отсюда  $x = +\frac{g}{a}z$ .

В общем случае поверхности определяются из условия  $p = p_{\text{const}}$

$$p_{\text{const}} - p_0 - \rho \cdot a \cdot x = -\rho \cdot g \cdot z,$$

$$x = \frac{+p_{\text{const}} - p_0}{\rho a} + \frac{g}{a}z.$$

Если решить относительно  $z$ , то получим

$$z = \frac{p_0 - p_{\text{const}}}{\rho g} + \frac{g}{a}x.$$

Тангенс угла наклона

$$tg\alpha = -\frac{a}{g}.$$

Пример 3.

Найти эквипотенциальные поверхности в жидкости, находящейся во вращающемся вокруг оси сосуде,  $\omega = \text{const}$  (рис. 30).

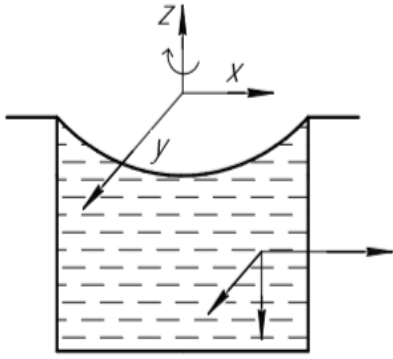


Рис. 30

$$X = \omega^2 x;$$

$$Y = \omega^2 y;$$

$$Z = -g,$$

$$dp = \rho(\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz).$$

На эквипотенциальной поверхности  $p = const$ , т.е. исходное давление

$$p = const = 0.$$

$$0 = \rho \cdot \omega^2 \frac{x^2}{2} + \rho \cdot \omega^2 \frac{y^2}{2} - \rho \cdot g \cdot z + C,$$

$z = \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2) + C_1$  – эквипотенциальные поверхности представляют собой параболоиды вращения.

#### 4. ОСОБЕННОСТИ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ.

### ГИДРОДИНАМИКА

Под движущейся жидкостью понимают совокупность материальных частиц, перемещающихся с различными параметрами движения, зависящими от координат времени и пространства.

Движение жидкости характеризуется скоростью, ускорением и координатами положения в пространстве.

Существуют два метода при изучении жидкости (рис. 31):

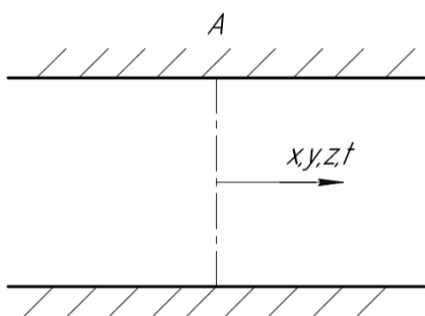


Рис. 31

1) метод Лагранжа;

2) метод Эйлера.

Метод Лагранжа изучает движение отдельных частиц жидкости, при этом переменными являются скорость, ускорение, координаты, а изучается движение частиц вдоль траектории.

Метод Эйлера исследует движение частиц, проходящих через сечение  $A$  или определенную точку пространства. Переменными являются скорость и ускорение, а координаты – постоянные.

Большинство задач гидравлики решается методом Эйлера.

#### 4.1. Характеристики движущейся жидкости

По параметрам движения потока различают установившееся и не установившееся движения.

1. Установившееся движение – такое, при котором ускорение потока во всех направлениях равно нулю, т.е.

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{dV_y}{dt} = \frac{dV_z}{dt} = 0$$

или

$$V_x, V_y, V_z = \text{const.}$$

Установившиеся движения могут быть:

а) равномерными

$$A = \text{const};$$

б) неравномерными

$$A = \text{Var}$$

2. Неустановившееся движение –  $V_x, V_y, V_z = \text{Var}$ .

Это наиболее общий случай.

#### 4.2. Кинематика жидкости

Линия потока – это линия, в каждой точке которой в данный момент времени направление скорости совпадает с касательной к этой линии.



Рис. 32

Линия тока совпадает с траекторией движения частиц в установившемся режиме (рис.32).

В неустановившемся режиме линия тока не совпадает с траекторией движения.





Рис. 33

Трубкой тока называется поверхность, ограниченная линиями тока, проведенными в данный момент времени через все точки замкнутого контура. Элементарной струйкой

называется часть движущейся жидкости, ограниченной трубкой тока бесконечно малого сечения, выделенного из данного объема (рис. 33).

Основные свойства элементарной струйки:

- 1) частицы жидкости не входят и не выходят через боковую поверхность;
- 2) скорости движения частиц во всех направлениях одного и того же рассматриваемого сечения одинаковы по величине;
- 3) при установившемся движении форма элементарной струйки не меняется.

### 4.3. Поток жидкости и его свойства

Живое сечение  $S$  потока – это поверхность в пределах потока, нормальная в каждой своей точке к проходящей через нее линии тока,  $S = \pi r^2$  для круглой трубы.

Смоченный периметр – это длина контура живого сечения по твердым стенкам  $\Pi = 2\pi r$ .

Гидравлический радиус  $r$  – отношение площади живого сечения к смоченному периметру

$$r = \frac{S}{\Pi}.$$

Гидравлический радиус – не геометрический радиус.

Пример: Определить гидравлический радиус  $r$  для круглой трубы при равномерном движении жидкости (рис. 34).

$$S = \frac{\pi d^2}{4}; \Pi = \pi d;$$

$$r = \frac{\pi d^2}{4\pi d} = \frac{d}{4};$$

$$d_{\text{эк}} = 4r.$$

Определить то же для треугольного и для квадратного сечения.

Поток жидкости – совокупность элементарных струек.

Все потоки жидкости можно разделить на 3 класса:

1. Напорный поток.
2. Безнапорный поток.
3. Струя.

Напорным потоком называют поток, ограниченный со всех сторон твердыми стенками (см. рис. 34).

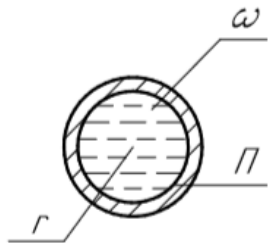


Рис. 34

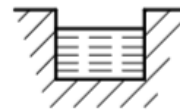


Рис. 35

Безнапорный поток – поток, ограниченный твердыми стенками не со всех сторон и имеющий свободную поверхность по всей длине (рис. 35).

Струей называют поток жидкости, ограниченный поверхностью разрыва скоростей.

Скачкообразное изменение скоростей показано на рис. 36.

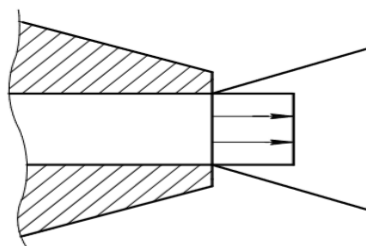


Рис. 36

#### 4.4. Расчёт расхода и средней скорости потока

Расход – это количество жидкости, протекающей через живое сечение в единицу времени. Можно говорить о массовом расходе и объемном расходе ( $\text{м}^3$ ).

Мы будем заниматься объемным расходом.

$v_{cp} = \frac{W}{S}$  – условно усредненная по сечению скорость, определяемая расходом и сечением (рис. 37).

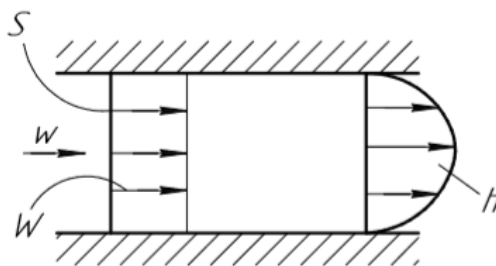


Рис. 37

#### 4.5. Уравнение неразрывности потока

Так называют уравнение материального баланса, составленного для бесконечно малого объема движущейся жидкости.

Рассматривая бесконечный малый объем жидкости в пространстве между элементами жидкости с гранями  $dx$ ;  $dy$  и  $dz$ , причем, разность между потоками массы жидкости в направлении оси  $z$  наружу и внутрь объема рассчитывается выражением

$$[(\rho W_x + \partial(\rho W_x))dydz - \rho W_x dydz_z], \quad (1)$$

где  $W_x$  – проекция скорости на оси  $x$

Разность между потоками жидкости наружу и внутрь элементарного объема определится соотношениями:

$$\left[ \rho W_x + \frac{\partial}{\partial x}(\rho W_x)dx \right] dydz - \rho W_x dydz = \frac{\partial(\rho W_x)}{\partial x} dx dydz \quad (2)$$

Первый компонент уравнения (2) выражает приток массы жидкости через площадь  $dydz$ , отстоящую на расстоянии  $dx$ ;

Второй компонент уравнения (1) показывает уход массы жидкости из элементарного объемчика  $dV$  через параллельную площадку  $dydz$ .

Аналогично для осей  $y$  и  $z$  эта разность составит величины:

$$\frac{\partial(\rho W_y)}{\partial y} dx dydz \quad \text{и} \quad \frac{\partial(\rho W_z)}{\partial z} dx dydz$$

Суммарный поток жидкости через рассматриваемый объемчик равен скорости изменения массы этого элементарного объема.

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} dx dy dz;$$

Уравнение постоянства расхода:

$$\frac{\partial(\rho W_x)}{\partial x} dV + \frac{\partial(\rho W_y)}{\partial y} dV + \frac{\partial(\rho W_z)}{\partial z} dV + \frac{\partial \rho}{\partial \tau} dV = 0; \quad (3)$$

где  $dV = dx dy dz$ ;

Разделив компоненты уравнения (3) на  $dV$ , получим:

$$\frac{\partial(\rho W_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho W_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho W_z)}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \tau} = 0. \quad (4)$$

Это и есть уравнение неразрывности, которое для несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z} dV + \frac{\partial \rho}{\partial \tau} = 0 \quad (5)$$

Для потока жидкости используют уравнение материального баланса в виде

$$W_{cp} \cdot S = const. \quad (6)$$

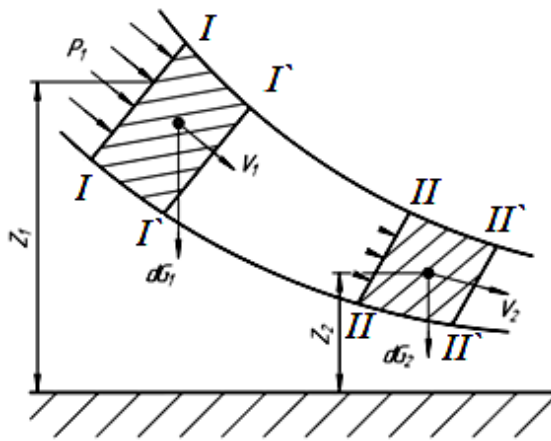
Здесь  $S$  – площадь поперечного потока, перпендикулярная к вектору скорости  $\vec{W}_{cp}$ .

Уравнение (6) называют интегральным уравнением неразрывности или уравнением постоянства расхода.

## 4.6. Энергетический баланс и уравнение Бернулли для струйки идеальной жидкости

Идеальная жидкость – это невязкая жидкость, сопротивление ее движению равно НУЛЮ. Такой жидкости нет, но ею удобно пользоваться при выводе основных закономерностей (рис. 38).

Рассмотрим сечения на рис. 38 I-I и II-II, обозначим координаты этих



сечений через  $z_1$  и  $z_2$  и выберем элементарные площади  $dS_1$  и  $dS_2$ .

Пусть за время  $dt$  сечение I-I переместится в I'-I', а II-II в II'-II'. Скорость при этом была  $w_1$  и  $w_2$ .

Вследствие неразрывности жидкости объем перемещения одинаковый, значит, и их вес одинаковый

Рис. 38

$$dS_1 = dS_2.$$

На площадки  $dS_1$  и  $dS_2$  действуют давления  $P_1$  и  $P_2$ .

Применим теорему теоретической механики: работа сил, приложенных к телу, равна кинетической энергии этого тела.

Работа сил  $A = F_{(\text{сила})} \cdot L_{(\text{путь})}$ .

Приращение кинетической энергии  $\frac{m}{2}(w_2^2 - w_1^2)$ .

Силы, действующие на жидкость:

а) массовые  $dG = \gamma dS_1 w_1 dt = \gamma dS_2 w_2 dt$ .

Работа этих сил  $dG(z_1 - z_2)$ .

б) силы давления  $p_1 dS_1$  и  $p_2 dS_2$ .

Работа этих сил:

$$p_1 dS_1 \cdot w_1 dt \text{ в сечении I-I;}$$

$$p_2 dS_2 \cdot w_2 dt \text{ в сечении II-II.}$$

кинетическая энергия

$$\frac{m}{2}(w_2^2 - w_1^2) = \frac{dG}{2g}(w_2^2 - w_1^2).$$

Запишем уравнение

$$p_1 dS_1 w_1 dt - p_2 dS_2 w_2 dt + dG(z_1 - z_2) = (w_2^2 - w_1^2) \frac{dG}{2g}.$$

Умножим два первых члена уравнения на  $\gamma$  и разделим, учитывая, что

$$\gamma dS_1 w_1 dt = \gamma dS_2 w_2 dt = dG,$$

Получим

$$\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} + z_1 - z_2 = (w_2^2 - w_1^2) \cdot \frac{1}{2g}.$$

$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{w_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{w_2^2}{2g}$  – уравнение Бернулли для струйки идеальной жидкости.

Если поток не движется, т.е.  $V_1 = V_2 = 0$ , то наше уравнение обратится в основное уравнение гидростатики.

Составные члены этого уравнения:

$Z_1$  – нивелирная высота;

$\frac{p_1}{\gamma}$  – пьезометрическая высота;

$\frac{w^2}{2g}$  – скоростной напор;

$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{w^2}{2g} = H$  – полный напор.

Для струйки идеальной жидкости

$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = H = const$  – вдоль струйки.

Пример (рис. 39).

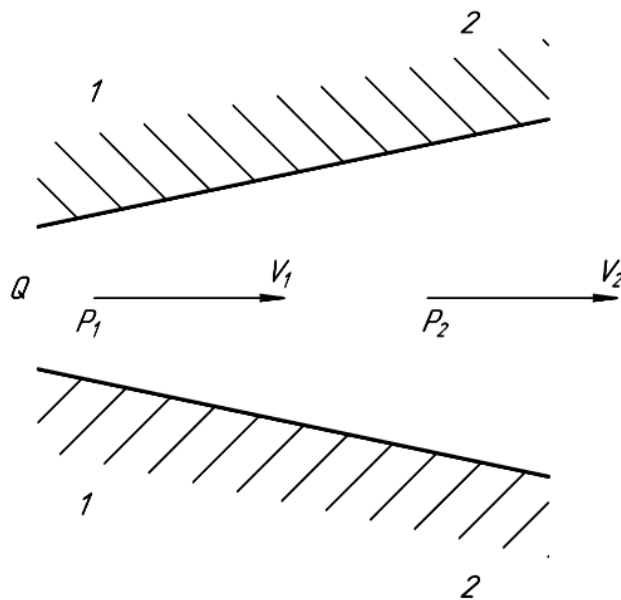


Рис. 39

$$z_1 = z_2 = z_3$$

$w_2 < w_1$  – на основании уравнения Бернулли  $p_2 > p_1$ .

$$\pi \cdot m \cdot Q = \text{const.}$$

Энергетический смысл членов уравнения Бернулли следующий:

$z + \frac{p}{\gamma}$  – потенциальная энергия;

$\frac{v^2}{2g}$  – кинетическая энергия потока,

т.е. полная энергия жидкости вдоль идеальной струйки остается постоянной.

Другими словами, уравнение Бернулли – это закон сохранения энергии при движении идеальной жидкости.

В отличие от энергии твердого тела, у жидкости имеется дополнительный вид энергии  $\frac{p}{\gamma}$ . Это расширяет возможности преобразования одного вида энергии в другой.

Рассмотрим горизонтальный поток, т.е.  $z_1 = z_2$ , отсюда  $p_2 < p_1$ .

В этом случае, когда в сечении II-II надо иметь максимальную кинетическую энергию (для вращения турбины) и минимальную статического давления. Для этого необходимо сузить поток до минимума (рис. 40).

И наоборот можно уменьшить до минимума кинетическую энергию, а увеличить потенциальную энергию, например, в гидравлических приводах.

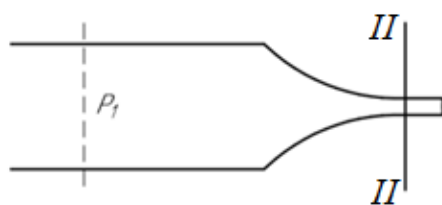


Рис. 40

$w_2 < w_1$ , так как  $S_2 > S_1$  из уравнения Бернулли  $p_2 > p_1$ . Величиной  $z$  в гидроприводе обычно пренебрегают, так как она мала по сравнению с  $\frac{p}{\gamma}$ .

Кинетическая энергия преобразовалась в энергию давления  $p_2$ , которая используется как движущая сила в механизме (рис. 41).

$$F = p_2 S_2.$$

Очевидно,

$$w_2 = \frac{Q}{S}.$$

Мощность, развиваемая поршнем, будет

$$N = F \cdot w_2 = p_2 \cdot Q \left[ \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \cdot \frac{\text{см}^2}{\text{с}} \right] = \text{Вт.}$$

Иногда уравнение Бернулли записывается

так:

$$z_1 + p_1 + \frac{\rho}{2} w^2 = p_\Sigma = \text{const},$$

где  $z_1$  – весовое давление;

$p_1$  – гидростатическое давление;

$w^2$  – динамическое давление;

$p_\Sigma$  – полное давление.

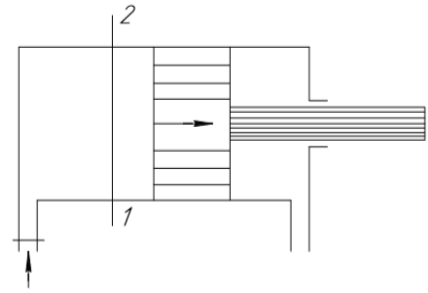


Рис. 41

#### 4.7. Уравнение Бернулли для потока реальной вязкой жидкости

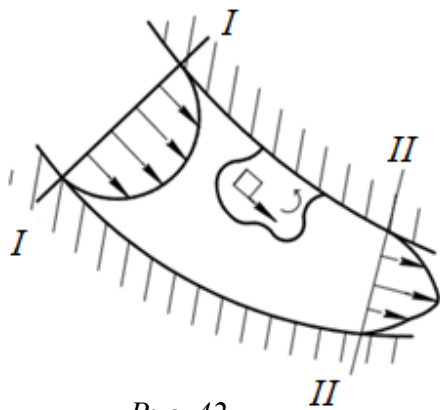


Рис. 42

1. Из-за наличия вязкости жидкости скорость в поперечном сечении: у стенки  $\min$ , в середине  $\max$ .

2. Из-за градиента скорости имеет место относительное скольжение слоев жидкости. Кроме того, жидкость завихряется, что вызывает дополнительные потери на энергии.

Таким образом, полная энергия в сечениях I-I и II-II неодинакова из-за потерь (рис. 42).

1. Учет неравномерности распределения скорости по сечению.

Мощность элементарной струйки реального потока определяется полным давлением в точке и элементарным расходом

$$dN = p_\Sigma dQ, p_\Sigma = \left( z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} \right) \cdot \gamma,$$

тогда

$$dN = \left( z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} \right) \cdot \gamma \cdot dS;$$

$$VdS = dQ;$$



$$N = \gamma \int_S \left( z + \frac{p}{\gamma} \right) + \gamma \int_S \frac{V^2}{2g} V dS,$$

$z + \frac{p}{\gamma}$  – величина полного статического давления, которую можно считать постоянной,

$$\int_S V dS = Q - \text{расход жидкости,}$$

тогда

$$N = \gamma \int_S \left( z + \frac{p}{\gamma} \right) + \gamma \int_S \frac{V^3}{2g} V dS.$$

Разделим обе части на  $Q \cdot \gamma$ .

Величина  $\frac{N}{Q \cdot \gamma} = H_0$  – полный напор реального потока.

Если учесть, что  $Q = V_{cp} S$ , то

$$H_0 = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{1}{V_{cp} S} \cdot \int_S \frac{V^3}{2g} dS.$$

Умножим последний член на  $V_{cp}^2$  и разделим

$$H_0 = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V_{cp}}{2g} \cdot \frac{\int_S V^3 dS}{V_{cp}^3 \cdot S},$$

$$\alpha = \frac{\int_S V^3 dS}{V_{cp}^3 \cdot S},$$

$$H_0 = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V_{cp}}{2g} \cdot \alpha.$$

Коэффициент  $\alpha$  представляет собой отношение кинетической энергии реального потока с неравномерным распределением скорости по сечению к кинетической энергии того же потока с равномерным распределением скоростей.

$\alpha$  – коэффициент Кориолиса,  $\alpha > 1$ ,  $\alpha_{\min} = 1$  – это величина справочная.

2. Учет трения, т.е.  $H_{0I} \neq H_{0II}$ . При таком направлении движения

$H_{0I} > H_{0II}$  (рис. 43).

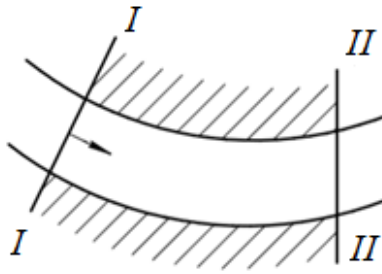


Рис. 43

$\Sigma h$  обозначим потери полного давления вдоль потока от сечения  $I$  до  $II$ . Тогда

$$H_{0I} = H_{0II} + \Sigma h.$$

Уравнение  $\Sigma h$  пока нам неизвестно.

Уравнение Бернулли

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_{cp1}^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_{cp2}^2}{2g} + \Sigma h.$$

Оно отличается от уравнения Бернулли для идеальной жидкости:

- 1) наличием коэффициентом  $\alpha$ ;
- 2) наличием  $\Sigma h$  потери полного давления;
- 3) скоростью, здесь она средняя  $V_{cp}$ .

Уравнение для потока реальной жидкости является законом сохранения энергии с учетом потерь энергии внутри жидкости, необратимо превращающихся в тепло.

### Примеры использования уравнения Бернулли

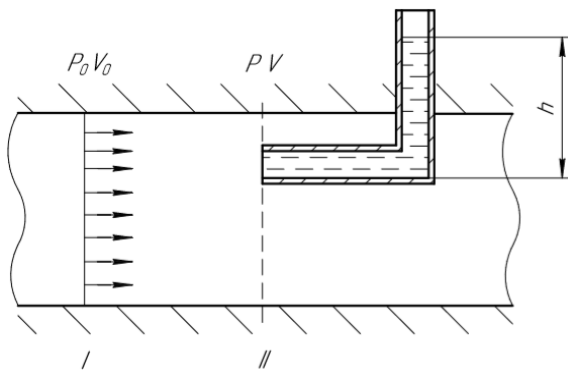


Рис. 44

#### Пример 1.

Ввиду близости сечений  $I$  и  $II$  можно принять, что  $z_1 = z_2$  и потери напора считать малыми  $\Sigma h = 0$ .

Также из-за малости сечения трубки, т.е. малости рассматриваемого сечения,  $\alpha_0 = \alpha = 1$ . При таких допущениях можно записать (рис. 44):

$$\frac{p_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g} = \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g}.$$

1. Скорость  $V$  на торце трубки при установившемся режиме равна 0.
2. Давление в точке  $A$   $h\gamma = p$ .

Тогда получим  $\frac{p_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g} = h$ .

Измеренное таким образом давление имеет некоторую погрешность. Но величина этих погрешностей незначительна около 1 %, т.е.

$$\frac{p_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g} = Kh, K \approx 0,99.$$

Прибор неудобен при измерении больших давлений поэтому его в таких случаях подсоединяют к манометру.

*Пример 2.*

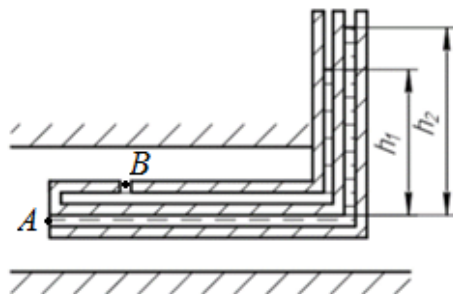


Рис. 45

Часто на практике необходимо измерять скорость потока, а не полное давление. Для измерения скорости есть специальный прибор – трубка для измерения скорости или трубка Пито-Прандтля (рис. 45).

$$h_2 = \frac{p_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g};$$

$$p_0 = h_1\gamma - \text{в точке В.}$$

Трубка в точке В ориентирована так, что приемное отверстие лежит в параллельном направлении с вектором скорости. Поэтому скоростной напор на это отверстие не действует:

$$h = h_2 - h_1 = \frac{p_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g} - \frac{p_0}{\gamma} = \frac{V_0^2}{2g},$$

отсюда

$$V_0 = \sqrt{2gh}; \quad V_0 = C\sqrt{2gh}.$$

Коэффициент С учитывает погрешности потерь, разность высот, но они невелики:  $C \approx (1 \pm 0,02)$ .

При измерении очень больших скоростей трубки применять нельзя. Вместо них используются 2 манометра или дифференциальный манометр.

Пример 3.

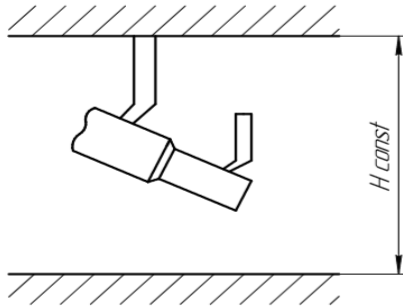


Рис. 46

Прибор для измерения расхода жидкости, или расходомер Вентури.

Также пренебрегаем потерями на пути движения жидкости и пренебрегаем распределением скоростей, т.е.

$$\Sigma h = 0 \text{ и } \alpha_1 = \alpha_2 = 1 \text{ (рис. 46).}$$

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_{1cp}^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_{2cp}^2}{2g};$$

$$\frac{V_{2cp}^2}{2g} - \frac{V_{1cp}^2}{2g} = (z_1 - z_2) + \left( \frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} \right).$$

Так как измеряем статическое давление, то имеем

$$h = (z_1 - z_2) + \left( \frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} \right);$$

$$\frac{V_{2cp}^2}{2g} - \frac{V_{1cp}^2}{2g} = h.$$

На основании уравнения неразрывности

$$Q = V_{1cp} S_1; \quad Q = V_{2cp} S_2;$$

$$h = \frac{1}{2g} \left( \frac{Q^2}{S_2^2} - \frac{Q^2}{S_1^2} \right) = \frac{Q^2}{2g} \cdot \frac{S_1^2 - S_2^2}{S_1^2 \cdot S_2^2}.$$

Обозначим через

$$K = \sqrt{\frac{S_1^2 - S_2^2}{S_1^2 \cdot S_2^2}};$$

$$Q = K \sqrt{2gh}.$$

## **4.8. Теория подобия и ее применение в гидродинамике.**

### **Физический смысл основных критериев**

Моделированием называется исследование явлений на моделях. Сущность моделирования заключается в том, что на модели меньшего, а иногда и большего масштаба создается гидравлическое явление, подобное явлению, которое имеет место или должно возникнуть в натуре, что и позволяет изучить это явление. Основной задачей теории моделирования является выявление условий, обеспечивающих подобие явлений. Явления называются подобными, если по известным характеристикам одного явления можно получить простым пересчетом аналогичные характеристики другого явления.

Одним из существенных достоинств метода моделирования является возможность обобщения результатов единичного опыта на целый класс явлений. Этот метод, например, позволит обобщить результаты исследования движения воды на случай движения воздуха, масла и т.п., или наоборот. Даже больше, он позволяет распространить результаты явления исследования явления одного класса на явления другого класса, описываемые одинаковыми математическими уравнениями. Метод моделирования обеспечивает наиболее рациональную организацию исследования, значительно сокращая тем самым объем экспериментальных работ, а значит, и затраты средств, особенно, если исследования происходят на моделях, меньших натуре.

Научной базой метода моделирования является теория подобия, переплетающаяся с метода теории размерностей.

### ***Основные законы подобия. Критерий подобия Ньютона***

Одним из важнейших условий, которым должны удовлетворять подобные явления - это так называемое геометрическое подобие.

Явления будут геометрически подобны, если существует геометрическое подобие размеров потока натуре и модели. Под этим понимают подобие размеров каналов, в которых протекает поток натуре и модели, подобие шероховатостей стенок, ограничивающих поток, в открытых потоках подобие

свободных поверхностей, подобие запорных приспособлений, подобие твердых тел, помещаемых в натуре и в модели.

Если обозначить какие-либо характерные величины, например, длину  $l$ , диаметр  $d$ , некоторую площадь  $\omega$  или некоторый объем  $W$ , относящиеся к натуре, индексом  $n$ , а к модели индексом  $m$ , то между одноименными величинами геометрически подобных систем будет существовать соотношение

$$\lambda = \frac{l_n}{l_m} = \frac{d_n}{d_m} = \frac{\sqrt{\omega_n}}{\sqrt{\omega_m}} = \frac{\sqrt{W_n}}{\sqrt{W_m}}.$$

Постоянная  $\lambda$  называется константой геометрического подобия.

В требования, предъявляемые к условиям геометрического подобия, должно быть включено взаимное и однозначное соответствие между частицами потока природы и модели, заключающееся в том, что каждой частице потока природы должна соответствовать частица потока модели, и наоборот.

Однако одного геометрического подобия еще недостаточно, чтобы явление было подобным. Известно, что в геометрически подобных каналах движение может быть различным. В подобных явлениях должно существовать и определенное соотношение между скоростями и ускорениями в соответствующих точках, выражающееся условиями так называемого кинематического подобия.

Кинематическое подобие требует, чтобы траектории, описываемые соответствующими частицами потока природы и модели, за любые соответствующие отрезки времени были подобны с константой подобия  $\lambda$ . Это значит, что зависимость между уравнениями траекторий соответствующих частиц должна определяться равенствами

$$x_n = \lambda x_m; \quad y_n = \lambda y_m; \quad z_n = \lambda z_m,$$

в которых координаты являются функциями времени.

Примем также при этом, что если соответствующие участки траекторий  $l_H$  и  $l_M$  или  $dl_H$  и  $dl_M$  соответствующие частицы проходят за время  $t_H$  и  $t_M$  или  $dt_H$  и  $dt_M$ , то отношение

$$\frac{t_H}{t_M} = \frac{dt_H}{dt_M} = \tau$$

должно быть независимым от времени и одним и тем же для любых соответствующих частиц.

Из условий кинематического подобия следует, что отношения соответствующих участков траекторий  $l_H$  и  $l_M$  или  $dl_H$  и  $dl_M$  или радиусов кривизны траекторий  $r_H$  и  $r_M$ , если траектории криволинейны, также вводятся между собой в отношении  $\lambda$ , т. е.

$$\frac{l_H}{l_M} = \frac{dl_H}{dl_M} = \frac{r_H}{r_M} = \lambda.$$

Из тех же условий кинематического подобия вытекает зависимость между скоростями в соответствующих точках  $u_H$  и  $u_M$ , а именно:

$$\frac{u_H}{u_M} = \frac{\frac{dl_H}{dt_H}}{\frac{dl_M}{dt_M}} = \frac{\lambda}{\tau}.$$

Такая же зависимость должна существовать и между максимальными скоростями  $u_{\max}$  или средними скоростями  $v$  потока природы и модели, т. е. должно быть

$$\frac{u_H}{u_M} = \frac{u_{\max H}}{u_{\max M}} = \frac{v_H}{v_M}.$$

Из этого соотношения следует

$$\frac{u_H}{v_H} = \frac{u_M}{v_M}.$$

Отношение  $\frac{u}{v}$  можно рассматривать как безразмерную относительную скорость, т.е. как значение скорости, выраженное в системе, в которой за единицу скорости принята средняя скорость  $v$ .

Таким образом, кинематическое подобие потока требует, чтобы поля безразмерных скоростей природы и модели были бы тождественны. Впрочем, это требование распространяется и на все другие одноименные величины.

Из условий кинематического и геометрического подобия вытекает зависимость между ускорениями  $a_H$  и  $a_M$  или между проекциями ускорений (например, между проекциями на нормаль, т. е. между нормальными ускорениями  $\frac{u^2}{r}$ , если траектории криволинейны), а именно:

$$\frac{a_H}{a_M} = \frac{\left(\frac{u_H^2}{r_H}\right)}{\left(\frac{u_M^2}{r_M}\right)}.$$

Материальное подобие требует взаимного соответствия между материальными частицами потока природы и модели, при этом массы соответствующих частиц  $M = \rho W$ , где  $\rho$  – плотность, а  $W$  – объем, также должны находиться в одном и том же отношении

$$\frac{M_H}{M_M} = \frac{\rho_H W_H}{\rho_M W_M} = P \lambda^3 = m,$$

где  $P = \frac{\rho_H}{\rho_M}$  отношение плотностей;

$m$  – константа подобия масс.

Силовое подобие требует, чтобы равнодействующие силы  $F = ma$  сил, действующих на соответствующие материальные частицы потока природы и модели в соответствующие моменты времени, также находились бы в отношении

$$\frac{F_H}{F_M} = \frac{M_H a_H}{M_M a_M}.$$

Из последнего следует равенство

$$\frac{F_H l_H}{M_H u_H^2} = \frac{F_M l_M}{M_M u_M^2} = Ne.$$



Величина  $\frac{Fl}{\mu u^2} = Ne$  называется критерием механического подобия – критерием Ньютона. Из полученного следует, что для любых двух соответствующих точек подобных потоков природы и модели значения критерия механического подобия – числа Ньютона – имеют одно и то же значение, т. е.

$$Ne_H = Ne_M$$

#### 4.9. Критерии подобия Рейнольдса, Фруда, Эйлера и Вебера

Критерий Ньютона  $Ne$  выражает зависимость между силами, массами, скоростями и линейными размерами в динамически подобных потоках в общем виде. В гидравлике приходится иметь дело главным образом с тремя видами сил: силой веса, силой давления и силой трения. В некоторых случаях приходится принимать во внимание силы поверхностного натяжения. При этом чаще всего в различных явлениях главную роль играет только один из этих видов сил. В общем случае полного подобия необходимо иметь подобие всех сил. Однако каждый из этих видов сил требует своих условий подобия, причем иногда эти условия оказываются несовместимыми. Один такой пример будет приведен ниже. Таким образом, удовлетворить основному условию подобия – равенству критериям Ньютона – не всегда возможно. В таких случаях необходимо обеспечить подобие того вида сил, который оказывается наиболее существенным в изучаемом явлении.

Например, при исследовании законов гидравлических сопротивлений трубопроводов главную роль играют силы трения. При исследовании протекания жидкости через водосливы главную роль играют силы тяжести, таких примеров можно было бы привести много. Критерии частичного подобия можно получить из критерия Ньютона, подставляя в него вместо силы  $F$  или силу трения  $T = \mu \cdot \omega \frac{du}{dn}$ , при этом получим условие подобия только сил трения (критерий Рейнольдса  $Re$ ) или силу давления  $P = p \cdot \omega$  – условие подобия, только сил давления (критерий Эйлера –  $Eu$ ) и т.п.

Подставив в формулу силу трения  $T$ , получим:

$$\frac{\mu_H \omega_H \frac{du_H}{dn_H} l_H}{M_H u_H^2} = \frac{\mu_M \omega_M \frac{du_M}{dn_M} l_M}{M_M u_M^2}.$$

Имея в виду, что  $M = \rho W$ , в подобных системах

$$\frac{\omega_H l_H}{W_H} = \frac{\omega_M l_M}{W_M},$$

$$\frac{\frac{du_H}{dn_H} : u_H}{\frac{du_M}{dn_M} : u_M} = \frac{1}{\lambda},$$

будем иметь

$$\frac{\rho_H u_H l_H}{\mu_H} = \frac{\rho_M u_M l_M}{\mu_M},$$

где  $Re = \frac{\rho u l}{\mu}$  – критерий (число) Рейнольдса.

Таким образом, подобие сил трения в потоках, удовлетворяющих условиям геометрического, кинематического и материального подобия, будет только в том случае, если для каждой пары соответствующих точек потока природы и модели число Рейнольдса будет иметь одно и то же значение. В числе Рейнольдса за величину  $u$  может быть принята средняя скорость потока  $u$ , а за  $l$  – любая характерная линейная величина. Например, при изучении законов движения жидкости в трубах принимается диаметр трубы  $d$  или гидравлический радиус  $R$ . При этом число Рейнольдса будет представлено в виде

$$Re_d = \frac{\rho \cdot u \cdot d}{\mu}; \quad Re_R = \frac{\rho \cdot u \cdot R}{\mu}.$$

Следует иметь в виду, что для подобия двух явлений существенно не численное значение критерия, а лишь его равенство для потоков природы и модели.

Подставив в формулу силы тяжести  $G = M \cdot g$ , получим

$$\frac{g_H M_H l_H}{M_H u_H^2} = \frac{g_M M_M l_M}{M_M u_M^2}$$

или после сокращения

$$\frac{u_H^2}{g_H l_H} = \frac{u_M^2}{g_M l_M},$$

где  $\frac{u^2}{g \cdot l} = Fr$  – критерий (число) Фруда. Иногда число Фруда  $Fr$  выражают через среднюю скорость

$$Fr = \frac{u^2}{g \cdot l}.$$

Равенство чисел Фруда  $Fr$  в соответствующих точках потоков, удовлетворяющих геометрическому, кинематическому и материальному подобию, обеспечивает подобие сил тяжести. За величину  $l$  может быть принята любая характерная линейная величина. Например, при изучении волнового сопротивления, которое испытывает движущийся корабль, за  $l$  принимается длина корабля.

Подставим силу давления  $P = \rho \cdot \omega$ , получим

$$\frac{p_H \omega_H l_H}{M_H u_H^2} = \frac{p_M \omega_M l_M}{M_M u_M^2}.$$

Имея в виду, что  $M = \rho \cdot W$  и, кроме того, в геометрически подобных системах  $\frac{\omega_M l_M}{W_M} = \frac{\omega_H l_H}{W_H}$ , найдем

$$\frac{p_H}{\rho_H u_H^2} = \frac{p_M}{\rho_M u_M^2},$$

где  $\frac{p}{\rho u^2} = Eu$  – критерий (число) Эйлера.

Числу Эйлера придают несколько иной вид, вводя вместо абсолютного давления  $p$  разность давления  $\delta p$ , а именно:

$$Eu = \frac{\delta p}{\rho \cdot u^2}.$$

Число Эйлера играет большую роль в исследовании явлений, связанных с кавитацией. В этом случае за  $\delta p$  принимается  $\delta p = p - p_{\text{п}}$ , где  $p_{\text{п}}$  – давление парообразования.

Число  $k=2Eu$  называется числом кавитации. Равенство чисел Эйлера обеспечивает в динамически подобных потоках подобие сил давления.

В некоторых гидравлических исследованиях существенное значение имеет поверхностное натяжение. Для получения соответствующих условий подобия можно также исходить из критерия, подставляя в него значение силы поверхностного натяжения  $F = \sigma l$ , где  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения. Преобразования, не отличающиеся от предыдущих, позволяют получить число Вебера – критерий подобия сил поверхностного натяжения в виде

$$We = \frac{\sigma}{\rho \cdot u^2 \cdot l},$$

где  $l$  – характерная линейная величина.

Выше мы уже отмечали, что полное подобие осуществить не всегда возможно. Покажем, что этого нельзя сделать во всех случаях, если для модели и для натуре применяется одна и та же жидкость. Рассмотрим один такой пример. Испытывается модель плотины при протекании через неё воды (рис. 47). Примем за характерный линейный размер напор над гребнем плотины  $p$ . В этом случае числа Рейнольдса и Фруда представятся в следующем виде:

$$Re = \frac{\rho_{\text{н}} v_{\text{н}} H_{\text{н}}}{\mu_{\text{н}}} = \frac{\rho_{\text{м}} v_{\text{м}} H_{\text{м}}}{\mu_{\text{м}}}; \quad Fr = \frac{v_{\text{н}}^2}{g_{\text{н}} H_{\text{н}}} = \frac{v_{\text{м}}^2}{g_{\text{м}} H_{\text{м}}}.$$

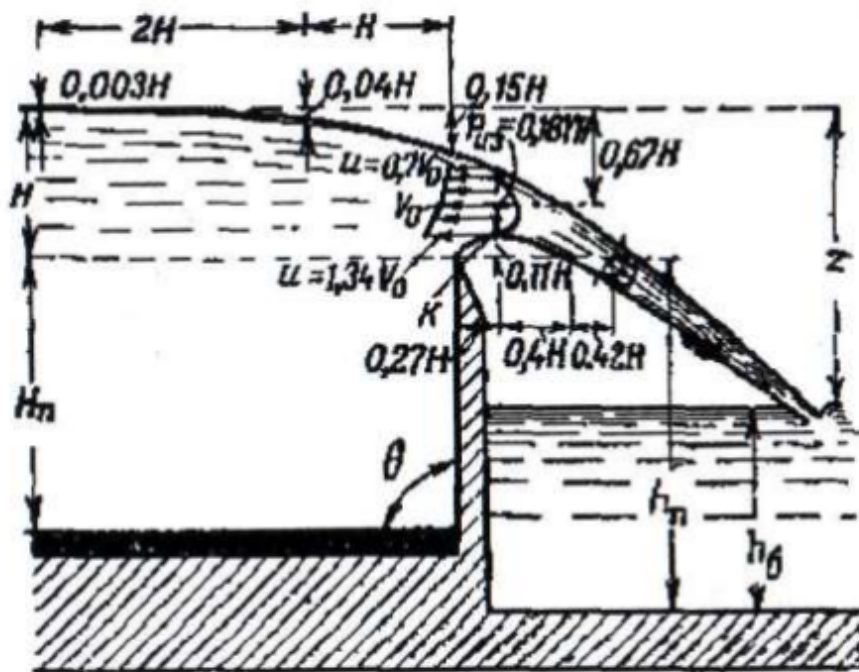


Рис. 47

Имея в виду, что в натуре и на модели жидкость одна и та же, у которой  $\rho$ ,  $\mu$  имеют одни те же значения, получим следующие несовместимые равенства:

$$\frac{v_H}{v_M} = \frac{H_H}{H_M}; \quad \frac{v_H}{v_M} = \sqrt{\frac{H_H}{H_M}}.$$

По первому равенству уменьшение модели в  $\lambda$  раз потребует увеличение скорости протекания жидкости через модель в  $\lambda$  раз, а по второму равенству – уменьшение скорости протекания в  $\sqrt{\lambda}$  раз. Ввиду того, что существенное значение при моделировании водослива играют силы тяжести, очевидно, режим работы модели необходимо подчинить тяжести. Если бы можно было изменять вязкость жидкости на модели, то при известных условиях можно было бы обеспечить условия подобия и сил тяжести, и сил трения.

Заметим, что весьма часто не удается осуществить полное подобие и вследствие трудностей создания подобия шероховатостей поверхностей.

В результате тех или других пренебрежений, допускаемых при моделировании, возникают погрешности при переносе на натуру результатов, по-

лученных при исследовании модели, характеризующиеся так называемым масштабным эффектом.

## 5. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ БАЗА ГИДРОДИНАМИКИ

Гидродинамика рассматривает неустановившееся движение жидкости в 3–мерном течении, т. е. здесь учитываются еще и изменения скорости, кроме массовых сил и сил давления.

Задача гидродинамики – определить под действием заданных массовых сил движение каждой частицы жидкости и гидродинамические давления в каждой точке в каждый момент времени при заданных начальных и граничных условиях.

Будут следующие переменные:  $X, Y, Z, p(x, y, z, t), V_x, V_y, V_z$ .

Координаты  $x, y, z$  и время  $t$ .

Если учитывать сжимаемость жидкости (газа), то переменной является и плотность  $\rho$ .

Согласно задаче, переменными будут 5 названных  $x, y, z, t, \rho$ , т.е. необходимо иметь для решения 5 уравнений.

Это уравнения:

- 1) 3 уравнения динамики Эйлера;
- 2) уравнение неразрывности в общем виде;
- 3) уравнение состояния.

### 5.1. Динамическое уравнение Эйлера

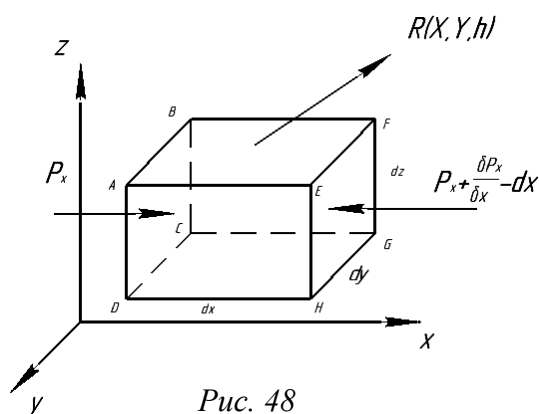


Рис. 48

В рассматриваемой жидкости выделим элемент объема в виде прямоугольного параллелепипеда с гранями  $dx, dy, dz$ , на который действуют массовая сила  $R(X, Y, Z)$  и сила давления  $p_x$  (рис. 48).

Рассмотрим движение жидкости вдоль оси  $x$ .

Силы инерции жидкости

$$F_{\text{ин}} = -ma = -\rho dX \cdot dY \cdot dZ \cdot \frac{dV_x}{dt}.$$

$X, Y, Z$  – единичные массовые силы, чтобы перейти к силе нужно умножить на массу  $-\rho \Delta W$ .

Уравнение равновесия

$$X \cdot \rho \Delta W - \frac{\partial p_x}{\partial x} dx dy dz - \rho \frac{\partial V_x}{\partial x} \Delta W = 0.$$

Делим на  $\rho \Delta W$  и получаем

$$X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p_x}{\partial x} = \frac{dV_x}{dt},$$

аналогично получим, проецируя на оси  $y$  и  $z$

$$y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p_y}{\partial y} = \frac{dV_y}{dt}, z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p_z}{\partial z} = \frac{dV_z}{dt}.$$

При движении идеальной жидкости давление в данной точке не зависит от угла наклона площадки, т. е.

$$p_x = p_y = p_z = p.$$

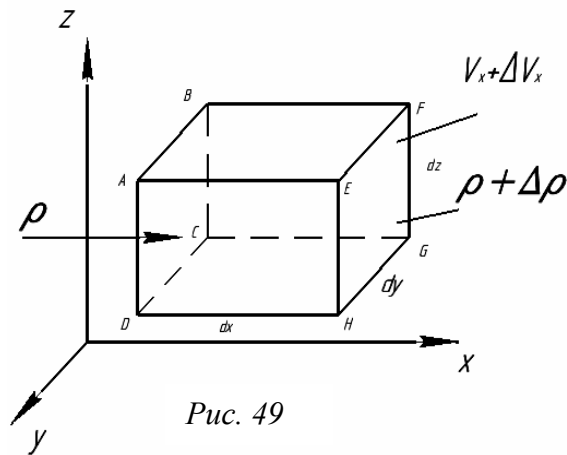
Уравнение примет вид

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p_x}{\partial x} &= \frac{dV_x}{dt} \\ Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p_y}{\partial y} &= \frac{dV_y}{dt} \\ Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p_z}{\partial z} &= \frac{dV_z}{dt} \end{aligned} \right\} \text{— система дифференциальных уравнений динамики}$$

жидкости Эйлера. Эти уравнения обращаются в уравнения статики Эйлера при

$$V \rightarrow (V_x, V_y, V_z) = \text{const.}$$

## 5.2. Уравнение постоянства расхода сжимаемой жидкости



Определим массу  $M_x^A$  жидкости, протекающей через грань  $ABCD$  с плотностью  $\rho$  и скоростью  $V_x$  (рис. 49)

$$M_k^A = \rho V_x dt \cdot dy \cdot dz,$$

где  $V_x dt = \Delta l$  – путь за время  $\Delta t$ ,  $dy \cdot dz$  – площадь грани.

Аналогично определим массу жидкости, протекающую через грань  $EFGH$ .

Учитывая сжимаемость, а это значит, что значения плотности и скорость жидкости различаются для левой и правой граней,  $\Delta V_x$  запишем через градиент скорости, тогда

$$V_x + \Delta V_x = V_x + \frac{\partial V_x}{\partial x} \cdot dx,$$

$\frac{\partial V_x}{\partial x}$  – градиент скорости вдоль оси  $Ox$ ;

$dx$  – изменение на участке  $dx$ .

Аналогично для плотности

$$\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx.$$

Тогда

$$\begin{aligned} M_x^E &= \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \rho \right) \cdot \left( V_x + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx \right) dt \cdot dy \cdot dz = \\ &= \left[ \rho V_x + V_x \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \rho \frac{\partial V_x}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{\partial V_x}{\partial x} (dx)^2 \right] dt \cdot dy \cdot dz = \\ &= V_x \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \rho \frac{\partial V_x}{\partial x} dx = \frac{\partial (V_x \cdot \rho)}{\partial x} dx, \end{aligned}$$

$\frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{\partial V_x}{\partial x} (dx)^2$  – величина второго порядка малости по сравнению с другими.

Тогда

$$M_x^E = \left[ \rho V_x + \frac{\partial (V_x \cdot \rho)}{\partial x} dx \right] dt \cdot dy \cdot dz.$$



Определим изменение массы жидкости, протекающей вдоль оси  $Ox$  за время  $dt$  через рассматриваемый объем

$$\Delta H_x = M_x^A - M_x^E = - \frac{\partial(V_x \cdot \rho)}{\partial x} dt \cdot dx \cdot dy \cdot dz ,$$

$$dx \cdot dy \cdot dz = \Delta W .$$

Рассуждая аналогично, для осей  $y$  и  $z$  получим

$$\Delta M_y = - \frac{\partial(V_y \cdot \rho)}{\partial y} dt \cdot dW ,$$

$$\Delta M_z = - \frac{\partial(V_z \cdot \rho)}{\partial z} dt \cdot dW .$$

Определим полное изменение массы жидкости, протекающей через объем  $\Delta M$ .

$$\Delta M = \Delta M_x + \Delta M_y + \Delta M_z ;$$

$$\Delta M = - \left[ \frac{\partial(V_x \cdot \rho)}{\partial x} + \frac{\partial(V_y \cdot \rho)}{\partial y} + \frac{\partial(V_z \cdot \rho)}{\partial z} \right] \cdot dt \cdot \Delta W .$$

Изменение массы жидкости с другой стороны за время  $dt$  можно определить, так как объем один и тот же:

$$\Delta M = \Delta \rho \Delta W ;$$

$$\Delta \rho = \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dt ;$$

$$\Delta M = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \Delta W .$$

Приравнивая эти изменения масс, можно записать

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(V_x \cdot \rho)}{\partial x} + \frac{\partial(V_y \cdot \rho)}{\partial y} + \frac{\partial(V_z \cdot \rho)}{\partial z} = 0 .$$

Это уравнение неразрывности для 3-мерного сечения.

Если не учитывать сжимаемость, тогда  $\rho = \text{const}$ , имеем

$\frac{\partial(V_x \cdot \rho)}{\partial x} + \frac{\partial(V_y \cdot \rho)}{\partial y} + \frac{\partial(V_z \cdot \rho)}{\partial z} = 0$  – уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости.

### 5.3. Понятие об уравнениях состояния сжимаемых жидкостей

Если речь идет о газах, то процесс изотермический ( $T=\text{const}$ ), а уравнение состояния является уравнением Бойля-Мариотта:

$$pW = \text{const.}$$

В других случаях имеются соответствующие формулы (адиабатический процесс, политропный процесс).

При рассмотрении жидкости конкретных зависимостей нет, и поэтому используется уравнение  $\rho = \text{const}$  – это значит, что задача решается без учета сжимаемости.

Решение задач гидродинамики в общем виде часто затруднено или невозможно из-за:

- 1) нелинейности дифференциальных уравнений;
- 2) отсутствия начальных и конечных условий.

### 5.4. Уравнение Громеки – Лэмба. Дифференциальное уравнение вихревого движения идеальной жидкости

$$dV_x = \frac{\partial V_x}{\partial t} dt + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx + \frac{\partial V_y}{\partial y} dy + \frac{\partial V_z}{\partial z} dz$$

разделим на  $dt$ , получим

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial V_x}{\partial x} V_x + \frac{\partial V_y}{\partial y} V_y + \frac{\partial V_z}{\partial z} V_z,$$

где  $\frac{\partial V_x}{\partial t}$  – местное ускорение частицы и может быть только при неустановившемся движении.

$\frac{\partial V_x}{\partial x} V_x + \frac{\partial V_y}{\partial y} V_y + \frac{\partial V_z}{\partial z} V_z$  – конвективные ускорения, от температуры не зависят, поэтому могут иметь место при установившемся режиме (рис. 50).

Теперь уравнение Эйлера вдоль оси  $Ox$  запишется так:

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial V_x}{\partial x} V_x + \frac{\partial V_y}{\partial y} V_y + \frac{\partial V_z}{\partial z} V_z +$$

$$+V_y \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) + V_z \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right)$$

при условии, что мы добавили и отняли следующие члены:

$V_y \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial x}$  к  $x$  – части уравнения, для  $y$  – составляющей уравнения это члены  $V_x \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial y}$ ; для  $z$  – составляющей  $V_x \frac{\partial V_x}{\partial z} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial z}$ .

Учитывая, что

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial x} = \frac{\partial (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2)}{\partial x} = \frac{\partial V^2}{2\partial x}, \quad V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 = V^2.$$

Рассмотрим физическую сущность членов полученного уравнения:

$$V_y \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} \right), V_z \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right).$$

$$V_y \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) = V_y (-\omega_z - \omega_z) = -2V_y \omega_z,$$

$$V_z \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) = V_z [\omega_y - (-\omega_y)] = 2V_z \omega_y.$$

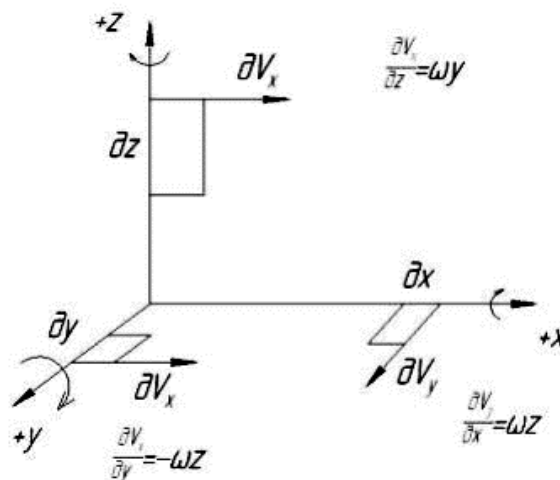


Рис. 50

Тогда можно записать:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial V^2}{2\partial x} - 2V_y\omega_z + 2V_z\omega_y, \\ Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial V_y}{\partial t} + \frac{\partial V^2}{2\partial y} - 2V_z\omega_x + 2V_x\omega_z, \\ Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial V_z}{\partial t} + \frac{\partial V^2}{2\partial z} - 2V_x\omega_y + 2V_y\omega_x. \end{aligned} \right\} \text{уравнения Громеки – Лэмба} \quad (1891).$$

Эти уравнения в более явном виде содержат гидродинамические величины. Они отличаются от уравнений Эйлера:

1. Выражают полную энергию жидкости.
2. В них видны местные и конвективные ускорения.

В общем виде уравнения Громеки - Лэмба не интегрируются. Интеграл этих уравнений для неустановившегося движения может быть найден только для безвихревого движения.

Проинтегрируем его для не вихревого движения.

Введем два понятия.

Массовые силы допускают потенциал, если существует функция,

$\frac{\partial u}{\partial x} = X; \frac{\partial u}{\partial y} = Y; \frac{\partial u}{\partial z} = Z$ . В этом случае функцию  $u$  называют потенциалом массовой силы.

Аналогично, если скорость  $V$  допускает потенциал, то существует такая функция  $\varphi$ , что называется потенциалом скорости.

Введя потенциал, решим уравнение вдоль оси  $OX$ :

$$\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial V^2}{2\partial x}; \\ \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial V^2}{2\partial x} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} \end{aligned}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( u - \frac{p}{\rho} - \frac{V^2}{2} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x}.$$

Все члены в скобке характеризуют энергию жидкости, они зависят от времени, но координат здесь нет. Мы можем проинтегрировать по координате  $X$ , получим

$u - \frac{p}{\rho} - \frac{V^2}{2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = c_t$  – это уравнение называется интегралом Лагранжа.

$c_t$  – постоянная времени и она различна для различных моментов времени.

Рассмотрим более частный случай – движение установившееся, т. е.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0,$$

тогда  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$  и  $c_t \rightarrow c = const.$

Получим

$$u - \frac{p}{\rho} - \frac{V^2}{2} = c - \text{интеграл Эйлера.}$$

Рассмотрим еще более частный случай, когда в качестве массовых сил действуют только силы тяжести, тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Y = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = Z = -g.$$

$\frac{\partial u}{\partial z} = Z = -g$ , интегрируем, получим

$$u = -gz + c',$$

подставим в интеграл Эйлера.

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} = -c - c' \rightarrow c_0,$$

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = const - \text{интеграл Бернулли.}$$

В заключение необходимо отметить: уравнения Громеки - Лэмба являются наиболее общими и универсальными, но они не учитывают вязкость. Существуют более общие уравнения, которые учитывают вязкость - это уравнения Навье - Стокса.

## 5.5. Связи между напряжениями и деформациями для упругого и твердого тел. Связь между скоростью деформации и напряжением для жидких тел

Рассматривая идеальное твердое тело изотропного характера, отметим, что по закону Гука наблюдается линейная зависимость между напряжениями и деформациями:

$$E_x^0 = \frac{\delta_x}{E}; E_y^0 = \frac{\delta_y}{E}; E_z^0 = \frac{\delta_z}{E}. \quad (1)$$

где  $E$  - модуль упругости (модуль Юнга),

$E_x^0$  - относительное удлинение в направлении  $x$  за счет нормального напряжения  $\delta_x$ .

При растяжении вдоль оси  $x$  нормальные напряжения будут также вызывать деформации в направлении оси  $x$ .

Дополнительная деформация  $E_x^{\prime}$ :

$$E_x^{\prime} = -nE_y^0 = -n\frac{\delta_y}{E}; \quad (2)$$

$n$  – коэффициент Пуассона.

Деформация  $E_x^{\prime\prime}$  под действием  $\delta_z$ :

$$E_x^{\prime\prime} = -nE_z^0 = -n\frac{\delta_z}{E}; \quad (3)$$

тогда

$$E_x = E_x^0 + E_x^{\prime} + E_x^{\prime\prime} = \frac{\delta_x}{E} - \frac{n}{E}(\delta_y + \delta_z). \quad (4)$$

Для всех трех направлений получим:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \frac{1}{E}[\delta_x - n(\delta_y + \delta_z)]; \\ E_y &= \frac{1}{E}[\delta_y - n(\delta_z + \delta_x)]; \\ E_z &= \frac{1}{E}[\delta_z - n(\delta_x + \delta_y)]; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Касательные же напряжения связаны со сдвиговыми деформациями посредством модуля сдвига (модуля упругости)  $G$ :

$$j_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; j_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; j_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}. \quad (6)$$

Получим зависимость линейную между напряжениями и деформациями.

Законы (5) и (6) содержат 2 модуля – модуль упругости при растяжении (модуль Юнга) и модуль упругости при сдвиге.

Так как эти два модуля связаны между собой, то соотношения между нормальными напряжениями и деформациями представим через модуль сдвига:

$$G = \frac{E}{2(1+n)}. \quad (7)$$

Объемная деформация представила в виде

$$G = \frac{1-2n}{E} (\delta_x + \delta_y + \delta_z). \quad (8)$$

Затем найдем осредненное значение  $\bar{\delta}$  как среднее арифметическое 3 нормальных напряжений:

$$\bar{\delta} = \frac{1}{3} (\delta_x + \delta_y + \delta_z). \quad (9)$$

Из соотношений (5), (7) и (8) получим

$$\delta_x = 2G \left( E_x + \frac{ne}{1-2n} \right). \quad (10)$$

Коэффициент Пуассона (n) исключаем, добавив равное нулю выражение в соотношение (10):

$$\bar{\delta} - \frac{1}{3} (\delta_x + \delta_y + \delta_z) = 0. \quad (11)$$

Так как рассматриваемое твердое упругое тело изотропно, то получим следующие соотношения для нормальных напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \delta_x - \bar{\delta} &= 2G \left( E_x - \frac{e}{3} \right), \delta_y - \bar{\delta} = 2G \left( E_y - \frac{e}{3} \right); \\ \delta_z - \bar{\delta} &= 2G \left( E_z - \frac{e}{3} \right); \end{aligned} \right\} \quad (11a)$$

Соответственно, для касательных напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yx} = \tau_{xy} &= G \left( \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \right); \\ \tau_{zy} = \tau_{yz} &= G \left( \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} \right); \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} &= G \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right); \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Соотношения между скоростями деформации (2) и напряжениями для ньютоновских жидкостей.

Опытные данные говорят о том, что напряжения в жидкостях зависят не от самой деформации, а от ее скорости изменения во времени. Поэтому предположим, что имеется пропорциональная связь линейного характера между напряжениями и скоростями деформации для ньютоновских жидкостей.

Например, рассматривая  $\delta_x - \bar{\delta} = 2G \left( E_x - \frac{e}{3} \right)$  и заменяя в нем модуль сдвига  $G$  на величину, которая выражает его размерность, получаем выражение для упругого твердого тела, подчиняющегося закону Гука,

$$\delta_x - \bar{\delta} = 2 \left( \frac{F}{L^2} \right) \left( E_x - \frac{e}{3} \right). \quad (11a)$$

Для ньютоновской жидкости подобное соотношение:

$$\delta_x - \bar{\delta} = 2 \left( \frac{FT}{L^2} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left( E_x - \frac{e}{3} \right). \quad (13)$$

Для сохранения правильной размерности новый коэффициент пропорциональности должен содержать время. Поэтому следует, что динамическая вязкость  $\mu$  в жидкости играет роль, аналогичную роли модуля сдвига для твердых тел с размерностью  $\left( \frac{FT}{L^2} \right)$ . В этом случае соотношение между напряжениями и скоростью деформации для жидкости имеет вид:

$$\delta_x - \bar{\delta} = 2\mu \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial e}{\partial t}; \quad (14)$$

Компонент  $\left( \frac{\partial E_x}{\partial t} \right)$  – скорость линейной деформации,

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (15)$$

Компонент  $\frac{\partial e}{\partial t}$  – скорость объемной деформации элемента жидкости:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \Delta \frac{\partial \delta}{\partial t} = \Delta v. \quad (16)$$

Для несжимаемой жидкости скорость объемной деформации ее элемента равно 0. Тогда уравнение несжимаемости:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \Delta v = 0; \quad (16a)$$



После подстановки (15) и (16) в (14) получаем, что нормальное напряжение:

$$\delta_x = \bar{\delta} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu(\Delta v). \quad (17)$$

Касательные напряжения, по аналогии, приобретают вид:

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right); \quad (18)$$

Остается выяснить в каком состоянии находятся термодинамическое давление  $p$  и среднее нормальное напряжение  $\bar{\delta}$ .

$$\bar{\delta} = -p = \frac{1}{3}(\delta_x + \delta_y + \delta_z). \quad (19)$$

(-) берется потому, чтобы давление было положительной величиной в случае сжатия

## 6. ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ГИДРОМЕХАНИКИ

### 6.1. Опытные исследования Рейнольдса

По характеру течения различают два режима течения жидкости:

- 1) ламинарный;
- 2) турбулентный.

Ламинарный режим – это безвихревое, слоистое, без перемешивания и пульсации скорости течение.

Турбулентный режим характеризуется перемешиванием масс жидкости, наличием переменных масс жидкости и поперечных скоростей в одномерном потоке.

Режим движения жидкости зависит от параметров (для круглой трубы);  $V$  – скорость;  $\nu$  – вязкость;  $d$  – диаметр трубы.

Это три основных фактора, определяющих режим движения жидкости, установлены Рейнольдсом при проведении опытов.

Он взял два сосуда с жидкостями различного цвета (рис.51). В трубке А наблюдал визуально за потоком. Он установил, что при некоторой скорости происходит переход от слоистого к турбулентному потоку и эта скорость:

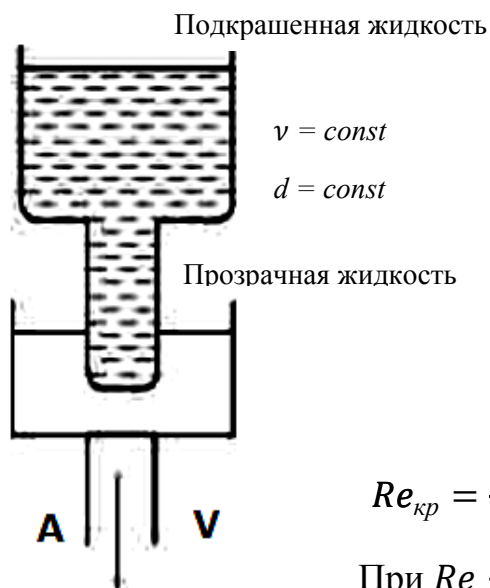


Рис. 51

$$V_{кр} = Re_{кр} \frac{\nu}{d},$$

где  $Re$  - число Рейнольдса.

Число Рейнольдса определяется параметрами потока, оно безразмерно и характеризует режим движения жидкости

$$Re = \frac{V \cdot d}{\nu}.$$

$$Re_{кр} = \frac{V_{кр}}{\nu} \approx 2320 \text{ — при нормальных условиях.}$$

При  $Re < Re_{кр}$  — режим ламинарный

При  $Re > Re_{кр}$  — режим турбулентный.

Граничная цифра 2320 может несколько меняться в зависимости от второстепенных факторов: вибрации, шероховатости, пульсации и ряда других.

## 6.2. Особенности ламинарного движения

Для простоты изложения будем рассматривать течение в круглых трубах.

Рассмотрим следующие задачи.

1. Закон распределение скорости по сечению ламинарного потока.
2. Интегральный (суммарный) расход потока.
3. Распределение касательных напряжений по сечению.
4. Потери напора, или путевые потери, представляющие собой потери давления по пути, необходимому для перемещения жидкости.

### *Распределение скоростей по сечению ламинарного потока*

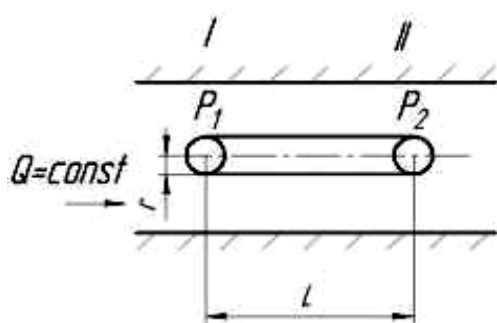


Рис.52

Выделим элемент — цилиндр длиной  $l$  и радиусом  $r$ . Рассмотрим силы, действующие на цилиндр вдоль движения жидкости (рис.52).

### Сила давления

$$(p_1 - p_2)\pi \cdot r^2.$$

### Сила сопротивления

$$(p_1 - p_2)\pi \cdot r^2 = 2\pi \cdot r \cdot \ell \cdot \tau.$$

### Касательная напряжения

$$\tau = -\mu \frac{dV}{dr};$$

тогда

$$(p_1 - p_2)r = -2\ell \cdot \mu \frac{dV}{dr};$$

$$(p_1 - p_2)rdr = -2\ell \cdot \mu dV.$$

Проинтегрируем и выразим  $V$ :

$$V = -\frac{(p_1 - p_2)}{2\mu \cdot \ell} \cdot \frac{r^2}{2} + C,$$

где  $C$  – постоянная интегрирования.

Для смачивающих жидкостей скорость на твердой поверхности равна нулю, т. е.  $r = r_0 V = 0$ ,

тогда

$$C = \frac{p_1 - p_2}{4\mu \cdot \ell} r_0^2.$$

Учитывая это, получим

$$V = \frac{p_1 - p_2}{4\mu \cdot \ell} (r_0^2 - r^2) - \text{закон Стокса, или закон распределения скоростей}$$

по сечению.

Если обозначить скорость на оси трубы через  $V_0$ , т. е.  $r = 0 V = V_0$ ,

то

$$V_0 = \frac{p_1 - p_2}{4\mu \cdot \ell} r_0^2.$$

Взяв отношение  $V$  и  $V_0$ , получим

$$V = V_0 \left( 1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right).$$

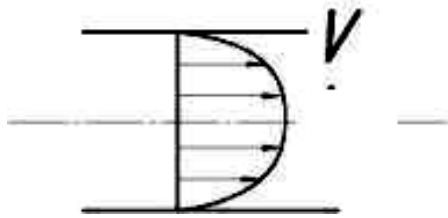


Рис.53

Два вывода:

1. Закон распределения скорости по сечению параболический (рис.53).

2. При ламинарном режиме скорость течения пропорциональна давлению, вызывающему это течение.

*Определение расхода при ламинарном режиме в круглой трубе*

Ламинарный расход протекает через кольцо (рис.54)

$$dW = V \cdot dS;$$

$$dS = 2\pi r dr,$$

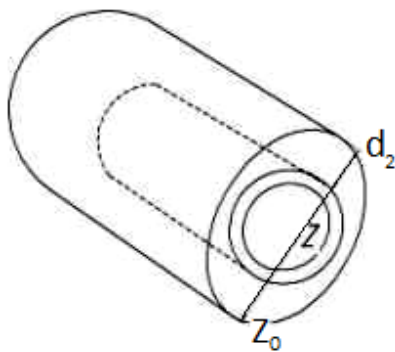


Рис. 54

где  $dW$  – изменение расхода;

$V$  – скорость.

$$V = \frac{p_1 - p_2}{4\mu \cdot \ell} (r_0^2 - r^2) 2\pi r dr.$$

Проинтегрируем в пределах от 0 до  $r_0$ :

$$W = \int_0^{r_0} \frac{p_1 - p_2}{4\mu \cdot \ell} r_0^2 2\pi r dr - \int_0^{r_0} \frac{p_1 - p_2}{4\mu \cdot \ell} 2\pi r^3 dr ==$$

$$\frac{(p_1 - p_2)}{4\mu \cdot \ell} 2\pi r_0^2 \frac{r_0^2}{2} - \frac{(p_1 - p_2)}{4\pi \cdot \ell} 2\pi \frac{r_0^4}{4}.$$

или

$$W = \frac{p_1 - p_2}{8\mu \cdot \ell} \pi r_0^4 - \text{уравнение Пуазейля.}$$

Здесь необходимо отметить, что  $W$  пропорционален давлению, вызывающему этот расход.

Обычно в машиностроительном гидроприводе ламинарное течение имеет место при течении через малые зазоры. Эти расходы называются расходами утечек, и они, согласно нашему уравнению, определяются очень просто:

$$W = \sigma(p_1 - p_2),$$

где  $\sigma = \frac{\pi r_0^4}{8\mu \cdot \ell}$  – критерий герметичности для круглой трубы.

Для других форм каналов имеются либо расчетные, либо статистические величины  $\sigma$ .

*Пример.* Иногда необходимо знать расход утечек (рис.55):

$$W_{ум1} = \sigma_1(p_1 - p_2):$$

$$W_{ум2} = \sigma_2 p_2, \text{ так как } p_{атм} = 0.$$

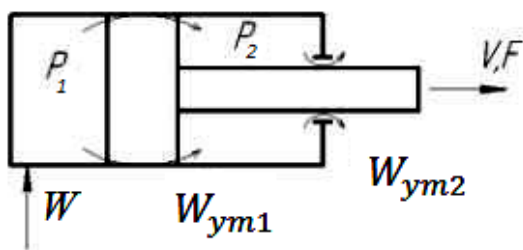


Рис.55

С другой стороны  $W$  трубы можно

определить через среднюю скорость

$$W = V_{ср} \pi r_0^2.$$

Приравниваем к уравнению Пузейля:

$$V \pi r_0^2 = \frac{(p_1 - p_2)}{8\mu \cdot \ell} \pi r_0^4,$$

$$V_{ср} = 0,5 V_0.$$

*Потери напора при ламинарном режиме течения в круглой трубе*

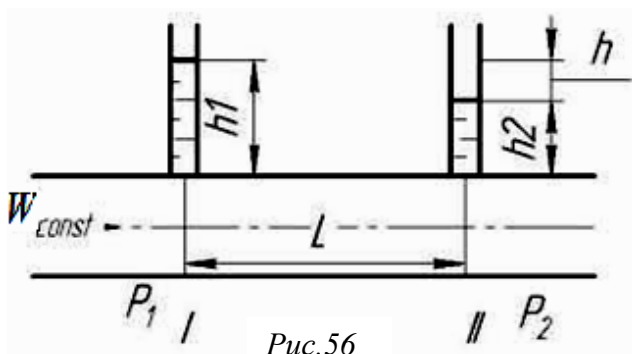


Рис.56

$$h_1 = \frac{p_1}{\gamma}; \quad h_2 = \frac{p_2}{\gamma}.$$

$h = \frac{p_1 - p_2}{\gamma}$  – пьезометрический уклон (рис.56)

Пьезометрический уклон – это потери напора (давления),

необходимые для перемещения жидкости на длину  $\ell$ .

На практике необходимо знать потери энергии в трубах, соединяющих различные элементы гидропровода.

Единым условием является наличие трения, т. е. жидкость вязкая.

Иногда рассматривают величину  $i = \frac{h}{\ell}$  – гидравлический уклон.

Запишем уравнение

$$W = \frac{(p_1 - p_2)}{8\mu \cdot \ell} \pi r_0^4 \cdot \frac{\gamma}{\gamma};$$

учитывая, что

$$\frac{p_1 - p_2}{\ell \gamma} = i,$$

$$W = i \frac{\gamma}{8\mu} \pi r_0^4;$$

с другой стороны,

$$W = V_{\text{ср}} \pi r_0^2;$$

$$i = V_{\text{ср}} \frac{8\mu}{\gamma r_0^2}.$$

Проведем преобразования:

$$h = \frac{p_1 - p_2}{\gamma}; i = \frac{h}{\ell}; r_0 = \frac{d}{2}; \nu = \frac{\mu}{\rho}; \rho = \frac{\gamma}{g};$$

$$\frac{h}{\ell} = \frac{8\mu}{\gamma \frac{d^2}{4}} V_{\text{ср}} = \frac{32\nu \cdot \rho}{\rho \cdot g \cdot d^2} V_{\text{ср}} = \frac{32\nu}{g \cdot d^2} V_{\text{ср}};$$

$$h = \frac{32\nu \cdot \ell}{d^2 g} V_{\text{ср}} \frac{2V_{\text{ср}}}{2V_{\text{ср}}} = \frac{64\nu \cdot \ell}{V_{\text{ср}} d^2} \cdot \frac{V_{\text{ср}}^2}{2g}.$$

Учитывая, что

$$\frac{V_{\text{ср}} d}{\nu} = Re,$$

$$h = \frac{64}{Re} \cdot \frac{\ell}{d} \cdot \frac{V_{\text{ср}}^2}{2g}$$

или

$$h = \xi \frac{V_{\text{ср}}^2}{2g},$$

где  $\xi = \lambda_{\text{л}} \frac{\ell}{d}$ ;

$\lambda_{\text{л}}$  – коэффициент путевых потерь.

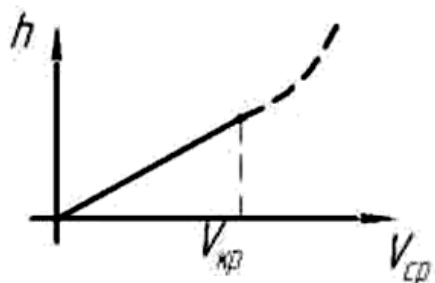


Рис. 57

Вывод:

1. Потери при ламинарном движении пропорциональны скорости в 1-й степени (рис.57) до  $V_{\text{кр}}$ .
2. Потери давления физически представ-

лены частью потерь скоростного напора

$$\Delta p_\ell = \xi \frac{V_{\text{ср}}^2}{2g} \gamma.$$

*Распределение касательных напряжений по сечению круглой трубы*

$$\tau = -\mu \frac{dV}{dr}; \quad V = \frac{(p_1 - p_2)}{4\mu \cdot \ell} (r_0^2 - r^2);$$

Тогда имеем

$$\tau = -\mu \frac{d}{dr} \left[ \frac{(p_1 - p_2)}{4\mu \cdot \ell} (r_0^2 - r^2) \right].$$

Берем производную по  $dr$

$$\tau = \mu \frac{(p_1 - p_2)}{4\mu \cdot \ell} 2r = \frac{(p_1 - p_2)}{2\ell} r. \quad (*)$$

При  $r = r_0$ ;  $\tau = \tau_0$  (у стенки трубы)

$$\tau_0 = \frac{(p_1 - p_2)}{2\ell} r_0;$$

тогда умножив и разделив (\*) на  $r_0$ , получим

$$\tau_0 = \frac{(p_1 - p_2)}{2\ell} r_0 \frac{r}{r_0} = \tau \frac{r}{r_0}.$$

Графически это выглядит так (рис.58):

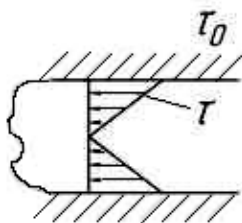


Рис.58

$\tau_0$  — определяет относительное скольжение слоев жидкости вдоль стенки трубы.

### 6.3. Турбулизация, или возмущения в потоке.

#### Турбулентный режим и его свойства

Турбулентный режим характеризуется интенсивным перемешиванием жидкости, пульсацией местной скорости и давления, вихревым течением и имеет место при скоростях больше критических.

Критическая скорость  $V_{кр} = 2320 \frac{\nu}{d}$ .

Получение основных закономерностей турбулентного режима сопряжено с большими трудностями, поэтому большинство этих зависимостей получены полуэмпирически или чисто эмпирически.

Основные отличия турбулентного режима от ламинарного в энергетическом смысле:

1. Касательные напряжения значительно больше, и они определяются квадратом градиента

$$\tau = -\mu \left( \frac{dV}{dr} \right)^2.$$

2. Распределение скоростей по сечению вдоль оси потока более равномерное, распределения подчиняются логарифмическому закону.

Средняя скорость  $V_{ср}$  составляет 80÷100 % от скорости на оси, а при ламинарном режиме она составляет 50 % скорости на оси (рис. 59):

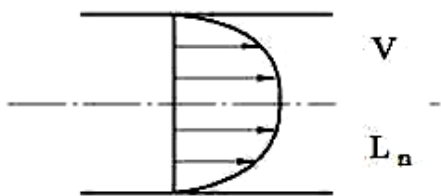


Рис.59

$$V_{ср} = \frac{W}{\pi r^2} = (0,8 \div 1)V_0.$$

Чем больше турбулентность, т.е. чем больше  $Re$ , тем равномернее распределяются скорости по сечению.

3. В соответствии с распределением скорости по сечению можно оценить распределение касательных напряжений (рис. 60).

4. Путевые потери на трение жидкости при турбулентном режиме больше, потому что они теперь пропорциональны квадрату скорости. Потери определяются по той же формуле, но с некоторыми отличиями.

$$h = \xi \frac{V_{ср}^2}{2g}$$

и  $\xi = \lambda_{т} \frac{l}{b}$ , но  $\lambda_{т}$  определяется иначе.

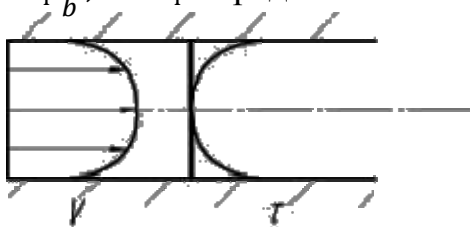


Рис. 60

Образованию турбулентности способствуют в значительной мере микронеровности и вибрация, поэтому



коэффициент  $\lambda$  аналитически получить тяжело, и он определяется эмпирически.

Существует много таких зависимостей, которые в большей или меньшей мере учитывают влияние факторов:

а) формула Блазиуса  $\lambda_T = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re}}$  – позволяет рассчитать потери без учета шероховатости и справедлива, когда число  $Re \leq 10^5$ ;

б) Формула Мизеса с учетом шероховатости и больших чисел  $Re$

$$\lambda_T = 0,0096 + \sqrt{\frac{\Delta M}{D}} + \sqrt{\frac{3}{Re}},$$

где  $\Delta M$  – это абсолютная величина микронеровностей стенки трубы по шкале Мизеса.

Перепад давления через потери

$$\Delta p_{\ell}^T = \lambda \frac{\ell}{D} \cdot \frac{V_{cp}^2}{2g} \gamma.$$

Что показано на рис. 61?

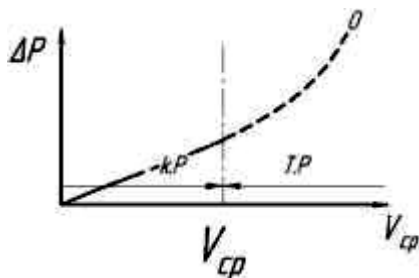


Рис. 61

1. Потери тем больше, чем больше длина трубы, по этой причине в производственных условиях трудно обеспечить питание от одной насосной станции, роботы и другие машины имеют автономную станцию.

2. Чем больше диаметр трубы, тем меньше потери. Это не значит, что всегда выгодно иметь большой диаметр трубы. Диаметр выбирается из условий так называемых допустимых скоростей течения жидкости:

а) для напорных трубопроводов

$$V_{cp}^{max} = (3 \div 5) \text{ м/с ;}$$

б) для труб всасывающих

$$V_{cp}^{max} = (1 \div 1,5) \text{ м/с ;}$$

в) в элементах управления и гидродвигателях эта скорость достигает до 60 м/с.

3. Влияние  $\nu$  на потери для ламинарного режима

$$\lambda_{\text{л}} = \frac{64}{Re} = \frac{64\nu}{V_{\text{ср}}d}$$

$\Delta p \propto \lambda_{\text{л}}$ , а следовательно,  $\Delta p \propto \nu$ .

4. Влияние температуры на потери.

Чем больше  $t^{\circ}$ , тем меньше  $\nu$  и тем ниже потери (рис.62):

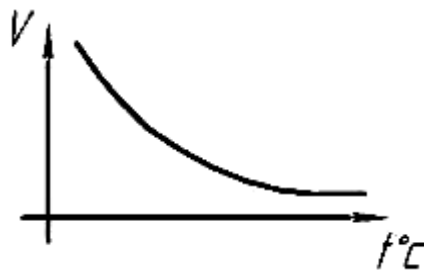


Рис. 62

#### 6.4. Характеристики местных сопротивлений

Кроме потерь в трубах, имеются и другие виды потерь.

В качестве местных сопротивлений необходимо рассматривать все, что не является длинными протяженными магистралями.

Это вентили, дроссели, элементы управления потоком, расширение и сужение труб, повороты и т. д.

Определим местные потери при турбулентном движении жидкости для случая ступенчатого внезапного расширения трубы (рис.63).

Выводы обобщим на все сопротивления.

Для определения потерь сопротивления применим теорему механики о равенстве количества движения импульсу сил, приложенных к телу:

$$F\Delta t = m\Delta V.$$

Распишем применительно к нашему случаю за время  $\Delta t$ :

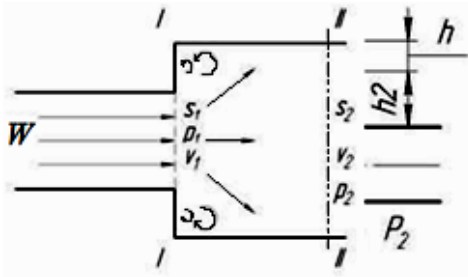
$$m\Delta t = W\Delta t \cdot \rho; \quad \Delta V = V_2 - V_1.$$

Силы в проекции на ось движения (силы давления):

$$F = (p_1 - p_2) \cdot S_2 ,$$

тогда

$$\rho Q \Delta t (V_2 - V_1) = (p_1 - p_2) S_2 \Delta t ;$$



заменяем

$$W = V_2 S_2; \quad \rho = \frac{\gamma}{g};$$

$$\frac{V_2(V_2 - V_1)}{g} = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} .$$

Рис. 63

Запишем уравнение Бернулли для сечений I и II, так как  $z_1 = z_2$

$$\frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + h_M ,$$

где  $h_M$  – потери при местном сопротивлении.

Поскольку движение турбулентное, то скорости примерно равно-мерно распределены по сечению,  $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = 1$ . Тогда преобразуем уравнение Бернулли:

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + h_M ;$$

учитывая для нашего случая, что  $\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{g}$ , перепишем уравнение:

$$\frac{V_2(V_2 - V_1)}{g} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + h_M .$$

Выразим  $h_M$

$$h_M = \frac{(V_2 - V_1)^2}{2g} = V_2^2 \frac{\left(\frac{V_1}{V_2} - 1\right)^2}{2g} .$$

Выразим одну скорость через другую:

$$V_1 \cdot S_1 = V_2 \cdot S_2; \quad V_1 = V_2 \frac{S_2}{S_1};$$

$$h_M = \frac{V_2^2}{2g} \left( \frac{S_2}{S_1} - 1 \right)^2.$$

$\left( \frac{S_2}{S_1} - 1 \right)^2 = \xi$  – коэффициент местных сопротивлений.

$$h_M = \xi_M \frac{V_2^2}{2g}.$$

Аналогично можно получить  $\xi$  для других местных сопротивлений. Но в то же время, эти коэффициенты аналитически определяются очень трудно для большинства видов местных сопротивлений.

Поэтому коэффициент  $\xi$  имеется в справочной литературе.

## 6.5. Простые и сложные трубопроводы и их расчет

Здесь будет представлен проверочный расчет, т. е. определены потери при известной конфигурации трубопроводов, длине, диаметре и т. д.

Возьмем простой трубопровод с местными сопротивлениями и с  $\varnothing = \text{const}$  (рис.64). Запишем уравнение Бернулли:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_{1\text{ср}}^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_{2\text{ср}}^2}{2g} + h_{\Sigma}.$$

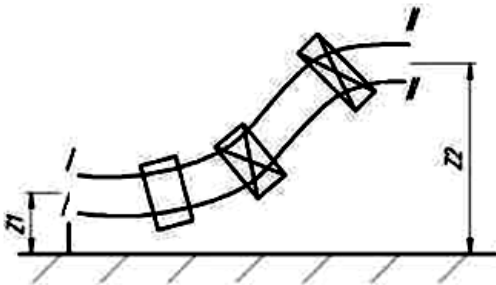


Рис. 64

Для простых трубопроводов при турбулентном режиме, когда  $d_1 = d_2 \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$ , а значит

$$V_{1\text{ср}} = V_{2\text{ср}},$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} + (z_1 - z_2) = h_{\Sigma}.$$

$$h_{\Sigma} = h_{\text{путевые}} + h_{\text{местные}}.$$

Теперь рассмотрим конкретные примеры.

*Пример 1.* Последовательное соединение трубопровода (рис.65).

$W_1 = W_2 = W_3 \dots W_n$ , отсюда

$$h_{\Sigma} = h_1 + h_2 + \dots h_n = \sum_{i=1}^n h_i.$$

Графически это выглядит так (рис.66):

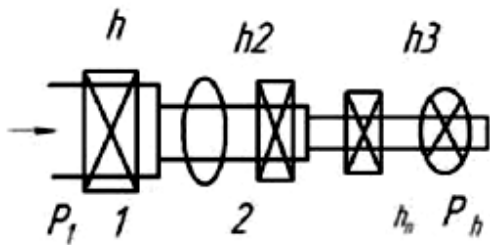


Рис. 65

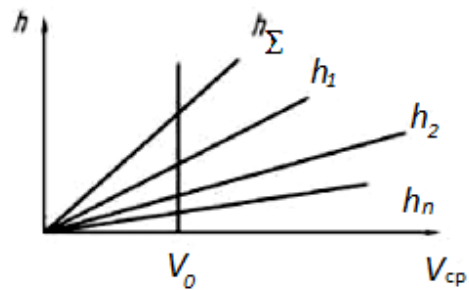


Рис. 66

Пример 2. Параллельное соединение трубопроводов (рис.67)

$$W = W_1 + W_2 + \dots + W_n = \sum_{i=1}^n W_i.$$

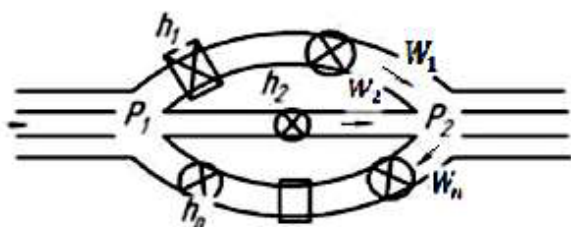


Рис. 67

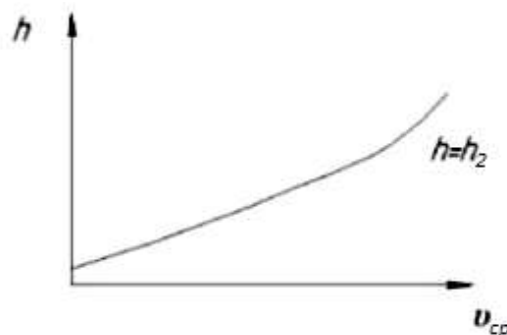


Рис. 68

Отсюда следует, что  $h_{\Sigma} = h_1 = h_2 = \dots = h_n$ .

Графически это выглядит так (рис.68).

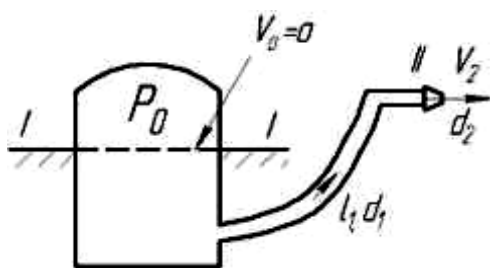


Рис. 69

Пример 3. Определить избыточное давление  $p_0$  в баке, необходимое для получения скорости  $V_2 = 20$  м/с течения воды из брандспойта в атмосферу (рис.69).

Длина шланга  $\ell = 40$  м;

$d_1 = 40$  мм;  $d_2 = 20$  мм; высота  $H = 5$  м;  $\xi_1 = 0,5$ ;  $\xi_2 = 3,5$ ;  $\xi_3 = 0,1$ ;

$\nu = 0,01$  стокса =  $0,01 \text{ см}^2/\text{с}$ ;  $g = 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$ .

### РЕШЕНИЕ

Необходимо определить режим движения. Для этого определим скорость  $V_1$  в трубе. Уравнение неразрывности:

$$V_2 \cdot \frac{\pi d_2^2}{4} = V_1 \cdot \frac{\pi d_1^2}{4}.$$

$$V_1 = V_2 \frac{d_2^2}{d_1^2} = 2 \cdot 10^3 \cdot \frac{4}{4^2} = 0,5 \cdot 10^3 \text{ см/с}.$$

Число Рейнольдса:

$$Re = \frac{V_1 d_1}{\nu} = \frac{0,5 \cdot 10^3 \cdot 4}{0,01} = 2 \cdot 10^5.$$

$$Re > Re_{кр} = 2320.$$

Значит, режим движения турбулентный.

Определим потери в трубе, пользуясь уравнением для турбулентного потока:

$$\lambda_T = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re}} = 0,015.$$

Запишем уравнение Бернулли для сечений I и II:

$$0 + \frac{p_0}{\gamma} + 0 = H + 0 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + h_{\Sigma},$$

считаем, что  $V_0 = 0$ ;  $p_2 = 0$ ;  $\alpha_2 = 1$ , так как поток турбулентный.

$$p_0 = \gamma \frac{V_2^2}{2g} + H \cdot \gamma + h_{\Sigma} \cdot \gamma.$$

Теперь определим потери:

$$h_{\Sigma} = h_{\text{пут}} + h_{\text{мест}} = \lambda_T \frac{\ell}{d_1} \cdot \frac{V_1^2}{2g} + \xi_1 \frac{V_1^2}{2g} + \xi_2 \frac{V_1^2}{2g} + \xi_3 \frac{V_2^2}{2g};$$

учтем, что

$$\xi_3 \frac{V_2^2}{2g} = \xi_3 \frac{d_1^4}{d_2^4} \cdot \frac{V_1^2}{2g}, \text{ так как } V_1 S_1 = V_2 S_2$$

из-за

$$V_2 = V_1 \frac{S_1}{S_2} = V_1 \cdot \frac{d_1^2}{d_2^2};$$

тогда

$$h_{\Sigma} = \left( \lambda_T \frac{\ell}{d_1} + \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \frac{d_1^4}{d_2^4} \right) \cdot \frac{V_1^2}{2g}.$$

$$p_0 = \gamma \frac{V_2^2}{2g} + H \cdot \gamma + h_{\Sigma} \cdot \gamma \left( \lambda_T \frac{\ell}{d_1} + \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \frac{d_1^4}{d_2^4} \right) \cdot \frac{V_1^2}{2g}.$$

$$p_0 = 5 \cdot 10^2 \cdot 10^{-3} + 10^{-3} \cdot \frac{4 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^3} + 10^{-3} \times \\ \times \left( 0,015 \frac{4000}{4} + 0,5 + 3,5 + 0,1 \frac{4^2}{2^4} \right) \cdot \frac{0,25 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^3} = 5,15 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

*Пример 4.* Определим потери давления в трубопроводе напорного гидрорпровода, по которому течет жидкость.

Задано

$$\ell = 5 \text{ м};$$

$$D = 1,5 \text{ см};$$

$$\nu = 10 \text{ сст} = 0,1 \text{ см}^2/\text{с};$$

$$\gamma = 0,8 \text{ г/см}^3 = 0,8 \cdot 10^{-3} \text{ кг/см}^3;$$

$$W = 36 \text{ л/мин} = 600 \text{ см}^3/\text{с}.$$

Найти  $p_{\ell}$ .

### РЕШЕНИЕ

1. Определим режим движения жидкости:

$$Re = \frac{\nu D}{\gamma} = \frac{4 \cdot W \cdot D}{\pi \cdot D^2 \cdot \nu} = \frac{4 \cdot 600}{\pi \cdot 1,5 \cdot 0,1} = 6 \cdot 10^3.$$

Значит, режим турбулентный.

2. Определим потери:

$$p_{\ell} = \gamma \lambda_T \frac{\ell}{D} \cdot \frac{V^2}{2g} = \gamma \frac{0,316}{\sqrt[4]{Re}} \cdot \frac{\ell}{D} \cdot \frac{W^2 \cdot 16}{2g\pi^2 D^4} = \\ = 0,8 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{0,316}{\sqrt[4]{0,6 \cdot 10^4}} \cdot \frac{500}{1,5} \cdot \frac{6^2 \cdot 10^4 \cdot 8}{10 \cdot \pi^2 \cdot 1,5^4} \approx 0,5 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

## 6.6. Истечение жидкости через малое отверстие в тонкой стенке

Будем рассматривать скорость и расход жидкости, текущей через отверстие в зависимости от площади отверстий и давлений.

Большинство элементов гидросистем оценивается так называемой гидравлической характеристикой, которая представляет собой зависимость расхода от давления при заданных геометрических параметрах.

Основные особенности течения жидкости через отверстия (рис.70):

1. Перепад давления на отверстии

$$\Delta p = p_1 - p_2.$$

2. Площадь струи меньше геометрической площади отверстия  $S_0 > S_c$ .

$\varepsilon = \frac{S_c}{S_0}$  – коэффициент сжатия струи.

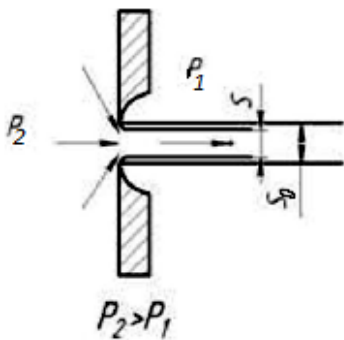


Рис. 70

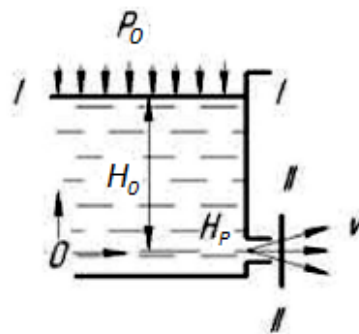


Рис. 71

Рассмотрим течение жидкости из емкости через отверстие (рис.71).

Примем  $V_1 \approx 0$  и  $\alpha_{II} = 1$ , так как считаем поток турбулентным. За уровень отсчета берем ось отверстия. Запишем уравнение Бернулли:

$$H_0 + \frac{p_0}{\gamma} + 0 = 0 + \frac{p_2}{\gamma} + h_0 + \frac{V^2}{2g}.$$

$$h_0 = \xi_{\text{отв}} \frac{V^2}{2g} \text{ – местные потери на отверстии.}$$

Обозначим  $H_0 + \frac{p_0}{\gamma} = \frac{p_H}{\gamma}$ , тогда  $\frac{p_H}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} = V^2 \frac{1}{2g} (1 + \xi_{\text{отв}})$ .

Выразим скорость, учитывая что  $p_H - p_2 = \Delta p$ ,



$$V = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_{\text{отв}}}} \cdot \sqrt{\frac{2g}{\gamma}} \cdot \sqrt{\Delta p}.$$

Обозначим  $\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_{\text{отв}}}}$  и назовем коэффициентом скорости, определяющим сопротивление отверстия.

Тогда

$$V = \varphi \cdot \sqrt{\frac{2g}{\gamma}} \cdot \sqrt{\Delta p}.$$

При истечении маловязкой, а в пределе идеальной жидкости

$$\xi_{\text{отв}} = 0, \quad \text{тогда} \quad \varphi = 1$$

и

$$V_{\text{ид.ж}}^{\text{теор}} = \sqrt{\frac{2g}{\gamma}} \cdot \sqrt{\Delta p}.$$

Можно представить  $\varphi$  и так:

$$\varphi = \frac{V}{V_{\text{ид.ж}}^{\text{теор}}} - \text{поэтому его называют коэффициентом скорости, и он для}$$

реальной жидкости меньше 1.

Расход получается следующим образом:

$$W = V \cdot S_c = \varepsilon S_0 V = \varepsilon \cdot \varphi S_0 = \varepsilon \cdot \varphi S_0 \cdot \sqrt{\frac{2g}{\gamma}} \cdot \sqrt{\Delta p}.$$

Обозначим  $\mu = \varepsilon \cdot \varphi$  – коэффициент расхода жидкости.

Тогда

$$W = \mu S_0 \cdot \sqrt{\frac{2g}{\gamma}} \cdot \sqrt{\Delta p}.$$

Это уравнение универсально. Оно справедливо для всех видов остроконечных отверстий (любой формы).

Для остроконечных отверстий величина местного сопротивления

$$\xi_{\text{отв}} = 0,06 \div 0,1.$$

Это значит, что величина  $\varphi$  очень немного отличается от 1.

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_{\text{отв}}}} = 0,9 \div 0,98.$$

В то же время,

$$\frac{V}{V_{\text{ид.ж}}^{\text{теор}}} \rightarrow 1.$$

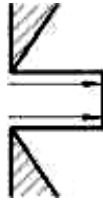


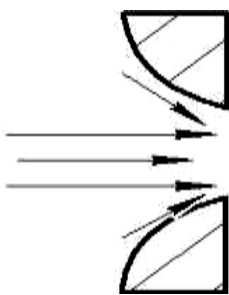
Рис. 72

Поэтому  $\varphi$  является коэффициентом распределения скорости по сечению, и поскольку он близок к 1, то скорость в струе имеет распределение, близкое к 1 (рис.72).

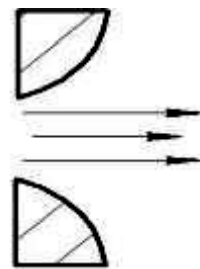
Если коэффициент распределения  $\varphi$  отличается на  $(2 \div 10)\%$  от идеального распределения скорости (рис.73), то это значит, что:

1. Течение жидкости через острую кромку всегда турбулентное.
2. Поскольку скорость распределения равномерна, то отсутствует градиент скорости, т. е. отсутствует скольжение слоев жидкости друг относительно друга и отсутствуют силы трения, хотя жидкость вязкая.

Поэтому в выражении для  $W$  отсутствует вязкость  $\varepsilon = 0,65 \div 0,75$  – для острых кромок.



$$\varepsilon = 0,98$$



$$\varepsilon = 0,65 \div 0,75$$

Рис. 73

На рис.74 показан безынерционный гидравлический диод.



Рис. 74

$$\mu = 0,98$$

$$\mu = 0,2 \div 0,4$$

$$\mu = \varepsilon \cdot \varphi \cong (0,6 \div 0,7).$$

Эта формула справедлива для отверстий с относительно небольшой их протяженностью, т. е.  $\frac{d}{l} > 4 \div 5$  (рис.75).

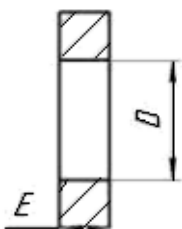


Рис.75

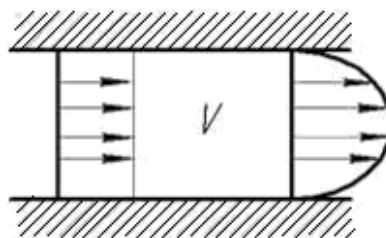


Рис.76

Если отверстие протяженное, то происходит перераспределение скорости по сечению, т. е. (рис. 76) градиент скорости, и есть трение, которое зависит от вязкости.

При очень малых площадях отверстий наблюдается изменение коэффициента расхода  $\mu$ , и его необходимо рассчитывать (рис.77). Квадратичным расходом называется, потому что зависимость расхода от давления квадратична, в отличие от течения жидкости при ламинарном режиме.

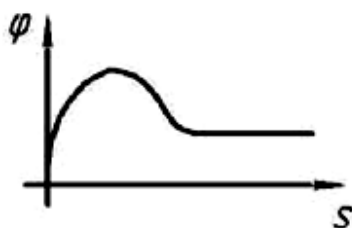


Рис. 77

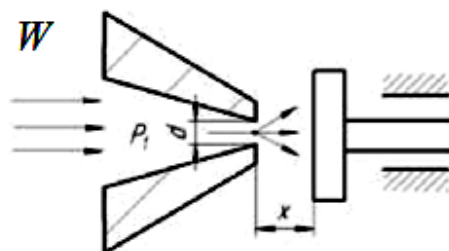


Рис. 78

$$W_{\text{лам}} = \sigma \Delta p.$$

*Пример.* Построить регулировочную и гидравлическую характеристики для гидравлического управляющего элемента сопло-заслонка (рис.80).

$$W = \mu \cdot \pi \cdot dx \sqrt{\frac{2g}{\gamma}} \cdot \sqrt{\Delta p},$$

$$p = p_1 - p_c(\rightarrow 0) = p_1,$$

$$W = f(x, p).$$

В этом случае говорят о двух характеристиках (рис. 79).

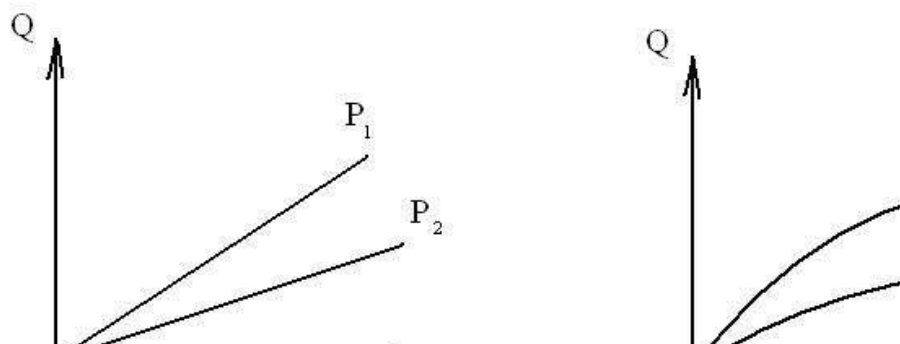


Рис. 79

- 1)  $W = f(x)/\Delta p = const$  – регулировочная;
- 2)  $W = f(\Delta p)/x = const$  – гидравлическая.

## 7. ФИЗИКА ГИДРАВЛИЧЕСКОГО УДАРА

Гидравлический удар – это колебательный процесс, возникающий в упругом трубопроводе с жидкостью при внезапном изменении скорости течения. Это быстро протекающий процесс, который характеризуется резким изменением давления  $p$  в трубе.

Он возникает при быстром открывании или закрывании регулирующего устройства.

При прямых гидравлических ударах скачки давления могут в 10 раз превышать давления при установившемся режиме.

Во многих случаях – это явление отрицательное, но иногда его используют в качестве источников для ударных механизмов.

Впервые это явление описал русский ученый Н.Е.Жуковский.

Изобразим механику этого процесса.

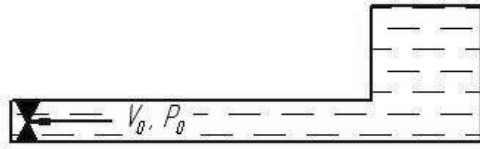


Рис. 80

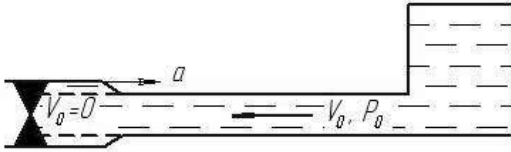


Рис. 81

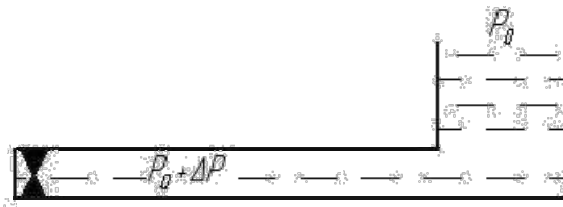


Рис. 82

шается, и возникает обратный процесс, стенки даже проходят первоначальное значение так как они имеют какую-то массу (рис.83)



Рис. 83

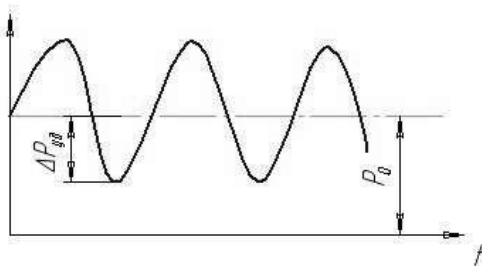


Рис. 84

Величину ударного давления  $\Delta p_{уд}$  найдем исходя из того, что кинетическая энергия жидкости переходит в работу деформации трубы и жидкости.

Кинетическая энергия движения жидкости

$$\frac{mV_0^2}{2}$$

После мгновенного закрытия крана будет происходить следующее (рис.80).

$p_0 + \Delta p_{уд}$  возникает ударная волна, которая распространяется по трубопроводу со скоростью  $a$  (рис.81).

В некоторый момент времени эта волна распределяется по всей трубе (рис.82).

Так как давление выравнивается, то труба уменьшается,

В опытах Жуковского датчик устанавливался на трубе.

При использовании маловязких жидкостей наблюдается до 12 циклов колебаний давления около среднего значения  $p_0$  (рис.84).

Ударная волна проходит до 12 раз туда и обратно.

Обозначим

$\ell$  – длину трубы;

$R$  – радиус трубы;

$\Delta R$  – изменение радиуса.

Определим массу жидкости

$$m = \pi R^2 \ell \rho.$$

Тогда кинетическая энергия

$$E = \frac{\pi}{2} R^2 \ell \rho V_0^2.$$

Работу деформации надо определить для двух элементов трубы и для жидкости.

Определим работу деформации для трубы (рис.85).

Работа деформации равна половине произведения силы на величину деформации:

$$A = \frac{1}{2} F \Delta R ;$$

$$F = \Delta P_{уд} 2\pi R \ell .$$

$\Delta R$  – величина деформации, тогда

можно записать

$$A = \frac{1}{2} \Delta P_{уд} 2\pi R \ell \Delta R .$$

Выразим  $\Delta R$  через известные параметры.

Из закона Гука  $\frac{\Delta R}{R} E_{тр} = \sigma ;$

с другой стороны,

$$\sigma = \frac{\Delta P_{уд} R}{\delta} ,$$

где  $\delta$  – толщина стенки трубы;

тогда

$$\Delta R = \frac{\Delta P_{уд} R^2}{\delta E_{тр}} .$$

Работа деформации для трубы

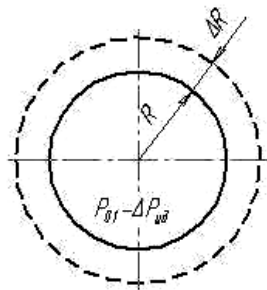
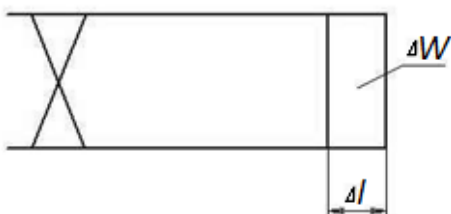


Рис. 85

$$A_{\text{тр}} = \frac{1}{2} \Delta P_{\text{уд}}^2 2\pi R^3 \ell \frac{1}{\delta E_{\text{тр}}}.$$

Определим работу деформации жидкости (рис.86).



$$A_{\text{ж}} = \frac{1}{2} F_{\text{ж}} \Delta \ell; \quad F_{\text{ж}} = \Delta P \pi R^2;$$

$$A_{\text{ж}} = \frac{1}{2} \Delta P_{\text{уд}} \pi R^2 \Delta \ell.$$

Рис. 86

Выразим через известные параметры:

$$\Delta W = \beta W_0 \Delta P_{\text{уд}} = \frac{1}{E_{\text{ж}}} W_0 \Delta P_{\text{уд}}; \quad W_0 = \pi R^2 \ell,$$

$$\Delta \ell = \frac{\Delta W}{\pi R^2} = \frac{\pi R^2 \ell \Delta P_{\text{уд}}}{E_{\text{ж}} \pi R^2} = \frac{\ell \Delta P_{\text{уд}}}{E_{\text{ж}}};$$

тогда

$$A_{\text{ж}} = \frac{1}{2} \Delta P_{\text{уд}} \pi R^2 \ell \frac{\Delta P_{\text{уд}}}{E_{\text{ж}}} = \frac{1}{2} \Delta P_{\text{уд}}^2 \frac{\pi R^2 \ell}{E_{\text{ж}}}.$$

Запишем общее уравнение

$$E_{\text{кин}} = A_{\text{тр}} + A_{\text{ж}}.$$

$$\frac{\pi}{2} R^2 \ell \rho V_0^2 = \frac{1}{2} \Delta P_{\text{уд}}^2 2\pi R^3 \ell \frac{1}{\delta E_{\text{тр}}} + \frac{1}{2} \Delta P_{\text{уд}}^2 \frac{\pi R^2 \ell}{E_{\text{ж}}};$$

$$\rho V_0^2 = 2\Delta P_{\text{уд}}^2 \frac{R}{\delta E_{\text{тр}}} + \frac{\Delta P_{\text{уд}}^2}{E_{\text{ж}}}$$

или

$$\Delta P_{\text{уд}} = V_0 \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{\frac{2R}{\delta E_{\text{тр}}} + \frac{1}{E_{\text{ж}}}}}.$$

Умножим и разделим на  $\sqrt{\rho}$ :

$$\Delta P_{\text{уд}} = \rho V_0 \frac{1}{\sqrt{\frac{2\rho R}{\delta E_{\text{тр}}} + \frac{\rho}{E_{\text{ж}}}}}$$

или

$\Delta P = \rho V_0 a$  – формула Жуковского,

где

$$a = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\rho R}{\delta E_{\text{тр}}} + \frac{\rho}{E_{\text{ж}}}}}.$$

Выясним физический смысл  $a$ . Размерность коэффициента  $a$  [м/с] – скорости.

Предположим, что труба абсолютно жесткая, т. е.  $E_{\text{тр}} = \infty$ , тогда  $a = \sqrt{\frac{E_{\text{ж}}}{\rho}}$  – это скорость распространения звука в жидкой среде.

Естественно предположить, что  $a = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\rho R}{\delta E_{\text{тр}}} + \frac{\rho}{E_{\text{ж}}}}}$  – представляет собой скорость распространения звука в упругой трубе, заполненной жидкостью.

Докажем это предположение.

Рассмотрим процесс упругой деформации (рис.87).

Пусть деформация распространяется за время  $dt$  на величину  $dx$ .

Применим теорему механики о равенстве импульса силы количества движения

$$Fdt = m(V_1 - V_2),$$

где  $F$  – сила давления.

Массовые силы здесь небольшие, и их не учитываем.

$$Fdt = (P_0 + \Delta P_{\text{уд}} - P_0)Sdt = \rho Sdx(V_0 - V), (V = 0)$$

$$\rho Sdx = m.$$

отсюда

$$\frac{\Delta P_{\text{уд}}}{\rho V_0} = \frac{dx}{dt}.$$

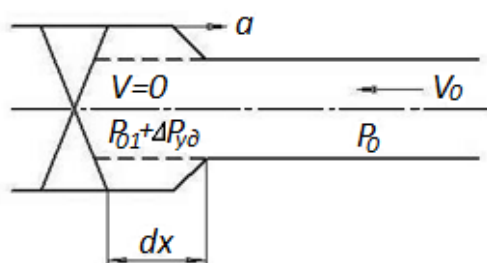


Рис. 87

$\frac{dx}{dt}$  – это скорость распространения ударной волны, или скорость деформации, тогда

$$\Delta P_{\text{уд}} = \rho a V_0,$$

что и требовалось доказать.



Для реальных жидкостей:

- вода –  $a \cong 1450$  м/с,
- минеральное масло –  $a \cong 1300$  м/с.

Полученные нами уравнения описывают так называемый прямой гидравлический удар. Он характеризуется тем, что начальная скорость гасится до 0.

При непрямом ударе остается некоторая скорость  $V_1$  (при неполном закрытии крана).

При непрямом гидравлическом ударе мы получили бы

$$\Delta P_{\text{уд}} = \rho a (V_0 - V_1).$$

Формула Жуковского справедлива для очень быстрого закрытия крана.

Доказано, что это справедливо в случаях, когда время закрытия

$$t < \frac{2\ell}{a},$$

где  $\ell$  – длина трубы;  $a$  – скорость звука.

При  $t < \frac{2\ell}{a}$  – непрямой удар.

Меры борьбы с гидравлическим ударом:

1) увеличение времени закрытия управляющим элементом  $t < \frac{2\ell}{a}$ .

Пример:  $\ell = 2$  м;  $a = 1200$  м/с;

$$t = \frac{2 \cdot 2}{1200} = 0,003 \text{ с};$$

2) волновые процессы при гидравлическом ударе – высокочастотные.

Поэтому для борьбы используются фильтры волновых частей;

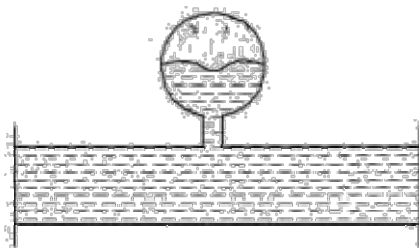


Рис.88

3)  $\beta_{\text{газа}} \gg \beta_{\text{ж}}$ , поэтому происходит демпфирование колебаний, т. е. поглощение энергии;

4) соответствующее повышение прочности слабых звеньев. т. е. где нельзя другими

способами избежать гидравлического удара.

5) Установка воздушных колпаков (рис.88)

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- Лойцянский А.Г. Механика жидкости и газа. -М.: Наука, 1978. - 736 с.
- Дейли Дж., Харлеман Д. Механика жидкости. - М.: Энергия, 1971. - 480 с.
- Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. - М.: Наука, 1969. – 712 с.
- Андрижиевский А. А. Механика жидкости и газа [Электронный ресурс]: учеб. пособие.– Минск: Вышэйшая школа, 2014. – 207 с. – Режим доступа URL: <http://www.iprbookshop.ru/35498.html>
- Крестин Е. А. Гидравлика [Электронный ресурс]: курс лекций. – Самара: СГАСУ, 2014. – 189 с. Режим доступа URL: <http://www.iprbooksshop.ru/29784.html>
- Алексеев Г. В., Бриденко И. И. Виртуальный лабораторный практикум по курсу „Механика жидкости и газа”[Электронный ресурс]: учеб. пособие. – Саратов: Вузовское образование, 2013. – 132 с. Режим доступа URL: <http://www.iprbooksshop.ru/16895.html>
- Замалеев З. Х. Основы гидравлики и теплотехники: учеб. пособие.- СПб.: Лань, 2014. – 352 с.
- Сыромаха П. И., Тотухов Ю. А., Бутко Г. Ю. Гидравлика и насосы: учеб-практ пособие к лабор. работам / СПбГТУРП. - СПб., 2012. – 58 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. ЖИДКИЕ ТЕЛА, ИХ СВОЙСТВА И ОСОБЕННОСТИ.....	4
1.1. Плотность жидкостей и газов и их зависимости.....	4
1.2. Вязкость жидкостей. Ньютоновские и неньютоновские жидкости.....	7
1.3. Сжимаемость жидкостей и газов.....	9
1.4. Растворение и растворимость газов в жидкостях.....	11
1.5. Устойчивость во времени вязких жидкостей.....	12
1.6. Теплопроводящие и теплоемкие свойства жидкостей.....	13
1.7. Кавитационные явления в жидкостях.....	13
1.8. Межфазное и поверхностное натяжение в жидкостях.....	14
1.9. Давление под непрямою поверхностью жидкости.....	21
1.10. Капиллярные процессы.....	24
1.11. Жидкости, используемые в гидромеханике.....	26
2. ХАРАКТЕРИСТИКИ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ В ЖИДКОСТЯХ.....	27
3. ПОКОЯЩИЕСЯ ЖИДКОСТИ. ГИДРОСТАТИКА.....	29
3.1. Основное уравнение гидростатики. Закон Паскаля.....	31
3.2. Измерение пьезометрического давления. Пьезометры и их применение.....	32
3.3. Давление на наклонную плоскость.....	33
3.4. Дифференциальное уравнение покоящейся жидкости и его интегрирование в простейшем случае.....	34
4. ОСОБЕННОСТИ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ. ГИДРОДИНАМИКА.....	38
4.1. Характеристики движущейся жидкости.....	39
4.2. Кинематика жидкости.....	39
4.3. Поток жидкости и его свойства.....	40
4.4. Расчет расхода и средней скорости потока.....	41
4.5. Уравнение неразрывности потока.....	42
4.6. Энергетический баланс и уравнение Бернулли для струйки идеальной жидкости.....	43
4.7. Уравнение Бернулли для потока реальной вязкой жидкости.....	47

4.8. Теория подобия и ее применение в гидродинамике. Физический смысл основных критериев .....	52
4.9. Критерии подобия Рейнольдса, Фруда, Эйлера и Вебера .....	56
5. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ БАЗА ГИДРОДИНАМИКИ .....	61
5.1. Динамическое уравнение Эйлера .....	61
5.2. Уравнение постоянства расхода сжимаемой жидкости .....	63
5.3. Понятие об уравнениях состояния сжимаемых жидкостей .....	65
5.4. Уравнение Громеки – Лэмба. Дифференциальное уравнение вихревого движения идеальной жидкости .....	65
5.5. Связи между напряжениями и деформациями для упругого и твердого тел. Связь между скоростью деформации и напряжением для жидких тел .....	69
6. ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ГИДРОМЕХАНИКИ .....	72
6.1. Опытные исследования Рейнольдса .....	72
6.2. Особенности ламинарного движения .....	73
6.3. Турбулизация, или возмущения в потоке. Турбулентный режим и его свойства .....	78
6.4. Характеристики местных сопротивлений .....	81
6.5. Простые и сложные трубопроводы и их расчет .....	83
6.6. Истечение жидкости через малое отверстие в тонкой стенке .....	87
7. ФИЗИКА ГИДРАВЛИЧЕСКОГО УДАРА .....	91
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....	97

Учебное издание

Бутко Георгий Юрьевич  
Никифоров Аркадий Олегович

## **МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА**

Учебное пособие

Техн. редактор Л.Я.Титова  
Корректор Н.П.Новикова

Темплан 2018 г., поз. 26

---

Подп. к печати 17.05.18      Формат 60x84/16. Бумага тип. № 1.  
Печать офсетная. 6,5 уч.-изд. л; 6,5 усл. печ. л. Тираж 100 экз. Изд. № 26.  
Цена «С». Заказ

---

Ризограф Высшей школы технологии и энергетики СПбГУПТД, 198095,  
Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4.