

**А. Г. Николаева, А. В. Терешкин,
К. Г. Аркина, О. Б. Аширметова,
В. Е. Соусов, Е. П. Бородина**

МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ УПРАВЛЕНЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Учебное пособие

**Санкт-Петербург
2023**

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Санкт-Петербургский государственный университет
промышленных технологий и дизайна»
Высшая школа технологии и энергетики

А. Г. Николаева, А. В. Терешкин,
К. Г. Аркина, О. Б. Аширметова,
В. Е. Соусов, Е. П. Бородина

МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ УПРАВЛЕНЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Учебное пособие

Утверждено Редакционно-издательским советом ВШТЭ СПбГУПТД

Санкт-Петербург
2023

УДК 338.45
ББК 65.301
М 54

Рецензенты:

кандидат экономических наук, доцент, заведующий кафедрой экономики и организации производства Высшей школы технологии и энергетики Санкт-Петербургского государственного университета промышленных технологий и дизайна

Е. М. Фрейдкина;

доктор экономических наук, профессор, профессор Института передовых производственных технологий ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»

П. А. Аркин;

кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа ФГБОУ ВО «Российский государственный педагогический университет имени А. И. Герцена»

М. Я. Якубсон

Николаева, А. Г.

М 54 Методы принятия управленческих решений: учеб. пособие / А. Г. Николаева, А. В. Терешкин, К. Г. Аркина, О. Б. Аширметова, В. Е. Соусов, Е. П. Бородин. — СПб.: ВШТЭ СПбГУПТД, 2023. — 131 с.

ISBN 978-5-91646-341-5

Учебное пособие соответствует программам и учебным планам дисциплины «Методы принятия управленческих решений» для студентов, обучающихся по направлению подготовки 38.02.03 «Менеджмент», профиль «Логистика и управление цепями поставок».

Учебное пособие имеет учебно-методическое назначение, в нём рассмотрены теоретические аспекты методов принятия управленческих решений и основные методы теории игр при принятии управленческих решений: матричные игры, биматричные игры, игры с природой.

Учебное пособие предназначено для подготовки бакалавров, может быть использовано магистрами, а также заинтересованными научными сотрудниками и специалистами.

Научная специальность 5.2.3 – Региональная и отраслевая экономика.

УДК 338.45
ББК 65.301

ISBN 978-5-91646-341-5

© ВШТЭ СПбГУПТД, 2023
© Николаева А. Г., Терешкин А. В.,
Аркина К. Г., Аширметова О. Б.,
Соусов В. Е., Бородин Е. П., 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1. СУЩНОСТЬ И ХАРАКТЕРНЫЕ ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЙ	5
1.1. Сущность понятия «принятие решения»	5
1.2. Процесс принятия управленческого решения	8
1.3. Основные концепции и принципы управленческих решений	10
Вопросы для самоконтроля	12
2. СИСТЕМНЫЙ ПОДХОД К ПРИНЯТИЮ РЕШЕНИЙ	13
2.1. Системный анализ	13
2.2. Внешняя среда и разработка управленческих решений	14
2.3. Методы разработки управленческих решений	17
Вопросы для самоконтроля	19
3. ОРГАНИЗАЦИЯ РАЗРАБОТКИ И ВЫПОЛНЕНИЯ УПРАВЛЕНЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ	20
3.1. Организация разработки управленческих решений	20
3.2. Управленческие решения и ответственность	22
3.3. Контроль реализации управленческих решений	24
3.4. Факторы качества и эффективность управленческих решений	25
Вопросы для самоконтроля	27
4. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ИГР И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В МЕТОДАХ ПРИНЯТИЯ УПРАВЛЕНЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ	28
5. МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ	31
5.1. Нижняя и верхняя цена игры. Чистые стратегии. Седловая точка	31
5.2. Смешанные стратегии	37
5.3. Мажорирование стратегий по строкам и столбцам	48
5.4. Метод решения матричных антагонистических игр $2 \times n$ и $m \times 2$	52
5.5. Приведение матричной игры к паре двойственных задач линейного программирования	60
6. БИМАТРИЧНЫЕ ИГРЫ	72
6.1. Смешанные стратегии. Равновесие по Нэшу	72
6.2. Оптимальность по Парето	84
7. ИГРЫ С ПРИРОДОЙ	88
ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ВАРИАНТЫ	100
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	129

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Методы принятия управленческих решений» направлена на формирование у обучающихся профессиональных компетенций.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

Знать: этапы, инструменты и методы принятия организационно-управленческих решений, принципы регламентации управленческой деятельности, особенности процесса принятия управленческих решений в операционной (производственной) деятельности, основные стратегии принятия решений; показатели социально-экономической эффективности работы предприятия, практику их применения.

Уметь: применять знания по менеджменту и организации управления, методы моделирования и оптимизации социально-экономических процессов в практической деятельности, находить оптимальные организационно-управленческие решения и в полной мере нести за них ответственность с позиций социальной значимости принимаемых решений, применять методы принятия решений в управлении операционной (производственной) деятельностью организаций, участвовать в управлении проектом, программе внедрения технологических и продуктовых инноваций или программе организационных изменений и прогнозировать возможные социально-экономические последствия реализации организационно-управленческих решений, разрабатывать и обосновывать предложения по их совершенствованию.

Владеть: использованием формализованных и неформализованных методов принятия организационно-управленческих решений в профессиональной деятельности, моделей принятия типовых решений, нахождения организационно-управленческих решений, нести за них ответственности с позиций социальной значимости принимаемых решений, методами принятия решений в управлении операционной (производственной) деятельностью организаций, участия в управлении проектом, программой внедрения технологических и продуктовых инноваций или программой организационных изменений, методиками оценки эффективности управленческих решений, способами и инструментами корректировки принимаемых управленческих решений.

Принятие решений – это задача руководителя любого уровня, в его подготовке принимают участие сотрудники данной и смежной организаций, а также консультанты. Принятие решений – это функция руководителя, реализуемая в процессе управления. Дисциплина «Методы принятия управленческих решений» объективно востребована управленческими кадрами, поскольку она формирует представления и навыки обучающихся о принципах, методах, технологии и альтернативности принятия решений в различных условиях объективной реальности.

1. СУЩНОСТЬ И ХАРАКТЕРНЫЕ ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЙ

1.1. Сущность понятия «принятие решения»

Принятие решений непосредственно связано с целенаправленной деятельностью человека. В личной жизни каждый человек принимает решения о выборе профессии, устройстве семьи, проведении отдыха, распределении бюджета и т. п. Формирование и выбор этих решений, как правило, производятся эмпирически: путем логического мышления и интуиции.

В то же время человек готовит и принимает различные решения в рамках своей служебной деятельности. Такая деятельность характеризует труд руководителя, который как лично принимает решения, так и организует работу сотрудников по подготовке и реализации тех или иных решений. В основу принятия решений руководителем должны быть положены научные основы и методы.

В теории принятия решений широко используется термин «лицо, принимающее решение» – ЛПР. Это понятие является собирательным. Это может быть одно лицо – индивидуальное ЛПР или группа лиц, вырабатывающих коллективное решение, – групповое ЛПР. Ошибки в принятии решений могут привести к большим негативным последствиям, т. к. решение касается не только одной личности, а чаще всего относится к подразделению или организации в целом, поэтому закономерным является требование повышения эффективности управленческих решений на основе научного подхода к их формированию и выбору. Повышение качества решений, принимаемых руководителями и сотрудниками, является важнейшим резервом улучшения всей управленческой деятельности.

Понятие «принятие решения» трактуют в узком и широком смысле. В узком смысле – это заключительный акт деятельности по выявлению и анализу различных вариантов, направленный на выбор и утверждение лучшего варианта решения. Также решение можно трактовать как результат выбора, тогда оно представляет собой предписание к действию.

В широком смысле принятие решения – это процесс, протекающий во времени, осуществляемый в несколько этапов. Принятие решения – это выбор одного курса действия, одной альтернативы из ряда имеющихся. Если нет альтернатив, то нет выбора и, следовательно, нет и решения.

Управленческое решение представляет собой продукт управленческого труда, а его принятие – процесс, ведущий к появлению этого продукта. Принятие решений в организации характеризуется как:

- сознательная и целенаправленная деятельность, осуществляемая человеком;
- поведение, основанное на фактах и ценностных ориентациях;
- процесс взаимодействия членов организации;
- выбор альтернатив в рамках социального и политического состояния организационной среды;
- часть общего процесса управления;

- неизбежная часть ежедневной работы менеджера.

Управленческое решение (УР) по сути творческий акт субъекта управления, определяющий программу деятельности коллектива по эффективному разрешению назревшей проблемы на основе знания объективных законов функционирования управляемой системы и анализа информации об ее состоянии. Т.е. УР – это выбор, который должен сделать руководитель, чтобы выполнить обязанности, обусловленные занимаемой им должностью. Цель УР – обеспечение движения к поставленным перед организацией задачам. Под технологией разработки решений будем понимать процесс преобразования имеющихся у менеджера сведений, данных, информации о возникшей перед ним проблеме или поставленной ему задаче в точно сформулированное решение, в котором будет подробно указано: кому, что, когда, где и с помощью чего надлежит сделать.

Объектом исследования разработки управленческих решений (РУР) является ситуация принятия решений или так называемая проблемная ситуация.

Предметом исследования выступают общие закономерности РУР в проблемных ситуациях, а также закономерности, присущие процессу моделирования основных элементов проблемной ситуации.

УР классифицируются по нескольким взаимосвязанным признакам:

- по субъектам управления – государственные и хозяйственные органы, общественные организации;
- по сфере действия – социальные, экономические, технические, политические, военные и т. д.;
- по продолжительности действия – долго-, средне- и краткосрочные;
- по масштабности решаемых вопросов – общие и частные;
- по объекту воздействия – внутренние и внешние;
- по принципу разработки и принятия – единоличные и коллегиальные;
- по функциональной направленности – плановые, организационные, координационные, координирующие, регулирующие, контролирующие;
- по форме выражения – письменные и устные;
- по причинам возникновения – предписывающие, ситуационные, сезонные, инициативные;
- по характеру действия – рекомендации, нормативные акты, директивы;
- по степени неопределенности – решения в условиях определенности, риска и неопределенности;
- по уровню творчества – рутинные и творческие;
- по степени повторяемости – периодически повторяющиеся, непериодические, уникальные;
- по функциям управления – плановые, организационные, мотивационные, контрольные;
- по подходу к принятию – интуитивные, основанные на суждениях, рациональные.

Реальные решения одновременно могут относиться к различным типам решений.

Программируемые решения направлены на решение сильно структурированных стандартных проблем. Они являются результатом реализации определенных шагов и действий. Как правило, число возможных альтернатив ограничено, и используется апробированный алгоритм принятия решений. К программируемым решениям могут быть отнесены определенные типы рутинных решений. Если при принятии программируемых решений используются математические методы, то их также можно отнести к формализованным решениям.

Непрограммируемые решения принимаются в ситуациях, которые в определенной мере являются новыми, слабо структурированными, предполагают учет неизвестных факторов, они плохо поддаются формализации. К числу таких решений относятся творческие, уникальные решения.

Творческие решения основываются на нетрадиционных подходах, на умении нестандартно взглянуть на возникшую проблему. Для них обычно неизвестны заранее все имеющиеся альтернативы, невозможно использовать прежний опыт. Творческий подход используется при выборе направлений развития организации, разработке стратегических планов, различных комплексных программ, принятии уникальных решений.

Интуитивные решения – это выбор, сделанный только на основе ощущения того, что он правилен. ЛПР при принятии решения не использует определенные методы, не производит сознательную оценку вариантов решений. Интуитивное решение основывается на так называемом шестом чувстве или озарении.

Когда ЛПР принимает решение на основе прошлого опыта, проектирования прошлых решений на ситуацию данного момента, использует метод аналогии, прецедента, здравый смысл, то такие решения называются решениями, основанными на суждениях. Чрезмерная ориентация ЛПР на прежний опыт порой приводит к принятию традиционных решений, к исключению из рассмотрения новых альтернатив.

Рациональные решения принимаются исходя из строгой логики процесса поиска решения, основываются на использовании научных методов.

Процесс управления состоит из циклически повторяющейся во времени последовательности видов управленческой деятельности, которые получили название функций управления. В качестве наиболее общих агрегированных функций управления обычно рассматривается планирование, организация, мотивация и контроль. Каждая из этих функций в свою очередь представлена совокупностью более частных функций, при выполнении которых принимаются определенные решения. Более подробно можно посмотреть в литературе, представленной в библиографическом списке.

Важной особенностью схемы процесса принятия решения, влияющей на формулирование задачи принятия решения, является подразделение этапа непосредственного принятия решения на две операции: выработка рекомендаций со стороны специалистов – системных аналитиков относительно выбора лучшего решения (предварительное решение) и

принятие окончательного варианта решения непосредственно ЛПР. Системные аналитики (специалисты, осуществляющие сбор информации и ее анализ, проведение расчетов) предлагают свои рекомендации на основе научных методов, стремясь свести к минимуму субъективизм оценок. ЛПР преломляет рекомендации через свое субъективное восприятие, поэтому принятие решения не обязательно совпадает с предоставленными рекомендациями.

При принятии решений учитываются как управляемые, так и неуправляемые переменные (факторы). Первые находятся в распоряжении ЛПР и, прежде всего, характеризуют способы использования ресурсов для достижения поставленных целей. Вторые характеризуют заданные внешние и внутренние условия, не являющиеся инструментом управления при принятии решения (правовые, финансовые и др. ограничения, имеющиеся производственные и кадровые возможности и т.п.), но оказывающие сильное влияние на выбор решения.

1.2. Процесс принятия управленческого решения

В самой общей форме любая задача может быть представлена в виде «дано...», «требуется определить...». Для индивидуального ЛПР задача принятия решений может быть записана в следующем виде:

$$(C, T, R, / C_d, P, Ц, O, A, K, f, A^*), \quad (1.1)$$

где слева от вертикальной черты расположены символы, описывающие известные, а справа – неизвестные элементы задачи:

С – исходная проблемная ситуация;

Т – время для принятия решения;

Р – потребные для принятия решения ресурсы;

С_д – доопределенная проблемная ситуация;

П – множество предположений (гипотез) о развитии ситуации в будущем, как частный случай может использоваться одно предложение;

Ц – множество целей, на достижение которых направлено решение, как частный случай решение может быть направлено на достижение одной цели;

О – множество ограничений;

А – множество альтернативных вариантов решения (как минимум два);

К – множество критериев выбора наилучшего решения, как частный случай может использоваться один критерий;

f – функция предпочтения ЛПР, включающая как объективные критерии из множества К, так и личные субъективные предпочтения ЛПР;

A* – оптимальное решение.

В ряде случаев время и ресурсы на принятие решения могут быть неизвестны и подлежат определению самими ЛПР и системными аналитиками. Тогда необходимо располагать символы Т и Р в формуле справа от вертикальной черты. Если исходная проблемная ситуация С определена с уровнем конкретности, достаточным для принятия решения, то ее доопределения не требуется, и С_д справа от вертикальной черты отсутствует.

Ресурсы, необходимые для реализации отдельных вариантов решений, входят во множество ограничений O , кроме того, они учитываются в множестве K в качестве одного из основных критериев.

Под проблемой в теории принятия решений понимается разница между фактическим и желаемым состоянием объекта принятия решения. Проблема всегда связана с определенными условиями и причинами ее возникновения, которые обобщенно называются ситуацией. Например, проблема, связанная с необходимостью обновления ассортимента выпускаемой продукции, по-разному звучит для передовых и отсталых в технологическом плане предприятий, ее решение зависит от возможности привлечения и использования необходимых ресурсов. Совокупность проблемы и ситуации образует проблемную ситуацию. Исходная проблемная ситуация C описывается содержательно и, если это возможно, совокупностью количественных характеристик. Описание проблемной ситуации должно заканчиваться краткой содержательной формулировкой проблемы, которую необходимо решить.

В качестве ресурсов P для нахождения оптимального решения (но не его реализации) могут использоваться знания и опыт ЛПР, системных аналитиков и экспертов, научно-технический и информационный потенциал организации.

Для четкого определения вариантов устранения проблемной ситуации необходимо сформулировать множество целей C . Реальные задачи, как правило, многоцелевые, и только в отдельных частных случаях может формулироваться единственная цель.

Всегда необходимо четко формулировать ограничения O (финансовые, материальные, кадровые, правовые и т. п.). Для достижения множества целей формируется множество альтернативных вариантов решений A , из которых должно быть выбрано единственное оптимальное или приемлемое решение A^* . В множестве возможных решений может включаться и решение о бездействии, при котором сохраняется проблемная ситуация. Решение описывается содержательно и формально – набором определенных характеристик, в число которых обязательно включают также ресурсные характеристики.

Множество критериев K используется для оценки вариантов решений по достижению целей в условиях выбранной ситуации и их ранжирования по приоритетам. С помощью K можно получить абсолютную и относительную оценку решений. Абсолютная оценка решений может быть произведена только в частных и весьма редких случаях.

Выбор окончательного наилучшего решения A^* производится ЛПР на основе своей функции предпочтения f .

Таким образом, задачу принятия решения ЛПР можно кратко сформулировать следующим образом. В условиях проблемной ситуации C , располагаемого времени T и ресурсов P необходимо доопределить ситуацию, получив S_d , сформулировать множество целей C , ограничений O , альтернативных решений A , произвести оценку решений и найти оптимальное решение A^* из множества A , руководствуясь сформулированными критериями выбора K и функцией предпочтения ЛПР f .

1.3. Основные концепции и принципы управленческих решений

Концепция – это обобщенная система взглядов на рассматриваемый объект или явление, представление о том, как подходить к восприятию и изучению этого объекта (например, концепция мироздания, эволюционного развития). Принцип – это то, чем обязательно следует руководствоваться активно действующему субъекту в его деятельности. С позиции теории принятия решений неважно, какая это деятельность: теоретическая или практическая. Наиболее значимые принципы управления и теории принятия решений (ТПР): принцип главного звена в управлении, единоначалия, цели, свободы выбора решений.

Концепция «системы» отражает представления о единстве мира, о всеобщей связи и взаимной обусловленности процессов и явлений материального мира. Согласно этой концепции при осуществлении актов управления следует постоянно помнить и понимать, что мы «никогда не делаем что-то одно». Стремясь к достижению цели и приводя в действие активные ресурсы (идеи, людей, машины, денежные средства, сырье и материалы), осознанно или непроизвольно мы создаем или разрываем связи между самыми разнообразными объектами. Эти объекты (и материальные, и идеальные, естественные или искусственные) изменяются. Мы одновременно влияем на понятия и представления свои и других людей. В результате мы порождаем не только желаемый полезный эффект, но и массу неожиданных побочных последствий. Концепция системы требует от ЛПР при разработке решений глубоко вникать в суть проблемы.

Такой методологический подход требует от ЛПР при принятии ответственных решений рассматривать операционную среду как систему, состоящую из взаимосвязанных элементов. Этот подход называется системным подходом. Сама рассматриваемая система также является элементом более широкой системы, а потому при анализе целей предстоящих действий нужно обязательно обращаться за информацией к этой «надсистеме». Эта идея называется принципом внешнего дополнения. Важное место в ПРУР занимает цель предстоящих действий. В методологическом плане принцип цели напрямую следует из концепции системы, системного подхода и принципа внешнего дополнения. Именно этим принципом руководствуется ЛПР при разработке своих решений.

Суть концепции «рациональных решений» состоит в том, что решающим аргументом при сознательном выборе варианта среди других принято считать логически непротиворечивую, полную и, лучше всего, количественно подтвержденную систему доказательств. Здесь и формулируется принцип множественности альтернатив: никогда не следует принимать и никогда не следует отвергать вариант решения, если он является единственным. Нужно обязательно поискать другие варианты, выработать другие альтернативы для решения проблемы. Это позволит на основе рационального сравнения их между собой выбрать действительно наиболее предпочтительное решение.

Суть концепции «наилучшего решения» можно сформулировать так: выбирайте ту альтернативу, лучше которой нет ни одной другой, а сама она – лучше любой из рассматриваемых альтернатив. Для сравнения альтернативы подвергают критике с помощью критериев. К критериям, без которых практически невозможно оценивать предпочтительность альтернатив в экономических операциях, относят: эффективность, время, риски, затраты и потери. Значения, которые принимает критерий и которые отражают в сознании ЛПР степень предпочтительности тех или иных альтернатив, называются оценкой критерия. Они выражаются в принятых для их измерения шкалах.

Здесь следствием является принцип измерения. Важный постулат управления гласит: «Измерено – значит сделано». Человек в процессе измерений глубже проникает в суть вещей, лучше разбирается в связях между объектами, точнее может представить себе, как на эти объекты и связи воздействовать, чтобы изменить их самих или их свойства в желательном направлении.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Понятие «принятие решений» в широком и узком смысле.
2. Понятие «управленческое решение».
3. Что такое технология разработки решения?
4. Цель, объект и предмет разработки управленческих решений.
5. Классификация видов решений.
6. Программируемые и непрограммируемые управленческие решения.
7. Основанные на суждениях, интуитивные и творческие решения.
8. Решения, типичные для общих функций управления.
9. Составляющие задачи принятия управленческого решений.
10. Понятие проблемной ситуации.
11. Ограничения и критерии при принятии решения.
12. Схема процесса принятия управленческого решения.
13. Механизм предпочтений лица, принимающего решение.
14. Варианты алгоритмов разработки и принятия решений с учетом проблем и задач, стоящих перед лицами, принимающими решения.
15. Содержание и особенности этапов полного процесса разработки управленческого решения.
16. Линейное уравнение: характеристика, построение, решение примеров задач.
17. Концепции и принципы управленческих решений.
18. Парадигмы «рациональных» и «эмоциональных» решений.
19. Значение знания психологии в работе менеджера.
20. Психофизиологическая дифференциация руководителей и исполнителей.
21. Психологические аспекты, влияющие на разработку и принятие решений.
22. Психологические подходы, учитываемые при распределении задач среди исполнителей с целью выполнения принятых решений.
23. Наука самоменеджмента: назначение, задачи, возможности.
24. Наука тайм-менеджмента: назначение, задачи, возможности.

2. СИСТЕМНЫЙ ПОДХОД К ПРИНЯТИЮ РЕШЕНИЙ

2.1. Системный анализ

Системный анализ – это совокупность определенных научных методов и практических приемов решения разнообразных проблем, возникающих во всех сферах целенаправленной деятельности общества, на основе системного подхода и представления объекта исследования в виде системы. Характерным для системного анализа является то, что поиск лучшего решения проблемы начинается с определения и упорядочения целей деятельности системы, при функционировании которой возникла данная проблема. При этом устанавливается соответствие между этими целями, возможными путями решения возникшей проблемы и потребными для этого ресурсами.

Целью системного анализа является полная и всесторонняя проверка различных вариантов действий с точки зрения количественного и качественного сопоставления затраченных ресурсов с получаемым эффектом. Системный анализ предназначен для решения, в первую очередь, слабоструктурированных проблем, т. е. проблем, состав элементов и взаимосвязей которых установлен только частично, задач, возникающих, как правило, в ситуациях, характеризующихся наличием фактора неопределенности и содержащих неформализуемые элементы, неперебиваемые на язык математики.

Основные элементы системного анализа раскрывают его логическую последовательность:

Цели – Средства достижения целей – Потребные ресурсы

Например, в общем по статистике, главные причины неудач в проведении работ – отсутствие явно сформулированной цели (26 %), неудовлетворительное составление и контролирование программ работ (35 %), отсутствие обоснованного распределения ресурсов и неудовлетворительный экономический анализ (26 %). Только 13 % неудач связаны с частными, специфическими трудностями индивидуального порядка.

Логической основой изучения любой системы является точное определение ее целей, т. е. смысла существования. Цель – это желаемые состояния системы или результаты ее деятельности, достижимые в пределах некоторого интервала времени. Согласно принципу целенаправленности, каждая система существует и развивается в соответствии со стоящими перед ней целями.

Модель – это аналог реального мира, который может быть построен и исследован с помощью различных средств, начиная от словесного описания и заканчивая использованием системы математических уравнений или имитации на ЭВМ. Модель – это упрощенное представление существенно важных характеристик реального объекта или ситуации.

Существующие модели по характеру связи с реальным объектом, который они имитируют, можно разделить на пять типов:

1. Описательные модели, т. е. вербальные, словесные (модели развития демографической ситуации, систем и методов управления).

2. Изобразительные модели, т. е. модели графического подобия, которые удобны для отображения статического или динамического явления в определенный момент времени, но не подходят для изучения изменяющегося процесса (картины, скульптуры, глобус).

3. Модели-аналоги – в них набор одних свойств используется для отображения набора совершенно иных свойств. Это графики, схемы информационных и материальных потоков предприятия, в которых пользуются расстоянием для отображения таких свойств, как время, %, вес и др. Подобные модели удобны для отображения динамических процессов или систем и обладают большой универсальностью.

4. Функционирующие модели, воспроизводящие все основные особенности системы, но отличающиеся от реальной системы по размеру, прочности, масштабности или другим характеристикам. Например, стендовый двигатель, лабораторная технологическая линия по производству промышленной продукции.

5. Символические модели, которые с помощью математических и логических символов отображают свойства изучаемой системы (любая формула или уравнение).

В настоящее время практически любой планово-управленческий документ содержит в одном из своих начальных разделов как минимум простой словесный перечень целей, для построения которых используются специальные методы и подходы. Различают следующие методы целеполагания:

1. Логическая структуризация целей, при осуществлении которой на каждом уровне структуризации используются заранее выбранные принципы.

2. Метод парных сравнений, основанный на применении отношения «целое – частное».

3. Структуризация целей на основе контент-анализа формулировок целей, встречающихся в различных планово-управленческих документах и стандартах поуправлению.

4. Совместное применение первого и второго методов.

Для решения задач применяются различные математические методы. В учебном пособии будет раскрыт один из них – теория игр. Остальные представлены в библиографическом списке и могут быть изучены студентами самостоятельно.

2.2. Внешняя среда и разработка управленческих решений

Обычно внешняя среда рассматривается как набор реально существующих явлений и процессов (в дальнейшем – элементов), прямо или косвенно влияющих на деятельность компании, на уровень неопределенностей и рисков при разработке и реализации УР.

Внешняя среда для компаний состоит из двух колец окружения: ближнего и дальнего. К ближнему кольцу относятся те элементы, отношения с которыми регламентируются двусторонними договорами или соглашениями: клиенты, контролирующие организации, партнеры по бизнесу, финансово-кредитные

учреждения, заинтересованные внешние физические и юридические лица, конкуренты, общественность, законодательная база в соответствующей области деятельности.

К дальнему кольцу окружения компании относятся элементы, которые находятся вне сферы ее непосредственного влияния: система ценностей и их приоритеты в обществе; обычаи местного и международного делового оборота; политическая обстановка в стране и мире; экономическая обстановка в отрасли, стране и мире; социальная и экологическая ответственность; налоговая система; институциональная структура; природные катаклизмы; народные волнения; криминализация внешних связей.

Особенности элементов ближнего окружения компании.

Клиенты – это лица, которые пользуются услугами компании, покупают у нее непосредственно (прямые) или через других лиц (косвенные) какую-либо ее продукцию. Для потенциальных клиентов компании обычно формируют рекламные материалы.

Контролирующие организации представляют налоговые, административные, санитарные и другие инспекции; пенсионные, медицинские, социальные и другие фонды; различные комиссии.

Партнеры по бизнесу – это участники какой-либо совместной с компанией деятельности. Она может реализовываться в форме аренды, партнерства, подряда, договора, финансовых и компенсационных сделок.

Финансово-кредитные учреждения – организации, непосредственно участвующие в финансовом цикле компании, например, выполняющие расчетно-кассовые, ипотечные, кредитные и другие операции. Основные параметры данного элемента: быстрота и качество обслуживания, уровень надежности, банковские резервы, объем услуг.

Заинтересованные внешние физические лица – лица, заинтересованные в процветании компании исходя из своих личных интересов. К ним относятся члены семей работников компании; держатели ее ценных бумаг; пенсионеры, о которых дополнительно заботится компания; организации, чей бизнес существенно зависит от процветания компании (например, торговые, обслуживающие); вышестоящие материнские и другие компании.

Конкуренты – обязательный элемент рыночной экономики.

Общественность формирует в сознании населения отношение к компании и к ее продукции.

Законодательная база в соответствующей области деятельности.

Особенности элементов дальнего окружения компании.

Система ценностей и их приоритеты в обществе. К системе ценностей относятся материальные, общественно-политические и духовные ценности. Каждое общество формирует свое представление о добре, справедливости, свободе и т. д. Набор представлений формирует положительную систему ценностей и отрицательную. Существуют общечеловеческие ценности: нормы нравственности, прогресс, культурное наследие, социальная наследственность. Руководитель компании должен формировать совместимую с общественными ценностями систему ценностей своей компании.

Обычаи местного и международного делового оборота – набор общепринятых норм цивилизованных отношений между участниками каких-либо соглашений, которые не регулируются законодательными актами.

Политическая обстановка в стране и в мире определяется деятельностью органов государственной власти и государственного управления, характеризующей общественный строй и экономическую структуру общества, партий, общественных классов и группировок.

Экономическая обстановка в отрасли, стране, мире определяется организацией, структурой и состоянием хозяйственной деятельности.

Налоговая система.

Институциональные структуры состоят из обслуживающих компанию организаций: фондов, бирж, судов, охранных фирм. Здесь важны степень удовлетворения в дополнительных услугах и их доступность.

Природные катаклизмы включают как форс-мажорные, так и характерные природные аномалии: землетрясения, проливные дожди и ураганы, другие нарушения геомагнитной обстановки.

Народные волнения связаны с крайне низким уровнем удовлетворения частью населения своих потребностей и интересов.

Внешняя среда формирует набор приемлемых или неприемлемых значений параметров перечисленных элементов для руководителя, принимающего решения.

К основным свойствам внешней среды относятся объемность, сложность, подвижность, неопределенность и коммуникабельность.

1. *Объемность* определяется числом элементов внешней среды, которые в первую очередь должна учитывать компания при разработке и реализации управленческих решений. Принято выделять три уровня объемности: большая, средняя и малая. Большой объемности соответствуют 7–10 учитываемых в первую очередь элементов, средней – 4–6 элементов, малой – 1–3.

2. *Сложность* определяется трудозатратами материальных и интеллектуальных ресурсов на обработку требуемого количества элементов внешней среды. Уровень сложности – величина субъективная для каждой организации, зависящая от профессионализма персонала.

3. *Подвижность* внешней среды определяется скоростью искусственного или естественного изменения, или обновления параметров ее элементов.

4. *Неопределенность* характеризуется неполнотой или неточностью информации о текущем и перспективном состоянии элементов внешней среды. Например, информация о времени принятия новых законов и их содержание. Неопределенность связана, прежде всего, с возможностью возникновения в ходе реализации проекта компании неблагоприятных для нее ситуаций и последствий.

5. *Коммуникабельность* характеризуется уровнем отношений между компанией и внешней средой. Различают три уровня коммуникабельности: полное взаимодействие, преимущественное взаимодействие и преимущественное противодействие.

2.3. Методы разработки управленческих решений

Подходы к разработке и принятию УР включают либо формирование набора мероприятий организационного, технологического, экономического, правового и социального характера, направленных на достижение цели, либо выбор из уже ранее разработанных наборов.

Подходы к разработке и выбору УР имеют три варианта набора процедур – три альтернативы:

1. Разработка, согласование, принятие, утверждение, реализация, контроль и архивирование.

2. Корректировка ранее разработанных и успешно реализованных УР, согласование, принятие, утверждение, реализация, контроль и архивирование.

3. Выбор из имеющихся, согласование, принятие, утверждение, реализация, контроль и архивирование.

Основной критерий для формирования УР – наличие недопустимой проблемы в сферах стратегического планирования, управления персоналом, производством и обслуживающей деятельностью, внешних коммуникаций. УР можно формировать на трех стадиях развития проблемы:

- в начале развития, когда величина проблемы еще не внушает опасений. Решение будет действовать по упреждению;
- в период устойчивого опасного развития, когда величина проблемы оказывает существенное негативное влияние на управленческую деятельность. Решение будет действовать с некоторым запозданием;
- в период стабилизации, когда всем станут очевидны ее размеры и опасное действие. Решение будет действовать в режиме реального времени.

В отличие от технологий в электронной промышленности, металлообработке и машиностроении, управленческие технологии довольно консервативны. По расчетам исследователей, соотношение между творческой и технократической деятельностью руководителя должно составлять примерно 1:3, т. е. 25 % времени руководитель должен затрачивать на разработку и реализацию новых решений и 75 % – на выбор и реализацию типовых решений. В настоящее время реальное соотношение этих видов деятельности в компаниях варьирует от 1:1 до 5:1. При этом новые, по мнению руководителя, решения, могут, по сути, не являться таковыми, поскольку уже в течение ряда лет открыто успешно реализовывались другими организациями.

Выделяют следующие группы методов:

- аналитические;
- статистические;
- математического программирования;
- эвристические;
- активизирующие;
- экспертные;
- методы сценариев;
- метод дерева решений.

Каждый метод основан на использовании специально разработанных моделей (явлений). Каждая модель должна периодически проверяться на достоверность, точность и эффективность. Проверка на достоверность необходима для соизмерения ее результатов с требованиями современного мира (окружающей среды), т. к. основная задача каждой модели – облегчить какую-либо деятельность путем формализации входящих в нее ряда процессов. Всякое упрощение вносит ошибку в конечный результат, приемлемость ошибки и выявляет проверка на достоверность.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Системный анализ: содержание, логические элементы, задачи, возможности.
2. Понятие и типы моделей.
3. Требования, предъявляемые к моделям, применяемым при разработке решений.
4. Составляющие элементы модели проблемной ситуации.
5. Понятие критерия.
6. Классификация критериев, используемых в системном анализе.
7. Требования, предъявляемые к критериям при разработке управленческих решений.
8. Основные методы целеполагания.
9. Суть метода логической структуризации целей при целеполагании.
10. Суть метода парных сравнений при целеполагании.
11. Классификация целей при принятии решений.
12. Правила построения дерева целей.
13. Правила построения дерева решений.
14. Механизм метода управления по целям.
15. Приоритетность выполнения управленческих решений (Принцип Парето, анализ дел ABC, принцип Эйзенхауэра).
16. Внешняя среда предприятия и её факторы.
17. Внутренняя среда предприятия и её факторы.
18. Составляющие элементы ближнего кольца внешней среды предприятия.
19. Составляющие элементы дальнего кольца внешней среды предприятия.
20. Свойства внешней среды организации, учитываемые при разработке решений.
21. Методика проведения SWOT анализа.
22. Процедуры и критерии формирования управленческих решений.
23. Аналитические методы разработки решений.
24. Статистические методы разработки решений.
25. Математическое программирование при принятии решений.
26. Эвристические методы в процессе разработки и принятия решений.
27. Активизирующие методы в процессе разработки и принятия решений.
28. Экспертные методы в процессе разработки и принятия решений.
29. Метод сценариев в процессе разработки и принятия решений.
30. Метод дерева решений в процессе разработки и принятия решений.
31. Особенности принятия срочных решений.
32. Особенности и преимущества формализованных методов разработки управленческих решений.
33. Принятие решения методом экспертизы по методу суда.
34. Различия и сходства методов мозгового штурма и мозговой атаки.

3. ОРГАНИЗАЦИЯ РАЗРАБОТКИ И ВЫПОЛНЕНИЯ УПРАВЛЕНЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

3.1. Организация разработки управленческих решений

К этапам организации разработки УР относят, помимо самой разработки УР, процедуры согласования, принятия, утверждения и организации выполнения УР.

Для организации разработки УР руководителю и аппарату управления необходимо осуществить следующие действия:

Оформить документацию о начале разработки УР с указанием конкретного задания, состава персонала и системы их подчинения, времени исполнения задания, промежуточных этапах контроля хода выполнения, выделяемых ресурсах.

а. Ознакомить и разъяснить разработчикам УР содержание организационных документов о начале выполнения работ по разработке УР.

б. Разъяснить разработчикам УР их права, ответственность и полномочия при выполнении работы.

с. Обсудить с разработчиками УР неучтенные детали для успешного выполнения работ.

д. Акцентировать внимание на степени важности предлагаемой работы по разработке УР.

е. Выделить персоналу необходимые оргтехнику, помещение и указать на источники необходимой деловой информации.

ф. Провести контроль со стороны юриста или референта на соответствие вариантов разрабатываемого УР действующему законодательству и уставным документам компании.

г. Оформить заключение по технической, экономической и организационной выполнимости вариантов УР.

h. Получить заключение внешних экспертов о безопасности предстоящей реализации УР в экономической, экологической и других областях.

Для процедуры согласования УР с вышестоящими органами, заказчиками и клиентами необходимы следующие действия руководителя и аппарата управления:

а. Оформить документацию о физических или юридических лицах, с которыми необходимо согласовывать УР.

б. Определить и зафиксировать в документе временные периоды согласований, а также наименование и содержание сопроводительных документов.

с. Документально оформить общий акт согласований.

Для процедуры принятия УР необходимо:

а. Документально подтвердить отсутствие в вариантах УР противоречивостей решения самому себе и ранее реализованным.

б. Документально оформить набор критериев для выбора УР, в т.ч.

наименование, численные и качественные значения их параметров.

с. Документально зафиксировать отклонения параметров УР от параметров критериев.

d. Документально оформить процедуру принятия УР с указанием даты, ответственных лиц и имеющихся замечаний.

Для процедуры утверждения УР необходимо:

а. Оформить документацию о физических или юридических лицах, с которыми необходимо утверждать УР.

б. Определить и зафиксировать в документе временные периоды утверждений, а также наименование и содержание сопроводительных документов.

с. Документально оформить общий акт утверждений.

При организации исполнения решений руководитель, прежде всего, должен разделить общую программу действий на отдельные участки (групповые задания) конкретным исполнителям (планирование реализации решения). Затем процесс организации выполнения решения включает три взаимосвязанных этапа: доведение задач до сознания исполнителей; подготовку исполнителей к выполнению задания (организация исполнения); побуждение исполнителей к его добросовестному выполнению (мотивация). При доведении задач стремятся к тому, чтобы исполнители четко представляли: что, когда, каким образом, в каких условиях, какими силами и средствами, к какому сроку, с какими количественными и качественными показателями необходимо сделать.

Для лучшего восприятия задания сначала разъясняется общий замысел решения проблемы, стоящей перед коллективом. Глубокое и однозначное его понимание – исходное условие усвоения индивидуальной задачи. Далее следует показать место каждой задачи в общей работе, взаимные связи с другими заданиями. Наконец, разъясняется цель, т. е. предполагаемый результат труда, предоставляемые в распоряжение исполнителя средства труда, указываются сроки завершения, критерии оценки результатов. Особое внимание обращается на возможные трудности, пути их преодоления, правила безопасности труда.

Для доведения задач до исполнителя применяются разные формы и методы: совещания и собрания, беседы, инструктирование, показ образцов исполнения, изучение документов и др. На совещаниях и собраниях с докладом обычно выступает тот начальник, который принял решение, но это не всегда целесообразно. Авторитет начальника, от имени которого объявлено решение, создает своеобразный психологический барьер для свободного обсуждения путей выполнения решения. Лучше, если с обобщением выступит человек, к которому исполнители относятся с достаточным уважением как к специалисту, к тому же, чтобы он не являлся ни их начальником, ни автором решения. Автору решения лучше не включаться в дискуссию, какие бы формы она не приобретала. Чем острее проходит дискуссия, тем лучше выявляются сомнения подчиненных, «подводные камни», которые автору трудно было предвидеть. Материалы обсуждения тщательно анализируют, проводят беседу с выступившими оппонентами.

После заслушивания всего спектра мнений желательно выступить руководителю с изложением программы действий, учитывая результаты состоявшегося обсуждения. При этом следует акцентировать внимание на замечаниях, которые были учтены.

Инструктирование проводится накануне начала практических работ. Общее правило при инструктировании: сообщать самое необходимое, без чего нельзя начать работу. Остальные сведения сообщать по мере приближения сроков выполнения соответствующих видов работ путем проведения дополнительного инструктирования.

Показ образцов исполнения как метод доведения задачи используется, когда словесные объяснения недостаточно эффективны. Формы реализации данного метода различны:

- наблюдение за работой опытного человека;
- кинофильм, деловые игры, видеозапись игры;
- обсуждение видеозаписи с повторной видеозаписью создают деловую обстановку;
- тренировки (показ «как» и далее самостоятельное исполнение работ);
- упражнение (с целью отработки навыков и умений).

Изучение документов относится к числу основных методов доведения задачи. Точность восприятия и передачи содержания по документу зависит от многочисленных факторов: как он составлен, в каком контексте предъявляется, каково самочувствие работника и т. д. Различают афферентный и эффекторный образы предстоящей деятельности. Афферентный – созданный у исполнителя образ предстоящей работы, полученный в результате указанных выше методов доведения задач. Эффекторный – это оперативный образ, т. е. собственный план действий.

3.2. Управленческие решения и ответственность

Полномочия и права, делегируемые руководителю, формируют круг проблем, которые он должен решать, разрабатывая и реализуя УР. За эту работу руководитель получает, согласно договору, материальное и моральное вознаграждение. Полномочия и права немыслимы без обязанностей и ответственности за выполненную работу. В словаре С.И. Ожегова имеются следующие толкования ключевых понятий данной темы.

Обязанность – это круг действий, возложенных на кого-нибудь и обязательных для выполнения. Выделяют служебные, общественные и всеобщие воинские обязанности.

Ответственность – это необходимость, обязанность отдавать кому-либо отчет в своих действиях, поступках. Ответственность может быть официальная и личная (чувство ответственности как черта характера).

Все виды ответственности можно классифицировать по:

- уровням ответственности: международный, государственный, уровень компании и ее подразделений и уровень собственного Я (перед самим собой);

- времени ответственности: за прошлые, настоящие и будущие результаты уже принятого решения. Например, ответственность руководителей фашистской Германии за преступные решения в годы Второй мировой войны; ответственность идеологов приватизации в РФ за решения, приведшие к несправедливому разделу общенародной собственности;
- ущерб, вызванному ошибочными решениями, – это ответственность за существенный ущерб и имеющая сроки давности. Различают ущерб, ответственность по которому имеет срок давности обычно 3 или 5 лет, и ущерб, ответственность по которому не предусмотрена.

Многообразие сфер деятельности компаний сформировало следующий типовой набор видов ответственности: профессиональная, юридическая (в том числе уголовная), социальная, экологическая, экономическая, этическая, политическая, партийная, дисциплинарная, административная, материальная.

Профессиональная ответственность и обязанности руководителя отражаются в должностных инструкциях компании. Типовая должностная инструкция руководителя включает четыре раздела: общие положения, обязанность, права и ответственность.

В качестве профессиональной ответственности могут применяться меры юридической, дисциплинарной и экономической ответственности. В настоящее время все большее распространение находит страхование профессиональной ответственности нотариуса, аудитора, водителя автомобиля.

Юридическая ответственность частично или полностью касается тех видов ответственности, в которых закреплены регламенты, входящие в состав государственных законов и норм государственного регулирования. Юридическая ответственность реализуется в форме замечания, выполнения предписанных действий, заключения под стражу, ареста.

Дисциплинарная ответственность за бездействие или ненадлежащее выполнение задания реализуется в форме взыскания, замечания, выговора, перевода на другую работу, увольнения.

Административная ответственность наступает за совершение административного правонарушения, нарушения прав и свобод граждан. Базой для реализации административной ответственности является административное и гражданское право и другие регламенты.

Экономическая ответственность призвана компенсировать полный или частичный ущерб от УР, нанесенный руководителем в материальной или денежной форме.

Этическая ответственность наступает в случае нарушения руководителем этических норм, представляющих собой систему общих ценностей и правил этики, соблюдение которых обязательно для всех работников организации. Этические нормы включают оценки смысла жизни, назначения человека, содержания добра и зла, морального долга, нравственных принципов и идеалов (благородство, вежливость, выдержка, гуманизм, доверие, единство слова и дела, принципиальность, самообладание, скромность). Ответственность реализуется в форме изменения общественного мнения о руководителе, вынесении ему общественного порицания, объявлении о его несоответствии

должности по этическим соображениям. Примеров реализации такой ответственности в мировой практике достаточно много.

Политическая ответственность наступает за неправильную или ненадлежащую деятельность субъекта государственной власти и управления, а также деятельность субъекта общественных группировок. Попытки привлечения к политической ответственности конкретных политических деятелей предпринимались в разных странах. Формами реализации ответственности могут быть отставка, импичмент, перевыборы.

3.3. Контроль реализации управленческих решений

Процесс контроля характеризуют три составляющие: содержательная (что выполняется в процессе контроля), организационная (кем и в какой последовательности осуществляется), технологическая (как производится).

Цель контроля – обеспечение единства решения и исполнения, предупреждение возможных ошибок и недоработок, своевременное отклонение от заданной программы, поставленных задач и установленных сроков. Конечная цель контроля состоит не в том, чтобы собрать информацию, выявить упущения или найти виноватых, а в том, чтобы решать задачи, стоящие перед предприятием. Контроль эффективен лишь тогда, когда предприятие достигнет желаемых целей и будет готово сформулировать новые цели, которые обеспечат его развитие в будущем.

Руководитель вынужден реагировать на ситуацию по получению тревожного сигнала, когда решение уже находится в критической точке. Причинами отклонений в реализации решений могут быть безответственное отношение исполнителей, появление новых обстоятельств, которые невозможно было предусмотреть на стадии разработки УР, но необходимо учесть на завершающем этапе его реализации.

Реально контролировать процесс может лишь тот, кто знает, что и как должно быть сделано, и умеет отличить хорошую работу от плохой и посредственной. Излишних, слишком частых проверок необходимо избегать. Если контроль в виде помощи и инструктажа стимулирует работников и побуждает их к самоконтролю, то несправедливые «разносы» вызывают только страх. Тотальный контроль порождает небрежность, а скрытый вызывает досаду, их также следует избегать. Контроль должен быть объективным и требовательным, но в то же время доброжелательным.

К важным принципам контроля относятся: эффективность, своевременность, всесторонность, убедительность, непрерывность, гласность, соответствие делу, экономичность и массовость участия в нем работников. Недостаточный контроль деморализует, чрезмерный – сковывает самостоятельность и инициативу. У исполнителей не должно возникать чувство безнаказанности за упущения в работе.

Разнообразные виды контроля подразделяются по следующим признакам:
- по отношению к контролируемому объекту – внутренний и внешний;

- по видам контроля – технический, финансово-экономический, административный;
- по назначению – предварительный, текущий и заключительный;
- по охвату контролируемых объектов – сплошной и выборочный;
- по степени непрерывности – периодический и непрерывный.

Контроль может осуществляться в двух вариантах: по результатам и по упреждению. Контроль по результатам осуществляется на базе организационной, технической, экономической, финансовой и другой документации, когда оценивается отклонение фактического результата от планового, зафиксированного в соответствующих документах. Например, контроль сроков, проработанности, согласованности с заинтересованными сторонами элементов бизнес-плана. Этот вариант контроля эффективен для циклических процессов с малым временем цикла при небольшой стоимости разработки и реализации УР.

Контроль по упреждению осуществляется на базе норм, стандартов и правил до начала или в процессе разработки или реализации УР. Он применим к любой организации и характеризует высокий профессионализм управленческого ремесла.

Развитие теории и практики контроля привело к созданию нового направления в менеджменте – контроллингу. Его объектами являются конечная продукция, технологические и управленческие решения.

Содержание контроля проявляется в выполняемых им функциях: диагностика состояния дел, ориентирование, стимулирование, корректировка действий, распространение передового опыта, осуществление авторского надзора, а также педагогическая и правоохранительная.

Диагностическая функция контроля состоит в выявлении фактического состояния дел по выполнению принятого решения; ориентирующая направлена на указание проблем, которые в данный момент заслуживают наибольшего внимания; стимулирующая функция контроля заключается в выявлении и вовлечении в работу всех неиспользованных резервов и, в первую очередь, человеческого фактора.

3.4. Факторы качества и эффективность управленческих решений

Традиционно качество продукции руководители связывают с технологией ее производства и профессионализмом персонала. В действительности достижение необходимого качества продукции связано с постоянным процессом по ее совершенствованию, который получил название управление качеством. Качество управленческой деятельности – это степень ее соответствия общепринятым требованиям или стандартам. Обычно о качестве управленческой деятельности судят по качеству управленческих решений.

Элементы системы управления имеют различную сложность и разработанность:

- наиболее разработаны: цели и задачи, функции, информационное обеспечение, функциональные и организационные структуры, все элементы механизма управления;

- требуют существенных научных и практических доработок законы и принципы, средства и методы, технология и практика управления, коммуникации, схемы организационных отношений;
- требуют нового подхода к разработке схемы и свойства процесса, разработка и реализация решений, профессионализм персонала.

Системный подход к формированию высокого качества системы управления компании – это обязанность, долг и естественная потребность профессионального руководителя.

В настоящее время хорошо изучена и имеется практика по созданию проектов стандартов на управленческую деятельность и механизм управления, формируются типовые нормы отчетов. Работа проводится по методике формирования международных стандартов бухгалтерского учета и аудита, т. е. идет естественное расширение наборов стандартов для проведения аудита в управленческой деятельности. Аудит предусматривает сравнение стандартов или регламентов, принятых в управленческой деятельности, с реальным процессом этой деятельности. Основные параметры реального процесса управленческой деятельности фиксируются в типовых формах учета. Отклонение проверяемых параметров управленческой деятельности от стандартов или регламентов и составляет предмет оценки ее качества.

Большую роль в повышении качества процесса разработки УР и эффективности реальных результатов от его реализации играет организационная сторона при создании творческого коллектива. К условиям, стимулирующим эффективную работу коллектива, можно отнести:

- обеспечение работников полной и своевременной информацией;
- профессиональное проведение в коллективе разработчиков мозговой атаки и фиксация полученных результатов;
- использование опыта и знание наиболее профессиональных специалистов;
- разностороннее рассмотрение всех этапов процесса РУР, и особенно проблемной ситуации;
- усиление внимания к преодолению субъективизма;
- отражение в решениях главных достижений коллектива в науке, методологии, технологии, признанных авторитетными специалистами;
- осуществление мониторинга решений.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Организация разработки управленческих решений.
2. Процедура согласования управленческих решений.
3. Процедура принятия и утверждения управленческих решений.
4. Механизм организации выполнения управленческих решений.
5. Действия руководителя и аппарата управления при организации выполнения УР.
6. Правила организации выполнения управленческих решений.
7. Правила проведения собрания по разработке решения.
8. Сущность и виды ответственности руководителя при принятии управленческих решений.
9. Механизм формирования социальной ответственности.
10. Социальная ответственность руководителя при принятии управленческих решений.
11. Сущность контроля управленческих решений.
12. Виды контроля управленческих решений.
13. Функции контроля управленческих решений.
14. Процесс контроля управленческих решений.
15. Оценка качества управленческих решений.
16. Понятия эффекта и эффективности решений.
17. Виды эффекта управленческих решений.
18. Факторы, определяющие эффективность управленческих решений.
19. Виды эффективности управленческих решений.
20. Методы оценок экономической эффективности управленческих решений.

4. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ИГР И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В МЕТОДАХ ПРИНЯТИЯ УПРАВЛЕНЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Методы принятия управленческих решений используют аппарат прикладной математики. Прикладная математика имеет большое число разделов и в одном учебном пособии невозможно раскрыть даже часть из них. В данном учебном пособии раскрывается один из разделов прикладной математики, а именно теория игр, в том объеме, который необходим бакалавру по экономическим направлениям подготовки для решения большинства прикладных задач.

Теория игр – раздел исследования операций, в котором изучаются процессы принятия решений в условиях конфликта. Другими словами, теория игр дает математический анализ конфликтной ситуации. Для возможности проведения анализа конфликта необходимо построить его абстрактную модель, которую будем называть **игрой**. Стороны, участвующие в конфликте, называются **игроками**, а численная характеристика исхода конфликта – **выигрышем**.

Целью каждого участника игры является получение возможного большего выигрыша.

Для каждой формализованной игры вводятся **правила**, т. е. система условий, определяющая: варианты действий игроков; объем информации каждого игрока о поведении партнеров; выигрыш, к которому приводит каждая совокупность действий.

Выигрыш (или проигрыш) может быть задан количественно; например, можно оценить проигрыш – нулем, выигрыш – единицей, а ничью – $\frac{1}{2}$.

Выбор и осуществление одного из предусмотренных правилами действий называется **ходом** игрока. Ходы могут быть личными и случайными. **Личный ход** – это сознательный выбор игроком одного из возможных действий (например, ход в шахматной игре). **Случайный ход** – это случайно выбранное действие (например, выбор карты из перетасованной колоды). В дальнейшем мы будем рассматривать только личные ходы игроков.

Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор его действия при каждом личном ходе в зависимости от сложившейся ситуации. Обычно в процессе игры при каждом личном ходе игрок делает выбор в зависимости от конкретной ситуации. Однако в принципе возможно, что все решения приняты игроком заранее (в ответ на любую сложившуюся ситуацию). Это означает, что игрок выбрал определенную стратегию, которая может быть задана в виде списка правил или программы (так можно осуществить игру с помощью ЭВМ).

Для того чтобы решить игру или найти решение игры, следует для каждого игрока выбрать стратегию, которая удовлетворяет условию **оптимальности**, т. е. один из игроков должен получать **максимальный выигрыш**, когда второй придерживается своей стратегии. В то же время второй игрок должен иметь **минимальный проигрыш**, если первый

придерживается своей стратегии. Такие **стратегии** называются **оптимальными**. Оптимальные стратегии должны также удовлетворять **условию устойчивости**, т. е. любому из игроков должно быть невыгодно отказаться от своей стратегии в этой игре.

Если **игра повторяется достаточно много раз**, то игроков может интересовать не выигрыш и проигрыш в каждой конкретной партии, а **средний выигрыш (проигрыш) во всех партиях**.

Цель теории игр: определение оптимальной стратегии для каждого игрока. При выборе оптимальной стратегии естественно предполагать, что оба игрока ведут себя разумно с точки зрения своих интересов.

Важнейшее ограничение теории игр: единственность выигрыша как показателя эффективности, в то время как в большинстве реальных задач имеется более одного показателя эффективности. Кроме того, как правило, возникают задачи, в которых интересы партнеров не обязательно антагонистические. Однако конфликты приводят к разным исходам, а значит, и к различным видам игр, для каждой из которых есть свой метод решения.

Игры классифицируются по целому списку направлений:

1. По количеству игроков: парные игры и игры n игроков.

Игра называется парной, если в ней участвуют два игрока, и множественной, если число игроков больше двух.

2. По количеству стратегий: конечные и бесконечные.

В конечной игре каждый из игроков имеет конечное число возможных стратегий. Если хотя бы один из игроков имеет бесконечное число возможных стратегий, игра является бесконечной.

3. По характеру взаимоотношений: бескоалиционные, коалиционные и кооперативные.

Если игроки не имеют право вступать в соглашения, образовывать коалиции, то такая игра относится к бескоалиционным; если игроки могут вступать в соглашения, создавать коалиции – коалиционной. Кооперативная игра – это игра, в которой заранее определены коалиции.

4. По характеру выигрышей: игры с нулевой суммой (антагонистические) и игры с ненулевой суммой (неантагонистические).

Игра с нулевой суммой предусматривает условие: «сумма выигрышей всех игроков в каждой партии равна нулю». Игры двух игроков с нулевой суммой относят к классу антагонистических. Естественно, выигрыш одного игрока при этом равен проигрышу другого. В игре с ненулевой суммой не обязательно, что выигрыш одного игрока означает проигрыш другого, как в играх с нулевой суммой. Конечная игра с ненулевой суммой называется биматричной игрой. Доказано, что игру n лиц с ненулевой суммой всегда можно преобразовать в игру $n+1$ лиц с нулевой суммой путем добавления «фиктивного игрока».

5. По количеству ходов: одношаговые и многошаговые.

Одношаговые игры заканчиваются после одного хода каждого игрока. Так, в матричной игре после одного хода каждого из игроков происходит распределение выигрышей.

Многошаговые игры бывают позиционными, стохастическими, дифференциальными и др.

6. В зависимости от состояния информации: игры с полной и неполной информацией.

Если каждый игрок на каждом ходу игры знает все ранее примененные другими игроками на предыдущих ходах стратегии, такая игра определяется как игра с полной информацией.

Если игроку не все стратегии предыдущих ходов других игроков известны, то игра классифицируется как игра с неполной информацией.

Мы далее убедимся, что игра с полной информацией имеет решение. Решением будет седловая точка при чистых стратегиях.

Степень неполноты информации. По этому критерию игры подразделяются на статистические (в условиях частичной неопределенности) и стратегические (в условиях полной неопределенности). Игры с природой часто относят к статистическим играм. В статистической игре имеется возможность получения информации на основе статистического эксперимента, при котором вычисляется или оценивается распределение вероятностей состояний (стратегий) природы. С теорией статистических игр тесно связана теория принятия экономических решений.

Далее в разделах 5 и 6 будут рассмотрены матричные и биматричные игры.

Матричная игра – конечная игра двух игроков с нулевой суммой. В общем случае ее платежная матрица является прямоугольной (см. таблицу 5.1.1). Номер строки матрицы соответствует номеру стратегии, применяемой игроком 1. Номер столбца соответствует номеру стратегии игрока 2. Выигрыш игрока 1 является элементом матрицы. Выигрыш игрока 2 равен проигрышу игрока 1. Матричные игры всегда имеют решения в смешанных стратегиях. Они могут быть решены методами линейного программирования.

Биматричная игра – конечная игра двух игроков с ненулевой суммой. Выигрыши каждого игрока задаются своей матрицей, в которой строка соответствует стратегии игрока 1, а столбец – стратегии игрока 2. Однако элемент первой матрицы показывает выигрыш игрока 1, а элемент второй матрицы – выигрыш игрока 2. Для биматричных игр так же, как и для матричных, разработана теория оптимального поведения игроков.

Раздел 7 посвящен играм с природой. Отличительная особенность игры с природой состоит в том, что в ней сознательно действует только один из участников, в большинстве случаев называемый игроком один. Игроку два (природа) не важен результат, либо он не способен к осмысленным решениям или условия не зависят от действий игрока, а определяются внешними факторами.

5. МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

5.1. Нижняя и верхняя цена игры. Чистые стратегии. Седловая точка

Рассмотрим матричную игру, представленную матрицей выигрышей $m \times n$, где число строк $i = 1, \dots, m$, а число столбцов $j = 1, \dots, n$ (см. табл. 5.1.1).

Таблица 5.1.1

Игрок 1 \ Игрок 2	B_1	B_2		B_n	α_i
A_1	a_{11}	a_{12}		a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}		a_{2n}	α_2
.....					
A_m	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}	α_m
β_j	β_1	β_2		β_n	

Платежная матрица (матрица эффективности, матрица игры) включает все значения выигрышей (в конечной игре). Пусть игрок 1 имеет m стратегий A_j , а игрок 2 – n стратегий β_j , ($i = 1, \dots, m$, $i = 1, \dots, n$). Игра может быть названа игрой $m \times n$. Представим матрицу эффективности игры двух лиц с нулевой суммой, сопроводив ее необходимыми обозначениями (табл. 5.1.1).

В данной матрице элементы a_{ij} – значения выигрышей игрока 1 – могут означать и математическое ожидание выигрыша (среднее значение), если выигрыш является случайной величиной. Величины α_i – соответственно минимальные значения элементов a_{ij} по строкам и β_j – максимальные по столбцам. Их содержательный смысл будет отражен в следующих параграфах.

Применим принцип получения максимального гарантированного результата при наихудших условиях. Игрок 1 стремится принять такую стратегию, которая должна обеспечить максимальный проигрыш игрока 2. Соответственно игрок 2 стремится принять стратегию, обеспечивающую минимальный выигрыш игрока 1. Рассмотрим оба этих подхода.

Подход игрока 1. Он должен получить максимальный гарантированный результат при наихудших условиях. Значит, при выборе отвечающей этим условиям своей чистой стратегии он должен выбрать гарантированный результат в наихудших условиях, т. е. наименьшее значение своего выигрыша, которое обозначим:

$$\alpha_i = \min_j a_{ij} . \quad (5.1.1)$$

Чтобы этот гарантированный эффект в наихудших условиях был максимальным, нужно из всех α_i выбрать наибольшее значение. Обозначим его α и назовем **чистой нижней ценой игры** («максимин»):

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij} \quad (5.1.2)$$

Таким образом, максиминной стратегии отвечает строка матрицы, которой соответствует элемент α_i . Какие бы стратегии ни применял игрок 2, игрок 1 максиминной чистой стратегией гарантирует себе выигрыш, не меньший, чем α_i . Таково оптимальное поведение игрока 1.

Подход игрока 2. Своими оптимальными стратегиями он стремится уменьшить выигрыш игрока 1, поэтому при каждой j -й чистой стратегии он отыскивает величину своего максимального проигрыша:

$$\beta_j = \max_i a_{ij} \quad (5.1.3)$$

в каждом j -м столбце, т. е. определяет максимальный выигрыш игрока 1, если игрок 2 применит j -ю чистую стратегию. Из всех своих n чистых стратегий он отыскивает такую, при которой игрок 1 получит минимальный выигрыш, т. е. определяет **чистую верхнюю цену игры** («минимакс»):

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij} \quad (5.1.4)$$

Чистая нижняя цена игры показывает, какой минимальный выигрыш может гарантировать игрок 1, применяя свои чистые стратегии, – выигрыш, не меньший, чем α . Аналогично, чистая верхняя цена игры показывает, какой минимальный проигрыш может гарантировать игрок 2, применяя свои чистые стратегии, – проигрыш, не больший, чем β . Таким образом, минимаксная стратегия игрока 2 отображается столбцом платежной матрицы, в котором находится элемент β (см. табл. 5.1.1). Она является оптимальной чистой гарантирующей стратегией игрока 2, если он ничего не знает о действиях игрока 1. Можно доказать, что всегда $\alpha \leq \beta$.

Принцип, диктующий игрокам выбор наиболее «осторожных» минимаксной и максиминной стратегий, называется **принципом минимакса**.

Чистая цена игры V – цена данной игры, если нижняя и верхняя ее цены совпадают:

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = V \quad (5.1.5)$$

В этом случае игра называется **игрой с седловой точкой**.

Задача 5.1.1. Определить верхнюю и нижнюю цены при заданной матрице игры $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ и указать максиминную и минимаксную стратегии.

Решение. Представим в таблице 5.1.2 матрицу игры с обозначениями стратегий β_j, α_i .

Таблица 5.1.2

B_j A_i	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	1	2	3	1
A_2	4	5	6	4
β_j	4	5	6	

Определим нижнюю цену игры: $\alpha_1 = 1; \alpha_2 = 4, \alpha = 4$ (см. столбец α_i).

Определим верхнюю цену игры: $\beta_1 = 4; \beta_2 = 5, \beta_3 = 6; \beta = 4$ (см. строку β_j).

Таким образом, $\alpha = \beta = 4$, т. е.

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = \nu = 4.$$

Значит, $\nu = 4$ – чистая цена игры при стратегиях A_2 и B_1 . Следовательно, имеем игру с седловой точкой.

Задача 5.1.2. Определим максиминную и минимаксную стратегии при заданной в таблице 5.1.3 матрице эффективности.

Таблица 5.1.3

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	2	7	6	10	2
A_2	8	4	9	5	4
β_j	8	7	9	10	

Решение. Определим максиминную стратегию:

$\alpha_1 = 2; \alpha_2 = 4, \alpha = 4$ (см. столбец α_i).

Максиминная стратегия – строка A_2 .

Определим минимаксную стратегию:

$\beta_1 = 1; \beta_2 = 7, \beta_3 = 9; \beta_4 = 10; \beta = 7$ (см. столбец β_j).

Максиминная стратегия – столбец B_2 .

Здесь $\alpha < \beta$, следовательно, седловой точки нет.

Оптимальные чистые стратегии – это чистые стратегии, образующие седловую точку.

В игре без седловой точки, если игрок 1 информирован о стратегии, принятой игроком 2, он сможет принять оптимальную в данной ситуации стратегию, которая не совпадает с максиминной.

Задача 5.1.3. Дана матрица игры

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 & 6 & 11 \\ 8 & 4 & 12 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Допустим, игроку 1 стало известно, что игрок 2 принял минимаксную стратегию. Игрок 1 должен выбрать оптимальную стратегию при условии, что B_2 – стратегия игрока 2 ($\beta = 5$).

Решение. Определим максиминную стратегию игрока 1: $\alpha_1 = 3; \alpha_2 = 4, \alpha = 4$.

Стратегия игрока 1 – A_2 – максиминная.

Выберем оптимальную стратегию для игрока 1. Ею будет не максиминная A_2 , дающая игроку 1 выигрыш $\alpha = 4$, а та стратегия, которая соответствует $\max_{ij} a_{ij}$.

В этом случае его максимальный гарантированный выигрыш будет равен верхней цене игры $\beta = 5$, поэтому он выберет свою оптимальную стратегию A_1 , зная, что игрок 2 выбрал свою стратегию B_2 .

Таким образом, рассмотренная задача дает результат, отличный от результата при игре с седловой точкой.

Стратегия является **оптимальной**, если ее применение обеспечит игроку наибольший гарантированный выигрыш при любых возможных стратегиях другого игрока.

В задаче 5.1.3 показано, что бывают ситуации, когда игрок 1 может получить выигрыш, превосходящий максиминный, если ему известны намерения игрока 2.

При многократном повторении игры в сходных условиях можно добиться гарантированного среднего выигрыша, превосходящего для игрока 1 максиминный.

Задача 5.1.4. Дебитор A желает выбрать одно из четырех условий займа: A_1, A_2, A_3, A_4 . Кредитор B может на любой вариант займа ответить вариантом предоставления кредита B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 . Процентные ставки для дебитора при любом варианте кредитора представлены платежной матрицей:

Таблица 5.1.4

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	6	1	8	4	4
A_2	9	6	7	5	8
A_3	3	7	6	2	8
A_4	2	6	7	3	3

Какова оптимальная стратегия для A ? Является ли она оптимальной для B ? Какова оптимальная процентная ставка?

Решение. Находим минимальные элементы каждой строки платежной матрицы α_i и из них находим максимальное значение. Из максимальных элементов каждого столбца β_j выбираем минимальный. См. таблицу 5.1.5.

Таблица 5.1.5

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	α_i
A_1	6	1	8	4	4	1
A_2	9	6	7	5	8	5

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	α_i
A_3	3	7	6	2	8	2
A_4	2	6	7	3	3	2
β_j	9	7	8	5	8	

Таким образом, $\alpha = \beta = 5$, т. е.

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = \nu = 5.$$

Оптимальной для A является стратегия A_2 . Если A выбирает стратегию A_2 , то B не может поступить лучше, чем выбрать стратегию B_4 . Оптимальной процентной ставкой в этом случае является 5.

ЗАДАЧИ К 5.1

Задача 5.1.6. Найти нижнюю и верхнюю цены игры заданной матрицей:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Выписываем минимумы строк и максимумы столбцов.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 3 & 1 & 4 \end{matrix}$$

Пользуясь определением нижней и верхней границы игры, находим α и β :

$$A = \left[\begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{matrix} \right] \Rightarrow \alpha = -2$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 3 & 1 & 4 \end{matrix}}_{\downarrow} \Rightarrow \beta = 1$$

Нижняя граница игры равна -2 . Это значит, что максиминная стратегия игрока A – либо первая, либо третья. Применяя их систематически, игрок A гарантированно проиграет не больше 2. Верхняя граница игры равна 1. Минимаксная стратегия игрока B – вторая. Применяя её систематически, игрок B проиграет не более 1.

Задача 5.1.7. Определить решение и цену игры для следующей матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 15 & 8 & 12 \\ 4 & -11 & -7 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Решение. Выписываем минимумы строк и максимумы столбцов.

$$A = \begin{bmatrix} 15 & 8 & 12 \\ 4 & -11 & -7 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 8 \\ -11 \\ 3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 15 & 8 & 12 \end{matrix}$$

Пользуясь определением нижней и верхней границы игры, находим α и β :

$$A = \left[\begin{bmatrix} 15 & 8 & 12 \\ 4 & -11 & -7 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 8 \\ -11 \\ 3 \end{matrix} \right] \Rightarrow \alpha = 8$$

$$\begin{matrix} 15 & 8 & 12 \end{matrix}$$

↓

$$\beta = 8$$

В данной задаче нижняя граница игры равна верхней границе $\alpha = \beta = 8$. Значит, это игра с седловой точкой, которая и определяет решение, т. е. пару оптимальных стратегий A_1 и B_2 , и чистую цену игры $v = 8$.

Задача 5.1.8. Определить наличие седловых точек в следующей матрице:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \\ 8 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Решение. Выписывая минимумы строк и максимумы столбцов, находим нижнюю и верхнюю цены игры:

$$A = \left[\begin{bmatrix} 7 & 9 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \\ 8 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \right] \Rightarrow \alpha = 4$$

$$\begin{matrix} 8 & 9 & 4 \end{matrix}$$

↓

$$\beta = 4$$

Ответ. $\alpha = \beta = 4 \Rightarrow$ седловая точка имеется. Пара оптимальных стратегий: A_3 и B_3 .

Задача 5.1.9. Определить наличие седловых точек в следующей матрице:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 6 & 9 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Решение. Выписывая минимумы строк и максимумы столбцов, находим нижнюю и верхнюю цены игры:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 6 & 1 \\ 6 & 9 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{array} \right] \Rightarrow \alpha = 6$$

$$\begin{array}{ccc} \hline 6 & 9 & 8 \\ \hline \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\beta = 6$$

Ответ. $\alpha = \beta = 6 \Rightarrow$ седловая точка имеется. Пара оптимальных стратегий: A_2 и B_1 .

Задача 5.1.10. Определить наличие седловых точек в следующей матрице:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

Решение. Выписывая минимумы строк и максимумы столбцов, находим нижнюю и верхнюю цены игры:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 8 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 1 & 1 \\ 7 & 9 & 3 & 3 \end{array} \right] \Rightarrow \alpha = 3$$

$$\begin{array}{ccc} \hline 8 & 9 & 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\beta = 4$$

Ответ. $\alpha \neq \beta \Rightarrow$ седловая точка отсутствует.

5.2. Смешанные стратегии

Если в матричной игре отсутствует седловая точка в чистых стратегиях, то находят верхнюю и нижнюю цены игры. Они показывают, что игрок 1 не получит выигрыша, превосходящего верхнюю цену игры, и что игроку 1 гарантирован выигрыш, не меньший нижней цены игры. В задаче 5.1.3 игрок 1 получил по своей оптимальной стратегии A_1 , отличной от максиминной, выигрыш, равный верхней цене игры. Такова плата за информированность о стратегии игрока 2. Это крайний случай. Не улучшится ли результат игрока 1,

если информация о действиях противной стороны будет отсутствовать, но игрок будет многократно применять чистые стратегии случайным образом с определенной вероятностью?

В такой ситуации, оказывается, можно получать выигрыши, в среднем большие нижней цены игры, но меньшие верхней.

Смешанная стратегия игрока – это применение его чистых стратегий при многократном повторении игры в одних и тех же условиях с заданными вероятностями.

Подведем итоги сказанного и перечислим условия применения смешанных стратегий:

- игра без седловой точки;
- игроки используют случайную смесь чистых стратегий с заданными вероятностями;
- игра многократно повторяется в сходных условиях;
- при каждом из ходов ни один игрок не информирован о выборе стратегии другим игроком;
- допускается осреднение результатов игр.

Применяются следующие обозначения смешанных стратегий:

Для игрока 1 смешанная стратегия, заключающаяся в применении чистых стратегий $A_1, A_2, \dots, A_m$ с соответствующими вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_m$,

$$S_1 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}, \quad (5.2.1)$$

где $\sum_{i=1}^m p_i = 1, p_i \geq 0$.

Для игрока 2

$$S_2 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix}, \quad (5.2.2)$$

где $\sum_{j=1}^n q_j = 1, q_j \geq 0$, q_j – вероятность применения чистой стратегии B_j .

Чистая стратегия – это стратегия первого или второго игрока, выбранная им с вероятностью, равной 1.

В случае, когда $p_i = 1$, для игрока 1 имеем чистую стратегию:

$$S_1 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_i & \dots & A_m \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.2.3)$$

В матричной игре, зная матрицу A (она относится и к игроку 1, и к игроку 2), можно определить при заданных векторах $\vec{p}$ и $\vec{q}$ средний выигрыш (математическое ожидание выигрыша) игрока 1:

$$M(A, \vec{p}, \vec{q}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i q_j, \quad (5.2.4)$$

где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ – векторы; p_i и q_j – компоненты векторов.

Путем применения своих смешанных стратегий игрок 1 стремится максимально увеличить свой средний выигрыш, а игрок 2 – довести этот выигрыш до минимально возможного значения.

Игрок 1 стремится достигнуть

$$\beta = \min_{\vec{q}} \max_{\vec{p}} M(A, \vec{p}, \vec{q}). \quad (5.2.5)$$

Игрок 2 добивается того, чтобы выполнялось условие:

$$\alpha = \max_{\vec{p}} \min_{\vec{q}} M(A, \vec{p}, \vec{q}). \quad (5.2.6)$$

Обозначим $\vec{p}_0$ и $\vec{q}_0$ векторы, соответствующие оптимальным смешанным стратегиям игроков 1 и 2, т. е. такие векторы $\vec{p}_0$ и $\vec{q}_0$, при которых будет выполнено равенство:

$$\min_{\vec{q}} \max_{\vec{p}} M(A, \vec{p}, \vec{q}) = \max_{\vec{p}} \min_{\vec{q}} M(A, \vec{p}, \vec{q}) = M(A, \vec{p}_0, \vec{q}_0). \quad (5.2.7)$$

Цена игры ν – средний выигрыш игрока 1 при использовании обоими игроками смешанных стратегий.

Следовательно, решением матричной игры являются:

- 1) $\vec{p}_0$ – оптимальная смешанная стратегия игрока 1;
- 2) $\vec{q}_0$ – оптимальная смешанная стратегия игрока 2;
- 3) ν – цена игры.

Смешанные стратегии будут оптимальными ($\vec{p}_0$ и $\vec{q}_0$), если они образуют седловую точку для функции $M(A, \vec{p}, \vec{q})$, т. е.

$$M(A, \vec{p}, \vec{q}_0) \leq M(A, \vec{p}_0, \vec{q}_0) \leq M(A, \vec{p}_0, \vec{q}). \quad (5.2.8)$$

Теорема 5.2.1 (основная теорема теории матричных игр). Для матричной игры с любой матрицей A величины $\alpha = \max_{\vec{p}} \min_{\vec{q}} M(A, \vec{p}, \vec{q})$ и $\beta = \min_{\vec{q}} \max_{\vec{p}} M(A, \vec{p}, \vec{q})$ существуют и равны между собой: $\alpha = \beta = \nu$.

Из теоремы следует, что всякая матричная игра имеет цену; игрок в матричной игре всегда имеет оптимальную стратегию.

Следует отметить, что при выборе оптимальных стратегий игроку 1 всегда будет гарантирован средний выигрыш, не меньший, чем цена игры, при любой фиксированной стратегии игрока 2 (и, наоборот, для игрока 2). Активными стратегиями игроков 1 и 2 называют стратегии, входящие в состав оптимальных смешанных стратегий соответствующих игроков с вероятностями, отличными от нуля. Значит, в состав оптимальных смешанных стратегий игроков могут входить не все априори заданные их стратегии.

Теорема 5.2.2 (об активных стратегиях). Если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то выигрыш остается неизменным и равным цене игры ν , если второй игрок не выходит за пределы своих активных стратегий.

Эта теорема имеет большое практическое значение – она дает конкретные модели нахождения оптимальных стратегий при отсутствии седловой точки.

Решить игру – означает найти цену игры и оптимальные стратегии.

Рассмотрение методов нахождения оптимальных смешанных стратегий для матричных игр начнем с простейшей игры, описываемой матрицей 2×2 .

Игры с седловой точкой специально рассматриваться не будут. Если получена седловая точка, то это означает, что имеются невыгодные стратегии, от которых следует отказываться. При отсутствии седловой точки можно получить две оптимальные смешанные стратегии. Как уже отмечалось, эти смешанные стратегии записываются так:

$$S_1 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}, \quad (5.2.9)$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}. \quad (5.2.10)$$

Для того чтобы их найти, воспользуемся теоремой об активных стратегиях.

Если игрок 1 придерживается своей оптимальной стратегии S_1 , то его средний выигрыш будет равен цене игры v , какой бы активной стратегией ни пользовался игрок 2. Для игры 2×2 любая чистая стратегия противника является активной, если отсутствует седловая точка. Выигрыш игрока 1 (проигрыш игрока 2) – случайная величина, математическое ожидание (среднее значение) которой является ценой игры. Поэтому средний выигрыш игрока 1 (оптимальная стратегия) будет равен v и для 1-й, и для 2-й стратегии противника.

Пусть игра задана платежной матрицей: $P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (5.2.11)$

Средний выигрыш игрока 1, если он использует оптимальную смешанную стратегию S_1 , а игрок 2 – чистую стратегию B_1 (это соответствует 1-му столбцу платежной матрицы A), равен цене игры v : $a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v$. Тот же средний выигрыш получает игрок 1, если 2-й игрок применяет стратегию B_2 , т. е. $a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v$

Учитывая, что $p_1 + p_2 = 1$, получаем систему уравнений для определения оптимальной стратегии S_1 и цены игры v :

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases} \quad (5.2.12)$$

Решая эту систему, получим оптимальную стратегию p_1 и p_2 :

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}} \\ p_2 &= \frac{a_{11}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}. \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

Зная p_1 и p_2 находим v :

$$v = \frac{a_{22}a_{11}-a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}. \quad (5.2.14)$$

Применяя теорему об активных стратегиях при отыскании S_2 – оптимальной стратегии игрока 2, получаем, что при любой чистой стратегии игрока 1 (A_1 или A_2) средний проигрыш игрока 2 равен цене игры v , т. е.

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = v \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = v \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases}. \quad (5.2.15)$$

Тогда оптимальная стратегия определяется формулами:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}} \\ q_2 &= \frac{a_{11}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}. \end{aligned} \quad (5.2.16)$$

Задача решена, так как найдены векторы $\vec{q}_0(q_1, q_2)$, $\vec{p}_0(p_1, p_2)$ и цена игры v .

Имея матрицу платежей P , можно решить задачу графически. При этом методе алгоритм решения весьма прост (рис. 5.2.1). Рассмотрим алгоритм решения для игрока 1.

1. По оси абсцисс откладывается отрезок единичной длины.
2. По оси ординат откладываются выигрыши при стратегии A_1 .
3. На линии, параллельной оси ординат, в точке 1 откладываются выигрыши при стратегии A_2 .
4. Концы отрезков обозначаются $a_{11} := b_{11}$, $a_{12} := b_{22}$, $a_{22} := b_{22}$, $a_{21} := b_{12}$ и проводятся две прямые линии $b_{11}b_{12}$ и $b_{21}b_{22}$.
5. Определяется ордината точки пересечения c . Она равна v .

Данный метод имеет достаточно широкую область приложения. Это основано на **общем свойстве игр** $m \times n$, состоящем в том, что в любой игре $m \times n$ каждый игрок имеет оптимальную смешанную стратегию, в которой число чистых стратегий не больше, чем $\min(m, n)$. Из этого свойства можно получить известное **следствие**: в любой игре $2 \times n$ и $m \times 2$ каждая оптимальная стратегия S_1 и S_2 содержит не более двух активных стратегий.

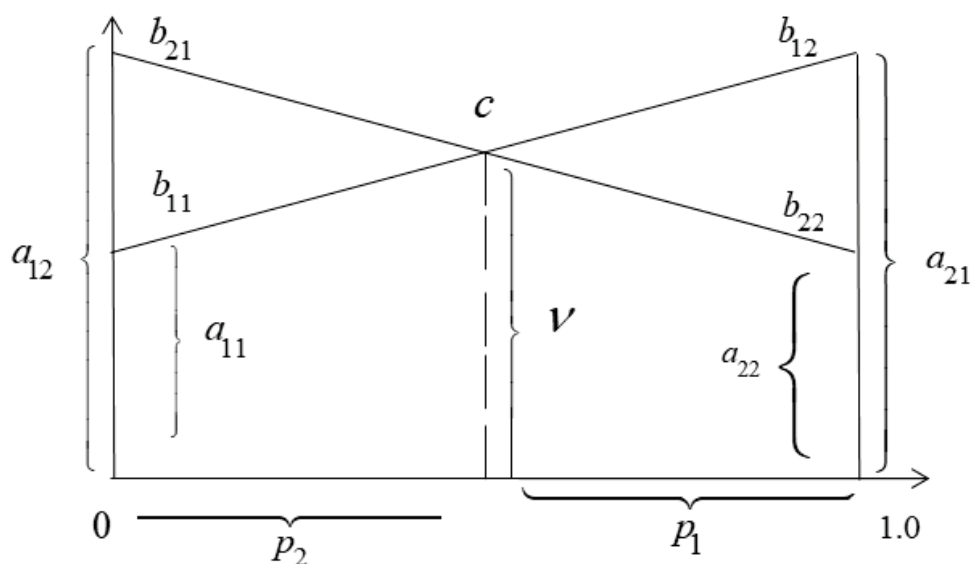


Рис. 5.2.1. Оптимальная смешанная стратегия игрока 1

Значит, любая игра $2 \times n$ и $m \times 2$ может быть сведена к игре 2×2 . Следовательно, игры $2 \times n$ и $m \times 2$ можно решить графическим методом.

Для игрока 2 алгоритм аналогичен:

1. По оси абсцисс откладывается отрезок единичной длины.
2. По оси ординат откладываются выигрыши при стратегии B_1 .
3. На линии, параллельной оси ординат, в точке 1 откладываются выигрыши при стратегии B_2 .
4. Концы отрезков обозначаются $a_{11} := b_{11}$, $a_{12} := b_{22}$, $a_{22} := b_{22}$, $a_{21} := b_{12}$ и проводятся две прямые линии $b_{11}b_{12}$ и $b_{21}b_{22}$.
5. Определяется ордината точки пересечения c . Она равна v .

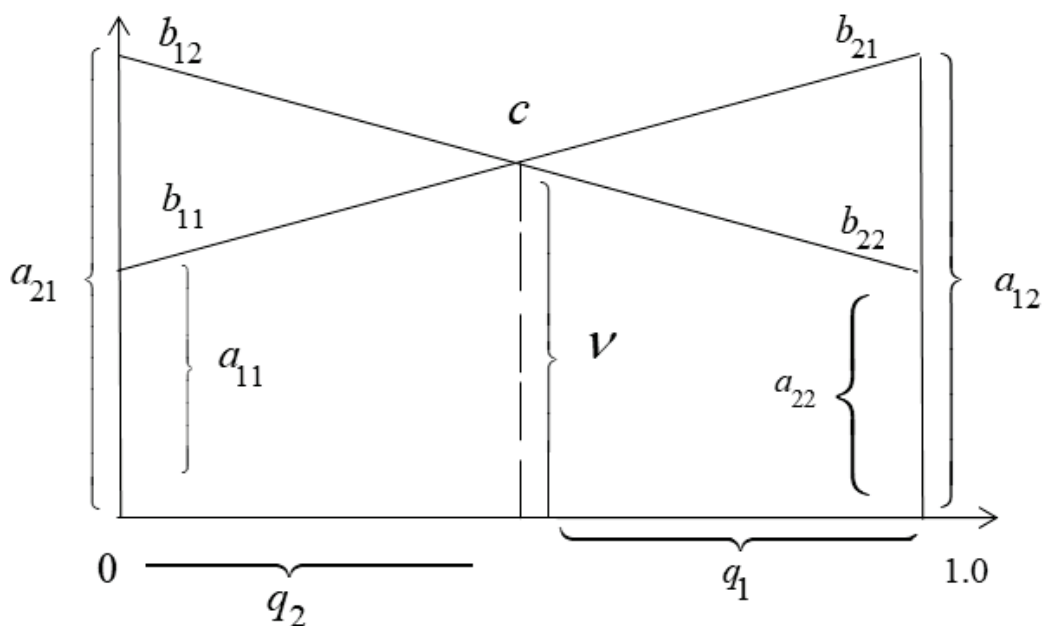


Рис. 5.2.2. Оптимальная смешанная стратегия игрока 2

Рассмотрим практическую задачу, в которой используются критерии игр для оценки наиболее эффективного поведения оперирующей стороны.

Задача 5.2.1. Директор транспортной компании A , оказывающей транспортные услуги по перевозке пассажиров в областном центре, планирует открыть один или два маршрута: A_1 и A_2 . Для этого было закуплено 40 микроавтобусов. Он может поставить весь транспорт на одном из маршрутов (наиболее выгодном), либо распределить на 2 маршрута. Спрос на транспорт, а соответственно и прибыль компании во многом зависит от того, какие маршруты откроет главный конкурент – компания B . Ее руководство полностью владеет ситуацией и может открыть один или два маршрута B_1 и B_2 . Оценка прибыли компании A (млн. руб.) при любом ответе B представлена платежной матрицей из таблицы 5.2.1. Требуется найти оптимальное распределение по маршрутам и ожидаемую прибыль.

Таблица 5.2.1

Игрок 1 \ Игрок 2	Игрок 2		
	B_1	B_2	α_i
A_1	0.3	0.8	0.3
A_2	0.7	0.4	0.4
β_j	0.7	0.8	

Решение. Запишем условия в принятых индексах:

$$a_{11} = 0,3; a_{12} = 0,8; a_{21} = 0,7; a_{22} = 0,4.$$

Определим нижнюю и верхнюю цены игры:

$$\alpha_1 = 0,3; \alpha_2 = 0,4; \alpha = 0,4;$$

$$\beta_1 = 0,7; \beta_2 = 0,8; \beta = 0,7.$$

Получаем игру без седловой точки, так как

$$\max_i \min_j a_{ij} = a_{22} = 0.4,$$

$$\min_j \max_i a_{ij} = a_{21} = 0.7.$$

Решение для определения ν , p_1 и p_2 проведем графически (рис. 5.2.3).

Алгоритм решения

1. По оси абсцисс отложим отрезок единичной длины.
2. По оси ординат отложим выигрыши при стратегии A_1 .
3. На вертикали в точке 1 отложим выигрыши при стратегии A_2 .
4. Проводим прямую $b_{11}b_{12}$, соединяющую точки $a_{11}a_{21}$.
5. Проводим прямую $b_{21}b_{22}$, соединяющую точки $a_{12}a_{22}$.
6. Определяем ординату точки пересечения c линий $b_{11}b_{12}$ и $b_{21}b_{22}$. Она равна ν .
7. Определим абсциссу точки пересечения c . Она равна p_2 , а $p_1 = 1 - p_2$.

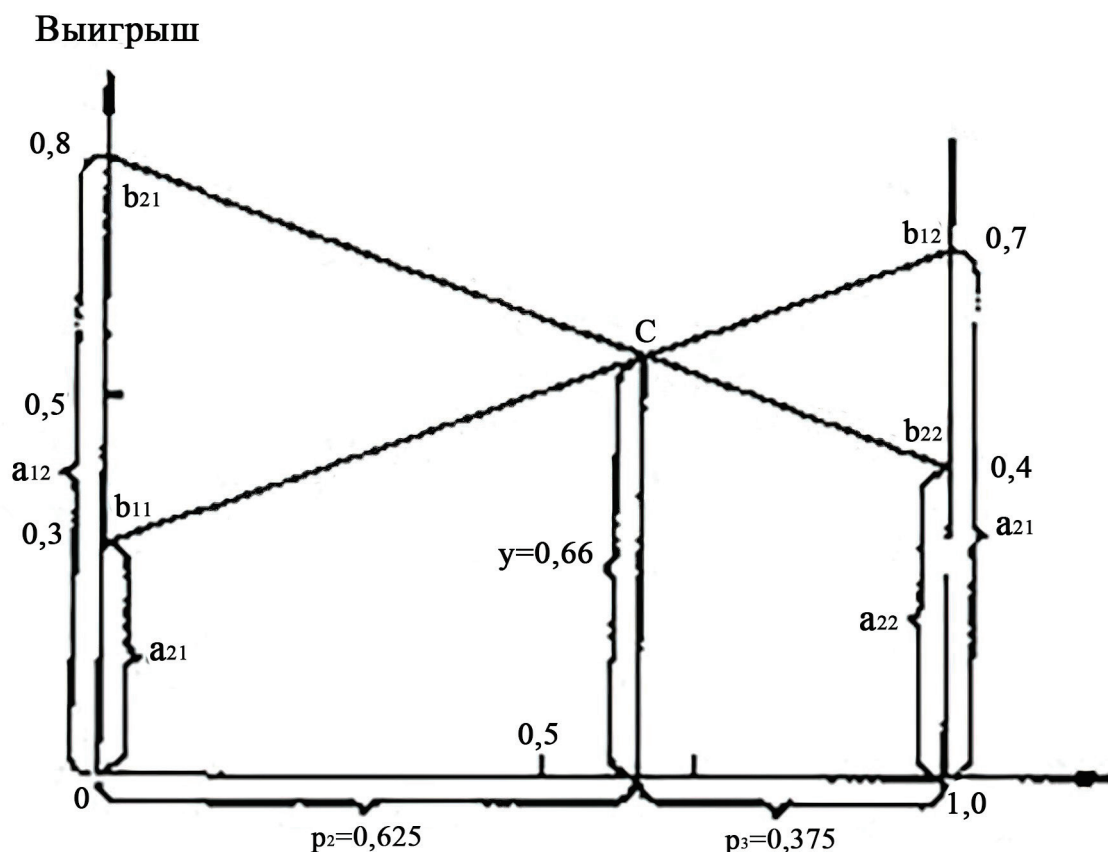


Рис. 5.2.3. Графическая интерпретация алгоритма решения

Выпишем решение и представим оптимальную стратегию игры:

$$p_1 = 0.375 = \frac{3}{8}; \quad p_2 = 0.625 = \frac{5}{8}; \quad v = 0.55; \quad S^o = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0.375 & 0.625 \end{pmatrix}.$$

Вывод. $\frac{3}{8}$ части автопарка – 15 машин – следует отправить на маршрут

A_1 , а остальные 25 машин ($\frac{5}{8}$ от 40 машин) – на маршрут A_2 . При этом прибыль будет составлять 0,55 млн. рублей.

Задача 5.2.2. Решить графически и аналитически игру, заданную платежной матрицей: $\begin{pmatrix} 1,5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Нижняя цена игры равна $a_{11}=1,5$. Верхняя цена игры равна $a_{21}=2$, седловая точка отсутствует.

Для игрока A решение представлено на рисунке 5.2.4. Точка N определяет оптимальную стратегию, а ордината – цену игры v .

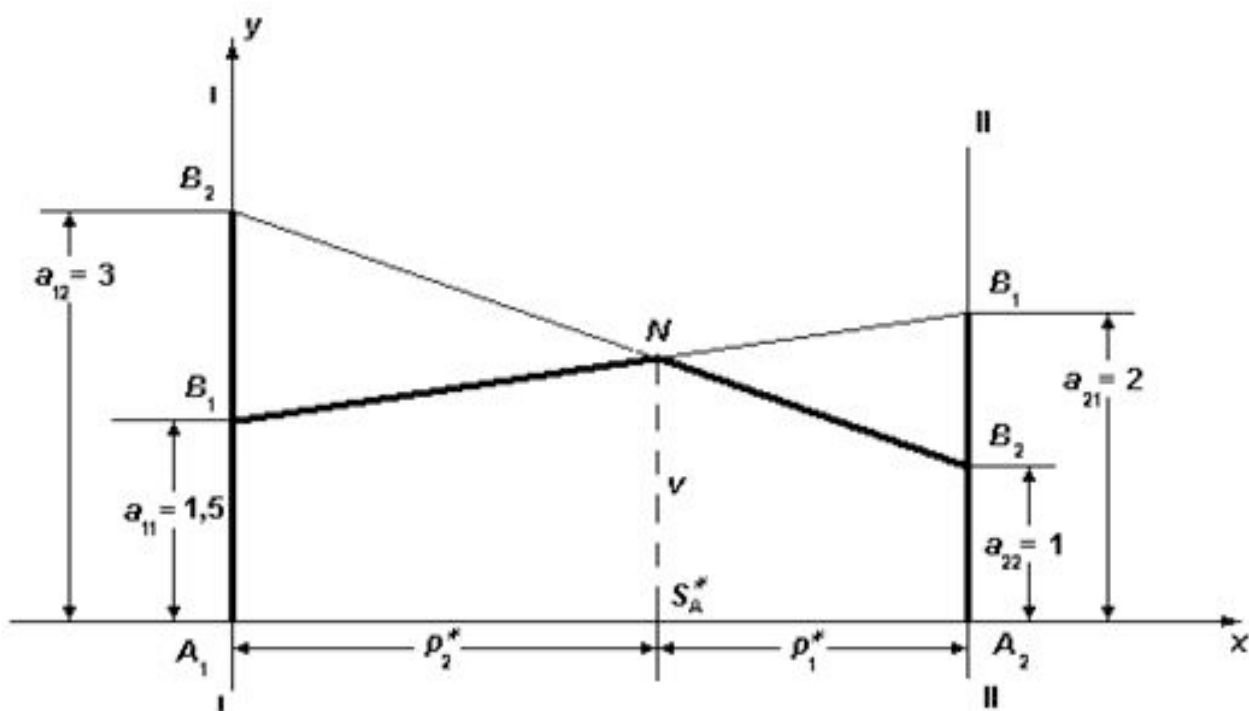


Рис. 5.2.4. Решение матричной игры для игрока A

Воспользуемся системой (5.2.12) и найдем точку пересечения

соответствующих прямых:

$$\begin{cases} 1.5p_1 + 2p_2 = v \\ 3p_1 + p_2 = v \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases} ; \begin{cases} 1.5p_1 + 2(1-p_1) = v \\ 3p_1 + (1-p_1) = v \end{cases} ;$$

$$1.5p_1 + 2(1-p_1) = 3p_1 + (1-p_1)$$

$$2.5p_1 = 1$$

$$p_1 = 0.4; p_2 = 0.6; v = 1.8.$$

Получаем $N(0.6; 1.8)$.

Следовательно, оптимальная стратегия игрока A заключается в выборе стратегии A_1 с вероятностью 0.6 и стратегии A_2 с вероятностью 0.4. При этом цена игры $v = 1.8$.

Для игрока B решение представлено на рисунке 5.2.5.

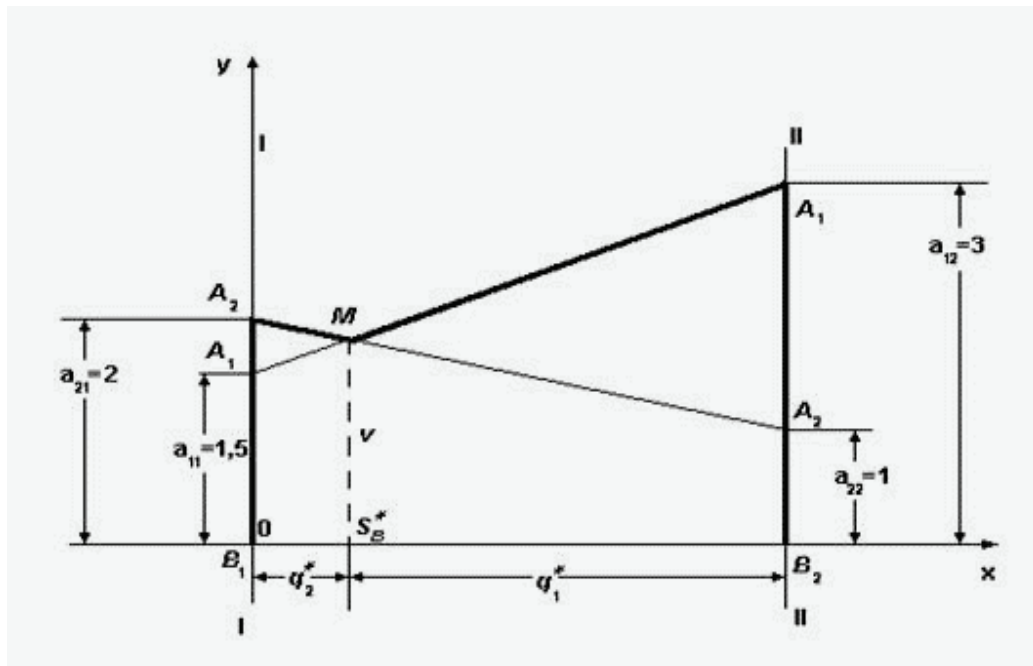


Рис. 5.2.5. Решение матричной игры для игрока B

Находя точку пересечения соответствующих прямых, пользуясь системой

$$(5.2.15), \text{ получаем: } \begin{cases} 1.5q_1 + 3q_2 = v \\ 2q_1 + q_2 = v \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases}.$$

Отсюда $M(0.2; 1.8)$.

Следовательно, оптимальная стратегия игрока B заключается в выборе стратегии B_1 с вероятностью 0.8 и стратегии B_2 с вероятностью 0.2. При этом цена игры $v = 1.8$.

Ответ. $S_A = (0.4; 0.6)$, $S_B = (0.8; 0.2)$, $v = 1.8$.

ЗАДАЧИ К 5.2

Задача 5.2.3. Найти решение игры, определяемой матрицей:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Решение. Проверим игру на наличие седловой точки.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = 2$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 3 \end{bmatrix}}_{\downarrow} \Rightarrow \beta = 3$$

Игра не имеет седловой точки, т. к. $\alpha \neq \beta$. Поэтому ищем решение в смешанных стратегиях:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2-5}{1+2-3-5} = \frac{3}{5}, \\ x_2 = 1 - x_1 = \frac{2}{5}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = \frac{2-3}{1+2-3-5} = \frac{1}{5}, \\ y_2 = 1 - y_1 = \frac{4}{5}. \end{cases}$$

$$v = \frac{1 \cdot 2 - 3 \cdot 5}{1+2-3-5} = \frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}.$$

Ответ. $x^* = \left[\frac{3}{5} \frac{2}{5}\right]; y^* = \left[\frac{1}{5} \frac{4}{5}\right]; v = 2\frac{3}{5}.$

Задача 5.2.4. Найти решение игры, определяемой матрицей:
 $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$

Решение. Проверим игру на наличие седловой точки.

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \alpha=3$$

$$\begin{array}{c} \hline 3 \quad 6 \\ \hline \downarrow \\ \beta=3 \end{array}$$

$$\alpha = \beta = 3.$$

Ответ. Игра имеет седловую точку, которая определяет решение игры, т.е. пару оптимальных стратегий A_I и B_I , и чистую цену игры $v = 3$.

Задача 5.2.5. Торговая организация A хочет войти на рынок, контролируемый организацией B . Прибыль A рассматривается B как чистый убыток. A выделяет 1 млн. руб. на закупку товара на реализацию. Имеется выбор между закупкой товаров T_1 или T_2 . Ожидаемая прибыль зависит от того, какой товар T_1 или T_2 будет закупать конкурент B . Если оба будут закупать T_1 , то ввиду конкуренции A понесет убытки в 200 тыс. руб. Если оба будут закупать T_2 , то по той же причине A понесет убытки в 100 тыс. руб. Если A закупит T_1 , а B закупит T_2 , то прибыль A составит 900 тыс. руб. Если A закупит T_2 , а B закупит T_1 , то прибыль A составит 700 тыс. руб. Какова оптимальная стратегия A ? На какую прибыль следует рассчитывать?

Решение.

Таблица 5.2.2

Игрок 1 \ Игрок 2	Игрок 2		
	B_1	B_2	α_i
A_1	-200	900	-200
A_2	700	-100	-100
β_j	700	900	

Ответ. $S_A = \left(\frac{8}{19}; \frac{11}{19}\right)$, $v \approx 321.053$.

Таким образом, игроку A выгодно закупить товара T_1 на сумму 421 тыс. руб. и товара T_2 на сумму 579 тыс. руб. Прибыль составит 321053 руб.

Задача 5.2.6. Матричная игра задана следующей платежной матрицей.

Стратегии A	Стратегии B	
	B_1	B_2
A_1	3	5
A_2	6	3/2

Представьте аналитическое и графическое решение. Найдите верхнюю и нижнюю цену игры, оптимальные стратегии игроков и цену игры.

Ответ. $x^* = [0.692; 0.308]$; $y^* = [0.538; 0.462]$; $v = 3.923$.

5.3. Мажорирование стратегий по строкам и столбцам

Мажорирование представляет отношение между стратегиями, наличие которого во многих практических случаях дает возможность сократить размеры исходной платежной матрицы игры.

Рассмотрим это понятие на примере матрицы

$$\begin{pmatrix} -0.5 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Рассуждая с позиции игрока 2, можно обнаружить преимущество его третьей стратегии перед второй, поскольку при первой стратегии игрока 1 выигрыш игрока 2 равен (-3) (вторая стратегия) и 1 (третья стратегия), а при второй стратегии игрока 1 выигрыш игрока 2 равен (-2) (вторая стратегия) и $(-0,5)$ (третья стратегия).

Таким образом, при любой стратегии игрока 1 игроку 2 выгоднее применять свою третью стратегию по сравнению со второй; при наличии третьей стратегии игрок 2, если он стремится играть оптимально, никогда не будет использовать свою вторую стратегию, поэтому ее можно исключить из игры, т. е. в исходной платежной матрице можно вычеркнуть 2-й столбец:

$$\begin{pmatrix} -0.5 & -1 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

С позиции игрока 1 его первая стратегия оказывается хуже второй, так как по первой стратегии он только проигрывает. Поэтому первую стратегию можно исключить, а матрицу игры преобразовать к виду:

$$(0 \ 0.5).$$

Учитывая интересы игрока 2, следует оставить только его первую стратегию, поскольку, выбирая вторую стратегию, игрок 2 оказывается в проигрыше (0.5 – выигрыш игрока 1), и матрица игры принимает простейший вид: (0) , т. е. имеется седловая точка.

Мажорирование можно распространить и на смешанные стратегии. Если элементы одной строки не все меньше (или равны) соответствующих элементов других строк, но все меньше (или равны) некоторых выпуклых линейных комбинаций соответствующих элементов других строк, то эту стратегию можно исключить, заменив ее смешанной стратегией с соответствующими частотами использования чистых стратегий.

В качестве иллюстрации к сказанному рассмотрим матрицу игры:

$$\begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Для первых двух чистых стратегий игрока 1 возьмем частоты их применения (вероятности), равными 0.25 и 0.75 .

Третья стратегия игрока 1 мажорируется линейной выпуклой комбинацией первой и второй чистых стратегий, взятых с частотами 0.25 и 0.75 соответственно, т. е. смешанной стратегией

$$24 \cdot 0.25 + 0 \cdot 0.75 = 6 > 4;$$

$$0 \cdot 0.25 + 8 \cdot 0.75 = 6 > 5.$$

Поэтому третью стратегию игрока 1 можно исключить, используя вместо нее указанную выше смешанную стратегию.

Аналогично, если каждый элемент некоторого столбца больше или равен некоторой выпуклой линейной комбинации соответствующих элементов некоторых других столбцов, то этот столбец можно исключить из рассмотрения (вычеркнуть из матрицы).

Например, для матрицы $\begin{pmatrix} 10 & 0 & 6 \\ 0 & 10 & 7 \end{pmatrix}$ третья стратегия игрока 2

мажорируется смешанной стратегией из первой и второй его чистых стратегий, взятых с частотами 0.5 и 0.5 :

$$10 \cdot 0.5 + 0 \cdot 0.5 = 5 < 6;$$

$$0 \cdot 0.5 + 10 \cdot 0.5 = 5 < 7.$$

Таким образом, исходная матрица игры эквивалентна матрице следующего вида: $\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$.

Как видно, возможности мажорирования смешанными стратегиями в отличие от чистых значительно менее прозрачны (нужно должным образом подобрать частоты применения чистых стратегий), но такие возможности есть, и ими полезно уметь пользоваться.

Рассмотрим экономическую задачу, сводящуюся к игровой модели.

Задача 5.3.1. В регионе работала единственная фармацевтическая компания B . Фирма A входит на рынок и планирует производить три новые лекарственных средства: A_1 , A_2 и A_3 . Конкурент B выпускает аналогичные средства B_1 , B_2 и B_3 . Поскольку планирующиеся к выпуску средства аналогичны, то спрос и соответственно прибыль каждой фирмы от производства каждой модели зависит от того, что производит конкурент. Прибыль фирмы A равна чистым убыткам фирмы B . Оценки прибыли фирмы A (в млн. руб.) приведены в таблице 5.3.1.

Таблица 5.3.1

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3
A_1	2	5	8
A_2	7	6	10
A_3	12	10	8

Как рациональнее всего поступить фирме A , чтобы получить наибольшую прибыль?

Решение. Получаем игру с платежной матрицей $P = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 7 & 6 & 10 \\ 12 & 10 & 8 \end{pmatrix}$.

В этой матрице первую строку можно отбросить как невыгодную (ее элементы меньше соответствующих элементов второй строки). Матрица примет вид

$P = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 10 \\ 12 & 10 & 8 \end{pmatrix}$. Элементы первого столбца больше соответствующих

элементов второго столбца, поэтому его можно отбросить. Игра упростилась:

$P = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$.

По формулам (5.2.13) и (5.2.14) находим:

$$p_2 = \frac{8-10}{6+8-10-10} = \frac{1}{3},$$

$$p_3 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \quad v = \frac{6 \cdot 1}{3} + \frac{10 \cdot 2}{3} = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}.$$

Вывод. Оптимальная стратегия производителя продукции $S_A = \left(0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$, т. е. лекарство A_1 выпускать не следует, а следует выпустить $1/3$ лекарства A_2 и $2/3$ — A_3 , при этом развитии событий следует ориентироваться на прибыль $8\frac{2}{3}$ млн. руб.

ЗАДАЧИ К 5.3

Задача 5.3.2. Платежная матрица игры задана в виде:

$$\begin{pmatrix} 8 & 9 & 9 & 4 \\ 6 & 5 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 8 & 6 \\ 8 & 9 & 9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Упростите игру.

Решение. Первая и четвертая строки равны, поэтому отбросим первую строку. Получим матрицу: $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 8 & 6 \\ 8 & 9 & 9 & 4 \end{pmatrix}$. Первая строка доминирует над второй строкой. Поэтому отбросим вторую строку. Получим матрицу: $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 8 & 7 \\ 8 & 9 & 9 & 4 \end{pmatrix}$. Второй столбец доминирует над третьим столбцом. Поэтому отбросим третий столбец. Получим матрицу: $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 7 \\ 8 & 9 & 4 \end{pmatrix}$. Строки между собой не сравнимы, столбцы тоже. Дальнейшее упрощение невозможно.

Ответ. $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 7 \\ 8 & 9 & 4 \end{pmatrix}$.

Задача 5.3.3. Платежная матрица игры задана в виде:

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 7 & 6 & 10 & 8 \\ 8 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Упростите игру.

Решение. Первая строка доминирует вторую, поэтому отбрасываем вторую строку. Получим матрицу: $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 10 & 8 \\ 8 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Третья строка доминирует

первую строку, поэтому отбрасываем первую строку. Получим матрицу:

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 10 & 8 \\ 8 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Второй столбец доминирует первый столбец, поэтому вычеркиваем первый столбец. Получим матрицу:

$$\begin{pmatrix} 6 & 10 & 8 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Третий столбец доминирует второй столбец, поэтому отбрасываем второй столбец. Получим матрицу:

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Первая строка доминирует вторую строку, поэтому отбрасываем вторую строку (6 8). Первый столбец доминирует второй столбец, поэтому отбрасываем второй столбец. Получаем матрицу (6). Итак, в результате упрощения платежной матрицы выяснилось, что игра имеет единственное оптимальное решение в чистых стратегиях:

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 7 & \mathbf{6} & 10 & 8 \\ 8 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Игра имеет седловую точку. Первый игрок A должен все время выбирать стратегию A_3 , а второй игрок B должен выбирать стратегию B_2 .

Проверьте, что тот же результат получится, если использовать максиминную стратегию.

Ответ. $v = 6$.

5.4. Метод решения матричных антагонистических игр $2 \times n$ и $m \times 2$

Играми $2 \times n$ и $m \times 2$ называют игры двух игроков, у одного из которых имеется 2 стратегии, а у другого множество ($m, n > 2$) стратегий. Игры $2 \times n$ и $m \times 2$ могут иметь либо седловую точку, либо оптимальную стратегию, при которой обе чистые стратегии активны. Поэтому игры $2 \times n$ и $m \times 2$ могут быть сведены к играм 2×2 . Рассмотрим графический способ решения матричной игровой задачи $2 \times n$, аналогичный способу решения игры 2×2 .

Пусть платежная матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}.$$

Для произвольной стратегии второго игрока, контролирующего столбцы, имеем выигрыш первого игрока: $v(p) = p_1 \cdot a_{1j} + (1 - p_1) \cdot a_{2j}$, поскольку, как сказано раньше, $p_1 + p_2 = 1$, $p_1, p_2 \in [0; 1]$.

Графиком зависимости $v(p)$ будет некоторая прямая. Для разных стратегий, то есть для разных $j = 1, 2, \dots, n$, получаются разные прямые.

Рассмотрим прямоугольную систему координат, где по оси абсцисс откладывается единичный отрезок A_1A_2 ; точка A_1 изображает стратегию A_1 , а точка A_2 изображает стратегию A_2 . **Все промежуточные точки этого отрезка – смешанные стратегии первого игрока, причем расстояние до правого конца отрезка – это вероятность p_1 стратегии A_1 , расстояние до левого**

конца отрезка – это вероятность p_2 стратегии A_2 . На перпендикулярах $x=0$ и $x=1$ откладываем выигрыши при стратегиях A_1 и A_2 соответственно (рис. 5.4.1).

На рисунке 5.4.1 изображен случай $j=1,2,3$ для игры 2×3 . Из принципа минимакса следует, что надо взять **нижнюю огибающую всех прямых**, соответствующих стратегиям второго игрока (она показана на рисунке жирной линией), а на этой ломаной, обязательно обращенной выпуклостью вверх, **надо найти вершину, имеющую максимальное значение v^*** . Абсцисса этой точки x^* и будет искомым значением p_2^* .

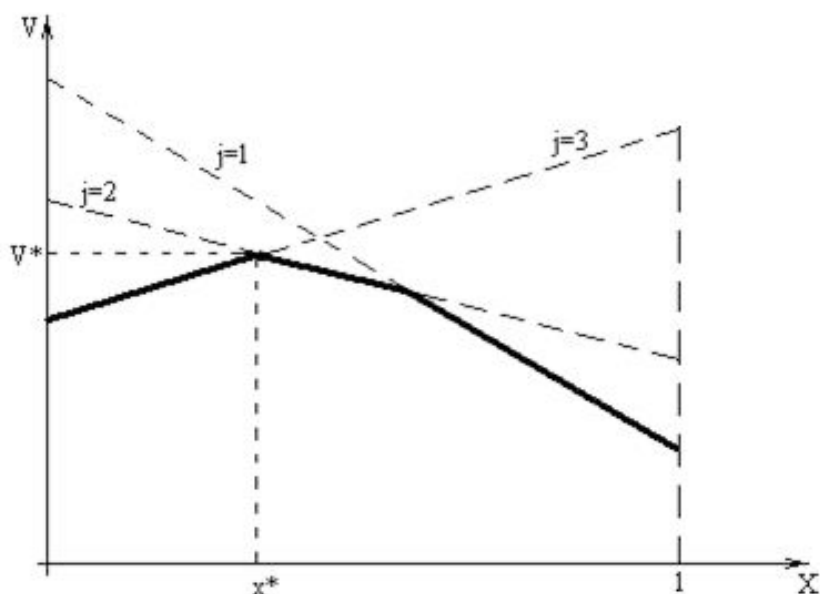


Рис. 5.4.1. Графическое нахождение цены игры

Геометрически можно определять и оптимальную стратегию игрока B для игры $m \times 2$, но в этом случае строится не нижняя, а верхняя граница выигрыша и на ней определяется не максимум, а минимум.

Алгоритм геометрического решения игры $2 \times n$

1. Откладываем горизонтальный отрезок $[0,1]$, каждая точка которого соответствует смешанной стратегии игрока A . В концах этого отрезка проводим два перпендикуляра. Левый соответствует чистой стратегии A_1 , правый – чистой стратегии A_2 игрока A .

2. На левом перпендикуляре от точки 0 его пересечения с горизонтальным отрезком откладываем (как на вертикальной числовой оси) все элементы первой строки платежной матрицы. На правом перпендикуляре от точки 1 его пересечения с отрезком $[0,1]$ откладываем (как на вертикальной числовой оси) все элементы второй строки платежной матрицы. При этом масштабы на обоих перпендикулярах должны быть одинаковые, но не обязаны совпадать с масштабом отрезка $[0,1]$.

3. Каждую пару точек, изображающих элементы a_{1j} , a_{2j} , $j=1, \dots, n$, стоящих в j -м столбце платежной матрицы, соединяем отрезком a_{1j} , a_{2j} . Таким образом

будут построены n отрезков, представляющих собой графики n линейных функций: $H(P, B_j) = (a_{2j} - a_{1j})p + a_{1j}$, $j = 1, \dots, n$, $p \in [0, 1]$.

4. Находим **нижнюю огибающую семейства** построенных отрезков a_{1j} , a_{2j} , представляющую собой выпуклую вверх ломаную. Затем находим **максимальную точку нижней огибающей**. Абсцисса p^0 этой точки определяет оптимальную смешанную стратегию $P^0 = (1 - p^0, p^0)$ игрока A . Ордината наивысшей точки нижней огибающей равна цене игры v .

5. Верхний из концов нижней огибающей, лежащих на перпендикулярах, есть нижняя цена игры в чистых стратегиях, т. е. α . Нижний из верхних концов отрезков a_{1j} , a_{2j} , $j = 1, \dots, n$, есть верхняя цена игры в чистых стратегиях β .

6. Элемент платежной матрицы, изображающая точка которого является нижней на перпендикуляре, где она лежит, и верхним концом отрезка, на котором она лежит, будет **седловой** точкой игры. В этом случае **чистая стратегия игрока B** , номер которой совпадает со вторым индексом седловой точки, является оптимальной.

Задача 5.4.1. Графически решить игру: $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Действуя по алгоритму геометрического нахождения игры $2 \times n$ (рис. 5.4.2), находим, что цена игры $v = 3,5$, нижняя цена игры: $\alpha = 2$, верхняя цена игры: $\beta = 4$, оптимальная стратегия игрока A : $P^0 = (1/2, 1/2)$.

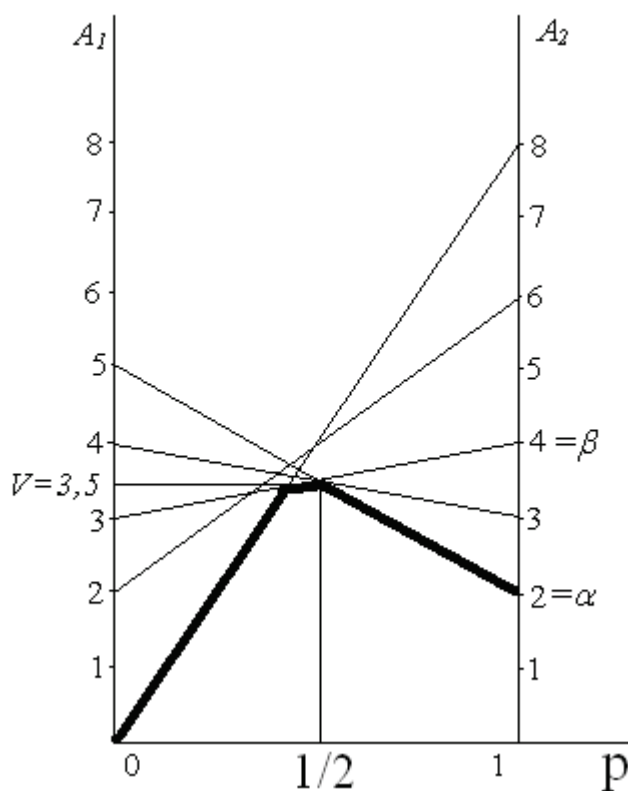


Рис. 5.4.2. Решение игры для игрока A

Алгоритм геометрического решения игры $m \times 2$

1. Откладываем горизонтальный отрезок $[0,1]$, каждая точка которого соответствует смешанной стратегии игрока B . В концах этого отрезка проводим два перпендикуляра. Левый соответствует чистой стратегии B_1 , правый – чистой стратегии B_2 игрока B .

2. На левом перпендикуляре от точки 0 его пересечения с горизонтальным отрезком откладываем (как на вертикальной числовой оси) все элементы первого столбца платежной матрицы. На правом перпендикуляре от точки 1 его пересечения с отрезком $[0,1]$ откладываем (как на вертикальной числовой оси) все элементы второго столбца платежной матрицы. При этом масштабы на обоих перпендикулярах должны быть одинаковые, но не обязательно совпадающие с масштабом отрезка $[0,1]$.

3. Каждую пару точек, изображающих элементы $a_{i1}, a_{i2}, i=1...m$, стоящих в i -той строке платежной матрицы, соединяем отрезком a_{i1}, a_{i2} . Таким образом будут построены m отрезков, представляющих собой графики m линейных функций, зависящих от вероятности q : $H(A_i, Q) = (a_{i2} - a_{i1})q + a_{i1}, i=1, ..., m, q \in [0,1]$.

4. Находим **верхнюю огибающую семейства** построенных отрезков a_{i1}, a_{i2} , представляющую собой выпуклую вниз ломаную. Затем находим **минимальную точку верхней огибающей**. Абсцисса q^0 этой точки определяет оптимальную смешанную стратегию $Q^0 = (1 - q^0, q^0)$ игрока B . Ордината наинизшей точки верхней огибающей равна цене игры v .

5. Верхний из нижних концов отрезков a_{i1}, a_{i2} есть нижняя цена игры в чистых стратегиях, т. е. α . Нижний из концов верхней огибающей (лежащих на перпендикулярах) есть верхняя цена игры в чистых стратегиях, т. е. β .

6. Элемент платежной матрицы, изображающая точка которого является нижним концом отрезка, на котором она лежит, и верхней на перпендикуляре, на котором она лежит, будет **седловой** точкой игры. В этом случае **чистая стратегия игрока A** , номер которой совпадает с первым индексом седловой точки, является оптимальной.

Задача 5.4.2. Графически решить игру: $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 3 \\ 0 & 6 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Действуя по алгоритму геометрического нахождения игры $m \times 2$ (рис. 5.4.3), находим, что цена игры $v = 4$, нижняя цена игры: $a = 3$, верхняя цена игры: $b = 5$, оптимальная стратегия игрока B : $Q^0 = (2/3, 1/3)$.

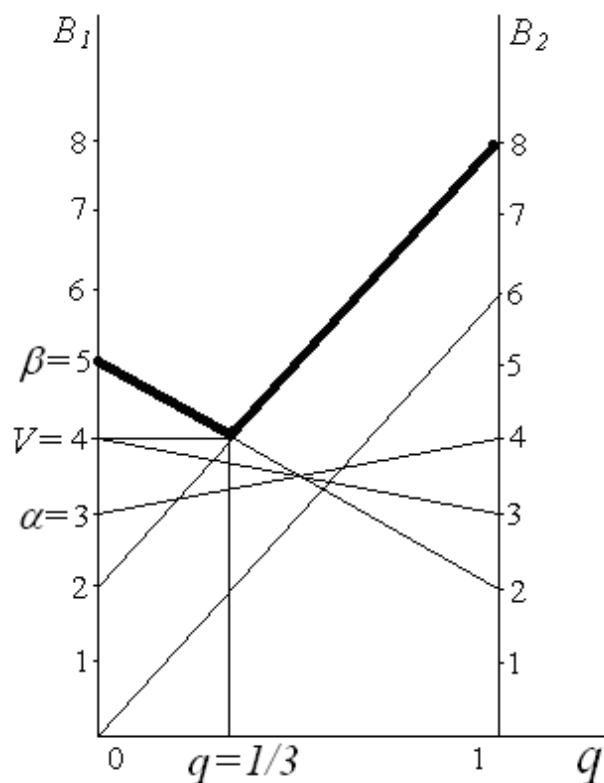


Рис. 5.4.3. Решение игры для игрока B

Графический метод решения матричных антагонистических игр даёт приближенное решение. Для получения более точных вычислений стоит воспользоваться аналитическим методом. Преимущество графической интерпретации в том, что она даёт возможность наглядно представить нижнюю и верхнюю цены игры, средний выигрыш, определить по графику заведомо невыгодные стратегии. Для решения игры $2 \times n$ необходимо найти стратегии, при пересечении которых была выявлена точка P^o (при решении игры $m \times 2$ необходимо найти стратегии, при пересечении которых была выявлена точка Q^o) – эти стратегии являются активными, остальные – пассивными. Пользуясь только активными стратегиями, решаем игру 2×2 .

Задача 5.4.3. Решить матричную игру $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 9 & -3 & 13 \\ 2 & 8 & -2 & 12 & -6 \end{pmatrix}$

Решение. Проверим наличие седловой точки (см. табл. 5.4.1).

Таблица 5.4.1

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	α_i
A_1	5	1	9	-3	13	-3
A_2	2	8	-2	12	-6	-6
β_j	5	8	9	12	13	

Определим максиминную стратегию:

$\alpha_1 = -3$; $\alpha_2 = -6$, $\alpha = -3$ (см. столбец α_i).

Максиминная стратегия – строка A_1 .

Определим минимаксную стратегию: $\beta_1 = 5$; $\beta_2 = 8$; $\beta_3 = 9$; $\beta_4 = 12$; $\beta_5 = 13$; $\beta = 5$ (см. столбец β_j). Максиминная стратегия – столбец B_1 .

Здесь $\alpha < \beta$, следовательно, седловой точки нет.

Решим матричную игру графически. Построим прямые, соответствующие стратегиям игрока B (см. рис. 5.4.4).

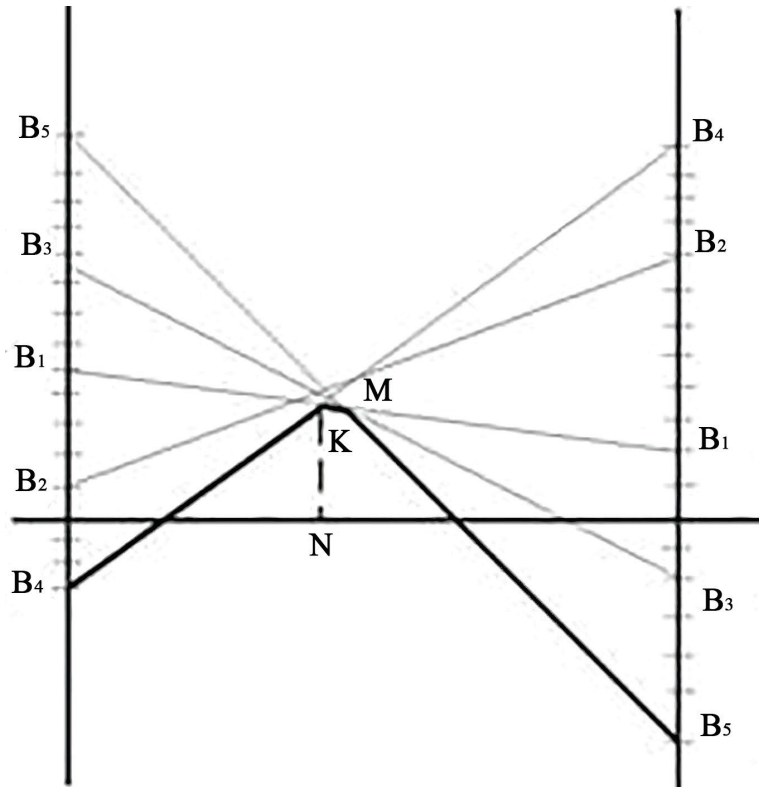


Рис. 5.4.4. Решение игры для игрока A

Ломаная B_4KMB_5 соответствует нижней границе выигрыша. На ней определяем точку K с максимальной ординатой, которая и есть цена игры $v = KN$. Оптимальные стратегии для игрока B – первая и четвертая.

Ломаная B_4KMB_5 соответствует нижней границе выигрыша. На ней определяем точку K с максимальной ординатой, которая и есть цена игры $v = KN$. Оптимальные стратегии для игрока B – первая и четвертая.

Матрица оптимальных стратегий имеет вид: $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$. По формулам (5.2.13), (5.2.14), (5.2.16), находим:

$$p_1 = \frac{12 - 2}{5 + 12 - 2 - (-3)} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}, \quad p_2 = \frac{5 - (-3)}{5 + 12 - 2 - (-3)} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

$$q_1 = \frac{12 - (-3)}{18} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}, \quad q_2 = \frac{5 - 2}{18} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$$

При этом
$$v = \frac{5 \cdot 12 - 2 \cdot (-3)}{5 + 12 - 2 + 3} = \frac{66}{18} = \frac{22}{3}.$$

Ответ. $S_A = \left(\frac{5}{9}; \frac{4}{9}\right)$, $S_B = \left(\frac{5}{6}; 0; 0; \frac{1}{6}; 0\right)$, $v = \frac{22}{3}$.

Задача 5.4.4. Найти решение игры, заданной матрицей $M = \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 10 & 7 \\ 7 & 9 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$.

Решение. Так как $7 \neq 11$, седловой точки нет. Решим матричную игру графически. Построим прямые, соответствующие стратегиям игрока A .

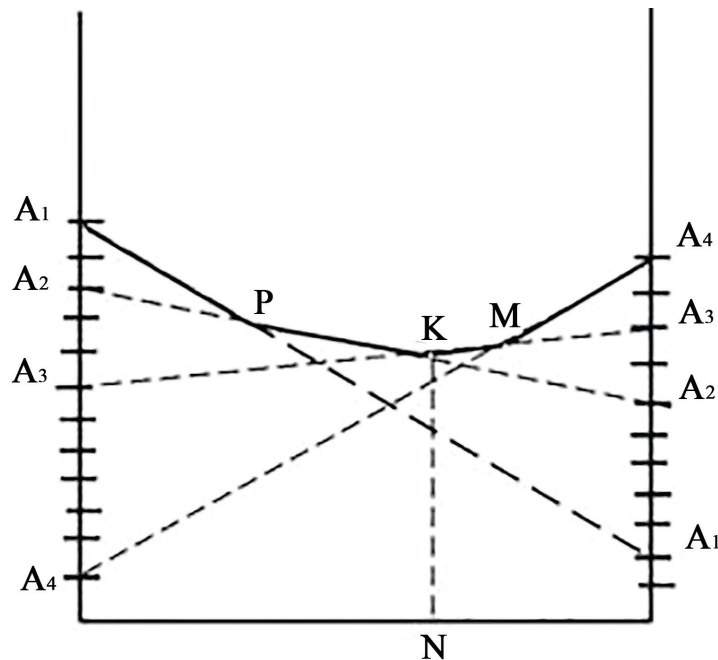


Рис. 5.4.5. Решение игры для игрока B

Ломанная A_1PKMA_4 изображает верхнюю границу выигрыша игрока A . На нем определяем K с минимальной ординатой, которая и есть цена игры $v = KN$. Оптимальные стратегии для игрока A – вторая и третья. Матрица оптимальных стратегий имеет вид: $\begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$.

Находим:

$$p_1 = \frac{9 - 7}{10 + 9 - 7 - 7} = \frac{2}{5}, \quad p_2 = \frac{10 - 7}{10 + 9 - 7 - 7} = \frac{3}{5},$$

$$q_1 = \frac{9 - 7}{10 + 9 - 7 - 7} = \frac{2}{5}, \quad q_2 = \frac{10 - 7}{10 + 9 - 7 - 7} = \frac{3}{5}$$

$$v = \frac{10 \cdot 9 - 7 \cdot 7}{10 + 9 - 7 - 7} = \frac{41}{5}.$$

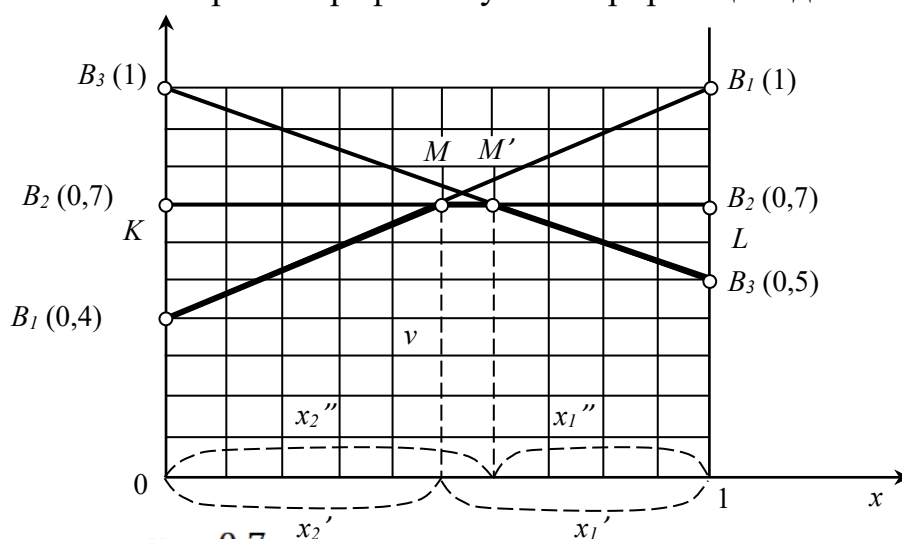
Ответ. $S_A = \left(0; \frac{2}{5}; \frac{3}{5}; 0\right)$, $S_B = \left(\frac{2}{5}; \frac{3}{5}\right)$, $v = \frac{41}{5}$.

ЗАДАЧИ К 5.4

Задача 5.4.5. Найти решение задачи графическим способом:

$$A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.7 & 1 \\ 1 & 0.7 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Решение. Изобразим графическую интерпретацию данной игры:



Цена игры $v = 0.7$.

При определении оптимальной стратегии игрока А находим интервал значения x_2 и, исходя из этого, определяем x_1 :

$$0.5 \leq x_2 \leq 0.6, \quad x_1 = 1 - x_2.$$

При наличии горизонтального участка оптимальной чистой стратегией игрока В будет стратегия, соответствующая этому горизонтальному участку (в данном случае B_2).

$$y_2 = 1; \quad y_1 = y_3 = 0.$$

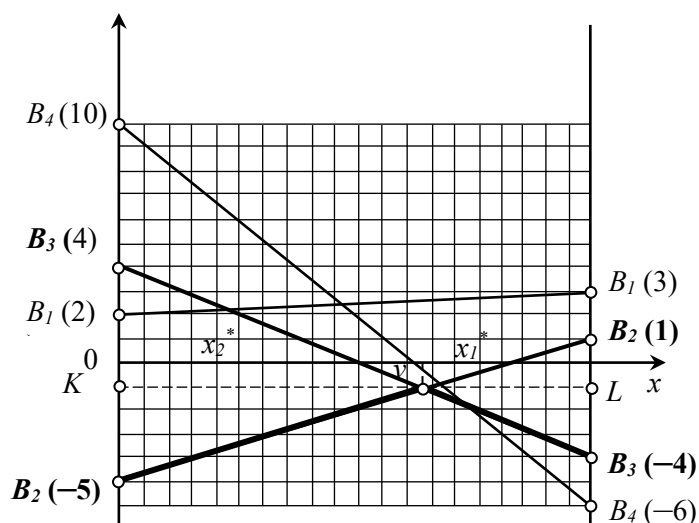
Ответ.

$$v = 0.7; \quad S_A = (x_1; x_2), \quad x_2 \in [0.5; 0.6], \quad x_1 = 1 - x_2; \quad S_B = (0; 1; 0).$$

Задача 5.4.6. Определить графическим способом решение игровой задачи:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & 10 \\ 3 & 1 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

Решение. Изобразим графическую интерпретацию данной игры:



Ответ. $S_A = \left(\frac{5}{14}; \frac{9}{14} \right)$, $S_B = \left(0; \frac{4}{7}; \frac{3}{7}; 0 \right)$, $v = -\frac{8}{7}$.

5.5. Приведение матричной игры к паре двойственных задач линейного программирования

Игра $m \times n$ в общем случае не имеет наглядной геометрической интерпретации. Ее решение достаточно трудоемко при больших m и n , однако принципиальных трудностей не имеет, поскольку может быть сведено к решению задачи линейного программирования. Покажем это.

Пусть игра $m \times n$ задана платежной матрицей $p = (a_{ij})$, $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$. Игрок A обладает стратегиями $A_1, A_2, \dots, A_m$, игрок B – стратегиями $B_1, B_2, \dots, B_n$. Необходимо определить оптимальные стратегии

$$S_A^0 = (p_1^0, p_2^0, \dots, p_m^0) \text{ и } S_B^0 = (q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0),$$

где p_i^0, q_j^0 – вероятности применения соответствующих чистых стратегий A_i, B_j , $p_1^0 + p_2^0 + \dots + p_m^0 = 1, q_1^0 + q_2^0 + \dots + q_n^0 = 1$.

Оптимальная стратегия S_A^0 удовлетворяет следующему требованию. Она обеспечивает игроку A средний выигрыш, не меньший, чем цена игры v , при любой стратегии игрока B и выигрыш, равный цене игры v , при оптимальной стратегии игрока B . Без ограничения общности полагаем $v > 0$: этого можно добиться, сделав все элементы $a_{ij} \geq 0$. Если игрок A применяет смешанную стратегию $S_A^0 = (p_1^0, p_2^0, \dots, p_m^0)$ против любой чистой стратегии B_j игрока B , то он получает средний выигрыш, или математическое ожидание выигрыша $a_j = a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + \dots + a_{mj}p_m$, $j = 1, \dots, n$ (т. е. элементы j -го столбца платежной матрицы почленно умножаются на соответствующие вероятности стратегий $A_1, A_2, \dots, A_m$ и результаты складываются).

Для оптимальной стратегии S_A^0 все средние выигрыши не меньше цены игры V , поэтому получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{m1}p_m \geq v \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \dots + a_{m2}p_m \geq v \\ \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \dots + a_{mn}p_m \geq v. \end{cases} \quad (5.5.1)$$

Каждое из неравенств можно разделить на число $\nu > 0$. Введем новые переменные:

$$x_1 = \frac{p_1}{\nu}, x_2 = \frac{p_2}{\nu}, \dots, x_m = \frac{p_m}{\nu}. \quad (5.5.2)$$

Тогда система (5.5.1) примет вид:

[illegible]

Цель игрока A – максимизировать свой гарантированный выигрыш, т.е. цену игры v . Разделив на $v \neq 0$ равенство $p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$, получаем, что переменные x_i ($i = 1, \dots, m$) удовлетворяют условию: $x_1 + x_2 + \dots + x_m = \frac{1}{v}$.

Максимизация цены игры v эквивалентна минимизации величины $\frac{1}{v}$.

Поэтому задача может быть сформулирована следующим образом: определить значения переменных $x_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$ так, чтобы они удовлетворяли линейным ограничениям (5.5.3) и при этом линейная функция

$$Z = x_1 + x_2 + \dots + x_m \quad (5.5.4)$$

обращалась в минимум. Это задача линейного программирования. Решая задачу (5.5.3) – (5.5.4), получаем оптимальное решение $(p_1^0, p_2^0, \dots, p_m^0)$ и оптимальную стратегию S_A^0 .

Для определения оптимальной стратегии $S_B^0 = (q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0)$ следует учесть, что игрок B стремится минимизировать гарантированный выигрыш, т. е. найти $\max_V \frac{1}{V}$. Переменные $q_1, q_2, \dots, q_n$ удовлетворяют неравенствам:

(5.5.5)

Если обозначить

(5.5.6)

[illegible]

$$(5.5.7)$$

$$Z' = y_1 + y_2 + \dots + y_n. \quad (5.5.8)$$

При этом цена игры

(5.5.9)

$$\geq \quad \leq$$

62

оптимальных стратегий в конкретных задачах следует выбрать ту из взаимно двойственных задач, решение которой менее трудоемко, а решение другой задачи найти с помощью теорем двойственности. Приведем пример задачи, которая описывается игровыми моделями $m \times n$ и может быть решена методами линейного программирования.

Задача 5.5.1. Построить прямую и двойственную задачи линейного программирования и решить матричную игру, заданную платежной матрицей:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 4 & 2 \\ 7 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Задача сводится к игровой модели, в которой игра задана платежной матрицей (см. табл. 5.5.1).

Прежде чем решать задачу, можно попытаться упростить игру, проведя анализ платежной матрицы и отбросив стратегии, заведомо невыгодные или дублирующие.

Таблица 5.5.1

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	3	6	8
A_2	9	10	4	2
A_3	7	7	5	4

Так, вторая стратегия (второй столбец матрицы (см. табл. 5.5.1)) является явно невыгодной для игрока B по сравнению с первой (элементы второго столбца больше элементов первого столбца), так как цель игрока B – уменьшить выигрыш игрока A . Поэтому второй столбец можно отбросить.

Получим матрицу размера 3×3 : $P = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 9 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$

Таблица 5.5.2

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_3	B_4	α_i
A_1	3	6	8	3
A_2	9	4	2	2
A_3	7	5	4	4
β_j	9	6	8	6 \diagdown 4

Определим нижнюю и верхнюю цены игры в таблице 5.5.2. Так как $\alpha \neq \beta$, то седловая точка отсутствует и оптимальное решение следует искать в смешанных стратегиях игроков: $S_A^0 = (p_1^0, p_2^0, p_3^0)$ и $S_B^0 = (q_1^0, q_2^0, q_3^0)$.

Обозначив $x_i = \frac{p_i}{v}$, $i=1,2,3$ и $y_j = \frac{q_j}{v}$, $j=1,2,3$, составим две взаимно-двойственные задачи линейного программирования (см. (5.5.2)-(5.5.3) и (5.5.6)-(5.5.7)).

$$\begin{array}{ll}
 1. \begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + 7x_3 \geq 1 \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 \geq 1 \\ 8x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases} & 2. \begin{cases} 3y_1 + 6y_2 + 8y_3 \leq 1 \\ 9y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 1 \\ 7y_1 + 5y_2 + 4y_3 \leq 1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases} \\
 Z = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min & Z' = y_1 + y_2 + y_3 \rightarrow \max
 \end{array}$$

Решаем 2 задачу симплексным методом, поскольку для нее первое базисное решение будет допустимым. Введем добавочные переменные и

перейдем к уравнениям:

$$\begin{cases} 3y_1 + 6y_2 + 8y_3 + y_4 = 1 \\ 9y_1 + 4y_2 + 2y_3 + y_5 = 1 \\ 7y_1 + 5y_2 + 4y_3 + y_6 = 1. \\ y_j \geq 0, j=1,2,\dots,6 \end{cases}$$

I шаг. Основные переменные – y_4, y_5, y_6 ; неосновные переменные – y_1, y_2, y_3 .

$$\begin{cases} y_4 = 1 - 3y_1 - 6y_2 - 8y_3 \\ y_5 = 1 - 9y_1 - 4y_2 - 2y_3 \\ y_6 = 1 - 7y_1 - 5y_2 - 4y_3 \end{cases}$$

$$Z' = y_1 + y_2 + y_3.$$

Базисное решение $Y_1 = (0; 0; 0; 1; 1; 1)$ допустимое; переводим y_2 в основные; переводим y_4 в неосновные переменные.

II шаг. Основные переменные – y_2, y_5, y_6 ; неосновные переменные – y_1, y_3, y_4 .

Получим после преобразований:

$$\begin{cases} y_2 = \frac{1}{6} - \frac{3}{6}y_1 - \frac{8}{6}y_3 - \frac{1}{6}y_4 \\ y_5 = \frac{1}{3} - 7y_1 + \frac{10}{3}y_3 + \frac{2}{3}y_4 \\ y_6 = \frac{1}{6} - \frac{27}{6}y_1 - \frac{16}{6}y_3 + \frac{5}{6}y_4 \end{cases}$$

$$Z' = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}y_1 - \frac{2}{6}y_3 - \frac{1}{6}y_4.$$

Базисное решение: $Y_2 = \left(0; \frac{1}{6}; 0; 0; \frac{1}{3}; \frac{1}{6}\right)$. Переводим y_4 в основные;

$y_1 = \min\left\{\frac{1}{3}; \frac{1}{21}; \frac{1}{27}\right\} = \frac{1}{27}$. Переводим y_6 в неосновные переменные.

III шаг. Основные переменные – y_1, y_2, y_5 ; неосновные переменные – y_1, y_3, y_4, y_6 .

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{27} - \frac{16}{27}y_3 + \frac{5}{27}y_4 - \frac{6}{27}y_6 \\ y_2 = \frac{4}{27} - \frac{28}{27}y_3 - \frac{7}{27}y_4 + \frac{1}{9}y_6 \\ y_5 = \frac{2}{27} + \frac{202}{27}y_3 - \frac{17}{27}y_4 + \frac{14}{9}y_6 \\ Z' = \frac{5}{27} - \frac{17}{27}y_3 - \frac{2}{27}y_4 - \frac{1}{9}y_6. \end{cases}$$

Базисное решение: $Y_3 = \left(\frac{1}{27}; \frac{4}{27}; 0; 0; \frac{2}{27}; 0\right)$.

Так как отсутствуют положительные коэффициенты при неосновных переменных, то критерий оптимальности выполнен, $\max Z' = \frac{5}{27}$ и базисное

решение $Y_3 = \left(\frac{1}{27}; \frac{4}{27}; 0; 0; \frac{2}{27}; 0\right)$ является оптимальным.

Установим соответствие между переменными взаимно-двойственных задач и определим оптимальное базисное решение задачи с помощью теорем

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \text{двойственности: } & y_4 & y_5 & y_6 & y_1 & y_2 & y_3 \\ & \frac{2}{27} & 0 & \frac{1}{9} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{17}{27}. \end{array}$$

Оптимальное базисное решение: $\left(\frac{2}{27}, 0, \frac{1}{9}, \frac{1}{2}, 0, \frac{17}{27}\right)$, причем

$\min Z = \max Z' = \frac{5}{27}$. Из соотношений (5.5.9) находим цену игры

$$v = \frac{1}{\max Z'} = \frac{1}{\min Z} = \frac{27}{5} = 5.4.$$

Оптимальную стратегию $S_A^0 = (p_1^0, p_2^0, p_3^0)$ находим, используя (5.5.2):

$$p_i^0 = x_i \cdot v, \quad i=1,2,3, \quad \text{т.е.} \quad p_1^0 = 5.4 \cdot \frac{2}{27} = 0.4, \quad p_2^0 = 5.4 \cdot 0 = 0, \quad p_3^0 = 5.4 \cdot \frac{1}{9} = 0.6, \\ S_A^0 = (0.4; 0; 0.6).$$

Оптимальная стратегия спроса S_B^0 определяется аналогично:

$q_j^* = y_j \cdot v, \quad j=1,2,3$, т.е. $S_B^0 = (0.2; 0; 0.8; 0)$ (здесь учтено, что второй столбец исходной матрицы был отброшен как невыгодный).

Ответ. $S_A^0 = (0.4; 0; 0.6)$, $S_B^0 = (0.2; 0; 0.8; 0)$, $v = 5.4$.

При решении произвольной конечной игры размера $m \times n$ рекомендуется придерживаться следующей схемы:

1. Исключить из платежной матрицы заведомо невыгодные стратегии по сравнению с другими стратегиями. Такими стратегиями для игрока A (игрока B) являются те, которым соответствуют строки (столбцы) с элементами, заведомо меньшими (большими) по сравнению с элементами других строк (столбцов).

2. Определить верхнюю и нижнюю цены игры и проверить, имеет ли игра седловую точку. Если седловая точка есть, то соответствующие ей стратегии игроков будут оптимальными, а цена совпадает с верхней (нижней) ценой.

3. Если седловая точка отсутствует, то решение следует искать в смешанных стратегиях. Для игр размера $m \times n$ рекомендуется симплексный метод, для игр размера 2×2 , $2 \times n$, $n \times 2$ возможно геометрическое решение.

ЗАДАЧИ К 5.5

Задача 5.5.2. Решить матричную игру, заданную приведенной ниже матрицей, сведя ее к паре двойственных задач линейного программирования.

$$P = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 7 & -6 & 0 \\ 8 & -5 & 9 & -3 & 2 \\ -2 & 7 & -3 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

Решение. Проверим, имеет ли платежная матрица седловую точку.

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	α_i
A_1	5	-8	7	-6	0	-8
A_2	8	-5	9	-3	2	-5
A_3	-2	7	-3	6	-4	-4
β_j	8	7	9	6	2	$\alpha = -4$ $\beta = 2$

Здесь $\alpha < \beta$, следовательно, седловой точки нет. Находим решение игры в смешанных стратегиях. Объясняется это тем, что игроки не могут объявить противнику свои чистые стратегии: им следует скрывать свои действия. Игру можно решить, если позволить игрокам выбирать свои стратегии случайным образом (смешивать чистые стратегии).

Проверим платежную матрицу на доминирующие строки и доминирующие столбцы. Вторая строка доминирует первую строку, поэтому отбрасываем первую строку.

Получим:

$$\begin{pmatrix} 5 & -8 & 7 & -6 & 0 \\ 8 & -5 & 9 & -3 & 2 \\ -2 & 7 & -3 & 6 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & -5 & 9 & -3 & 2 \\ -2 & 7 & -3 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

С позиции проигрышей игрока В стратегия B_5 доминирует над стратегией B_1 (все элементы столбца 5 меньше элементов столбца 1), следовательно, исключаем 1-й столбец матрицы: $\begin{pmatrix} -5 & 9 & -3 & 2 \\ 7 & -3 & 6 & -4 \end{pmatrix}$. Вероятность $q_1 = 0$.

С позиции проигрышей игрока В стратегия B_5 доминирует над стратегией B_3 (все элементы столбца 5 меньше элементов столбца 3), следовательно, исключаем 3-й столбец матрицы: $\begin{pmatrix} -5 & -3 & 2 \\ 7 & 6 & -4 \end{pmatrix}$. Вероятность $q_3 = 0$.

Итак, мы свели игру 3×5 к игре 2×3 .

Так как игроки выбирают свои чистые стратегии случайным образом, то выигрыш игрока I будет случайной величиной. В этом случае игрок I должен выбрать свои смешанные стратегии так, чтобы получить максимальный средний выигрыш. Аналогично, игрок II должен выбрать свои смешанные стратегии так, чтобы минимизировать математическое ожидание игрока I.

В матрице присутствуют отрицательные элементы. Для упрощения расчетов добавим к элементам матрицы 5: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 12 & 11 & 1 \end{pmatrix}$.

Такая замена не изменит решения игры, изменится только ее цена (по теореме фон Неймана). Найдем решение игры в смешанных стратегиях.

Математические модели пары двойственных задач линейного программирования можно записать так:

$$\begin{aligned}
 1. \begin{cases} 12x_2 \geq 1 \\ 2x_1 + 11x_2 \geq 1 \\ 7x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} & \quad 2. \begin{cases} 2y_2 + 7y_3 \leq 1 \\ 12y_1 + 11y_2 + y_3 \leq 1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases} \\
 Z = x_1 + x_2 \rightarrow \min & \quad Z' = y_1 + y_2 + y_3 \rightarrow \max
 \end{aligned}$$

Решим прямую задачу линейного программирования симплексным методом, с использованием симплексной таблицы. Для построения первого опорного плана систему неравенств приведем к системе уравнений путем введения дополнительных переменных (переход к канонической форме):

$$\begin{aligned}
 2y_2 + 7y_3 + y_4 &= 1, \\
 12y_1 + 11y_2 + y_3 + y_5 &= 1.
 \end{aligned}$$

Решим систему уравнений относительно базисных переменных: y_4, y_5 . Полагая, что свободные переменные равны 0, получим первый опорный план: $Y_0 = (0, 0, 0, 1, 1)$.

Базис	b	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
y_4	1	0	2	7	1	0
y_5	1	12	11	1	0	1
Z'	0	-1	-1	-1	0	0

Переходим к основному алгоритму симплекс-метода.

Итерация №0.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты. В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной y_3 . Вычислим значения D_i по строкам

как частное от деления: $\frac{b_i}{a_{i3}}$ и из них выберем наименьшее:

$\min \left\{ \frac{1}{7}; \frac{1}{1} \right\} = \frac{1}{7}$. Следовательно, 1-ая строка является ведущей. Разрешающий элемент равен 7 и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Базис	b	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
y_4	1	0	2	<u>7</u>	1	0
y_5	1	12	11	1	0	1
Z'	0	-1	-1	-1	0	0

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной y_4 в план 1 войдет переменная y_3 . Получаем новую симплекс-таблицу:

Базис	b	y_1	y_2	y_4	y_4	y_5
y_3	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{2}{7}$	1	$\frac{1}{7}$	0
y_5	$\frac{6}{7}$	12	$\frac{75}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	1
Z'	$\frac{1}{7}$	-1	$-\frac{5}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	0

Итерация №1.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты. В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной y_1 , так как это наибольший коэффициент по модулю. Вычислим значения D_i по строкам как частное от деления: $\frac{b_i}{a_{i1}}$ и из них выберем наименьшее: $\frac{1}{14}$. Следовательно, 2-ая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен 12 и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Базис	b	y_1	y_2	y_4	y_4	y_5
y_3	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{2}{7}$	1	$\frac{1}{7}$	0
y_5	$\frac{6}{7}$	12	$\frac{75}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	1
Z'	$\frac{1}{7}$	-1	$-\frac{5}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	0

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной y_5 в план 2 войдет переменная y_1 . Получаем новую симплекс-таблицу:

Базис	b	y_5	y_2	y_4	y_4	y_5
y_3	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{2}{7}$	1	$\frac{1}{7}$	0
y_1	$\frac{1}{14}$	1	$\frac{25}{28}$	0	$-\frac{1}{84}$	$\frac{1}{12}$
Z'	$\frac{3}{14}$	0	$\frac{5}{28}$	0	$\frac{11}{84}$	$\frac{1}{12}$

Оптимальный план можно записать так: $y_1 = \frac{1}{14}$, $y_2 = 0$, $y_3 = \frac{1}{7}$.

$$Z' = 1 \cdot \frac{1}{14} + 1 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{14}.$$

Используя последнюю итерацию прямой задачи, найдем оптимальный план двойственной задачи: $x_1 = \frac{11}{84}$, $x_2 = \frac{1}{12}$.

Это же решение можно получить, применив теоремы двойственности.

$$Z = 1 \cdot \frac{11}{84} + 1 \cdot \frac{1}{12} = \frac{3}{14}.$$

$$\text{Цена игры: } \nu = 1 : \frac{3}{14} = \frac{14}{3}, \quad p_1 = \frac{14}{3} \cdot \frac{11}{84} = \frac{11}{18}, \quad p_2 = \frac{14}{3} \cdot \frac{1}{12} = \frac{7}{18}.$$

$$\text{Оптимальная смешанная стратегия игрока I: } S_A = \left(\frac{11}{18}; \frac{7}{18} \right).$$

$$q_1 = \frac{14}{3} \cdot \frac{1}{14} = \frac{1}{3}, \quad q_2 = \frac{14}{3} \cdot 0 = 0, \quad q_3 = \frac{14}{3} \cdot \frac{1}{7} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Оптимальная смешанная стратегия игрока II: } S_B = \left(\frac{1}{3}; 0; \frac{2}{3} \right).$$

Поскольку ранее к элементам матрицы было прибавлено число 5, то вычтем это число из цены игры: $\frac{14}{3} - 5 = -\frac{1}{3}$.

$$\text{Цена игры: } \nu = -\frac{1}{3}.$$

Поскольку из исходной матрицы были удалены строки и столбцы, то найденные векторы вероятности можно записать в виде: $S_A = \left(0; \frac{11}{18}; \frac{7}{18} \right),$

$$S_B = \left(0; \frac{1}{3}; 0; 0; \frac{2}{3} \right).$$

$$\text{Ответ. } S_A = \left(0; \frac{11}{18}; \frac{7}{18} \right), \quad S_B = \left(0; \frac{1}{3}; 0; 0; \frac{2}{3} \right), \quad \nu = -\frac{1}{3}.$$

Задача 5.5.3. Определить с помощью линейного программирования

$$\text{решение игровой задачи вида: } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ. } S_A = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 0 \right), \quad S_B = \left(0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right), \quad \nu = -\frac{1}{3}.$$

Задача 5.5.4. Определить с помощью линейного программирования

$$\text{решение игровой задачи вида: } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответ. } S_A = \left(\frac{1}{14}; \frac{11}{14}; \frac{2}{14} \right), \quad S_B = \left(\frac{8}{14}; \frac{5}{14}; \frac{1}{14} \right), \quad \nu = \frac{27}{14}.$$

Задача 5.5.5. Выполнив возможные упрощения платежной матрицы А, решите игру в смешанных стратегиях, сведя ее к паре двойственных задач линейного программирования, если

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -3 & -4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите оптимальные стратегии игроков и цену игры.

Ответ. $S_A = \left(0; \frac{4}{5}; 0; \frac{1}{5}\right)$, $S_B = \left(\frac{1}{5}; 0; 0; \frac{4}{5}\right)$, $\nu = \frac{6}{5}$.

6. БИМАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

6.1. Смешанные стратегии. Равновесие по Нэшу

В матричной игре интересы двух игроков были прямо противоположны, то есть речь шла об антагонистической игре. Однако гораздо чаще случаются ситуации, в которых интересы игроков хотя и не совпадают, но не обязательно являются противоположными.

Рассмотрим конфликтную ситуацию, в которой каждый из двух участников имеет следующие возможности для выбора своей линии поведения:

игрок A – может выбрать любую из стратегий $A_1, A_2, \dots, A_m$, игрок B – любую из стратегий $B_1, B_2, \dots, B_n$.

При этом в ситуации (A_i, B_j) выигрыш первого игрока будет равен a_{ij} , а выигрыш второго b_{ij} . Причем, вообще говоря, $b_{ij} \neq a_{ij}$.

Тогда получаем две платежные матрицы размерности $m \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \quad (6.1.1)$$

Здесь A – платежная матрица первого игрока, B – платежная матрица второго игрока. В этом случае говорят, что речь идет о биматричной игре двух игроков с платежными матрицами (6.1.1).

Отметим, что при $b_{ij} = -a_{ij}$ получаем обычную матричную игру.

В общем случае биматричная игра – это **игра с ненулевой суммой**.

Класс биматричных игр значительно шире класса матричных (разнообразие новых моделируемых конфликтных ситуаций весьма заметно), а, значит, неизбежно увеличиваются и трудности, встающие на пути их успешного разрешения.

Рассмотрим один пример биматричной игры.

Задача 6.1.1. (Студент – Преподаватель). Студент (игрок A) готовится к зачету, который принимает Преподаватель (игрок B). Можно считать, что у Студента две стратегии – подготовиться к сдаче зачета (+) и не подготовиться (-). У Преподавателя также две стратегии – поставить зачет [+] и не поставить зачета [-]. В основу значений функций выигрыша игроков положим следующие соображения:

Выигрыш студента	Сдал зачет [+]	Не сдал зачет [-]
Готовился к зачету (+)	оценка заслужена	очень обидно
Не готовился к зачету (-)	удалось обмануть	оценка заслужена
Выигрыш преподавателя	Поставил зачет [+]	Не поставил зачет [-]

Готовился к зачету (+)	все нормально	был не прав
Не готовился к зачету (-)	дал себя обмануть	опять придет

Количественно это можно выразить, например, так

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

В приведенной задаче описана ситуация, в которой интересы игроков не совпадают. Встает вопрос о том, какие рекомендации необходимо дать игрокам для того, чтобы моделируемая конфликтная ситуация разрешилась.

Иными словами, что мы будем понимать под решением биматричной игры?

Попробуем ответить на это вопрос так: **вследствие того, что интересы игроков не совпадают, нам нужно построить такое (компромиссное) решение, которое бы в том или ином, но в одинаковом смысле удовлетворяло обоих игроков.**

Не пытаясь сразу выражать эту мысль совсем точно, скажем – попробуем найти некую **равновесную ситуацию**, явное отклонение от которой одного из игроков уменьшало бы его выигрыш.

Подобный вопрос мы ставили и при рассмотрении матричных игр.

Определение 6.1.1. Ситуация (i^0, j^0) биматричной игры называется ситуацией равновесия (равновесной по Нэшу) в чистых стратегиях, если $a_{ij^0} \leq a_{i^0 j^0}$ для любых $i = 1, \dots, m$ и $b_{i^0 j} \leq b_{i^0 j^0}$ для любых $j = 1, \dots, n$. (6.1.2)

Для того чтобы найти ситуацию равновесия по Нэшу в чистых стратегиях, необходимо найти в каждом столбце матрицы выигрышей игрока A максимальный элемент и подчеркнуть его. Аналогично, в каждой строке матрицы выигрышей игрока B нужно подчеркнуть максимальный элемент. Если в обеих матрицах будет подчеркнут элемент, стоящий на одном и том же месте, то его положение и определит ситуацию равновесия в игре. Заметим, что в биматричной игре (в отличие от матричной) выигрыши игроков при наличии нескольких ситуаций равновесия могут различаться.

Задача 6.1.2. Найти все ситуации равновесия в биматричной игре

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -1 \\ 4 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 5 & 4 \\ -3 & 6 & 6 & 2 \\ 8 & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. В матрицах A и B подчеркнем максимальные элементы, стоящие в столбцах и строках соответственно:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \underline{3} & \underline{5} & -1 \\ \underline{4} & -2 & 3 & \underline{4} \\ 2 & 1 & \underline{5} & \underline{4} \\ -1 & 2 & \underline{5} & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \underline{7} & 5 & 4 & \underline{7} \\ 4 & \underline{5} & \underline{5} & 4 \\ -3 & \underline{6} & \underline{6} & 2 \\ \underline{8} & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Видно, что общий подчеркнутый элемент стоит в позиции (3,3), т. е. здесь единственная ситуация равновесия: $A_i^0 = A_3$, $B_j^0 = B_3$ и выигрыши игроков следующие $v_A = 5$, $v_B = 6$.

В биматричных играх, как и в матричных, можно использовать принцип (строгого) доминирования для удаления заведомо невыгодных стратегий у игроков A и B .

Напомним, что возникающее при разработке минимаксного подхода понятие равновесной ситуации приводило нас к поиску седловой точки, которая существует не всегда – конечно, если ограничиваться только чистыми стратегиями игроков A и B , т. е. стратегиями $A_1, A_2, \dots, A_m, B_1, B_2, \dots, B_n$.

Однако при расширении матричной игры путем перехода к смешанным стратегиям, т. е. к такому поведению игроков, при котором они чередуют (чистые) стратегии с определенными частотами:

игрок A – стратегии $A_1, A_2, \dots, A_m$ с частотами $p_1, p_2, \dots, p_m$, где $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, \dots, p_m \geq 0, \sum_{i=1}^m p_i = 1$,
а игрок B – стратегии $B_1, B_2, \dots, B_n$ с частотами $q_1, q_2, \dots, q_n$,
где $q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, \dots, q_n \geq 0, \sum_{j=1}^n q_j = 1$.

Выяснилось, что в смешанных стратегиях равновесная ситуация всегда существует.

Иными словами, **любая матричная игра в смешанных стратегиях разрешима.**

Поэтому, рассматривая биматричные игры, перейдем к смешанным стратегиям игроков (этим мы предполагаем, что каждая игра может быть многократно повторена в неизменных обстоятельствах) и определим средние выигрыши игроков математическим ожиданием:

$$H_A(p, q) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i q_j, \quad H_B(p, q) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij} p_i q_j. \quad (6.1.3)$$

Определение 6.1.2. Будем говорить, что пара векторов $p^0 = (p_1^0, p_2^0, \dots, p_m^0)$ и $q^0 = (q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0)$ определяют равновесную ситуацию (равновесие по Нэшу),

если при любых p и q , удовлетворяющих условиям $\sum_{i=1}^m p_i = 1, \sum_{j=1}^n q_j = 1, 0 \leq p_i \leq 1, 0 \leq q_j \leq 1$, справедливы неравенства:

$$H_A(p, q^0) \leq H_A(p^0, q^0), \quad H_B(p^0, q) \leq H_B(p^0, q^0). \quad (6.1.4)$$

Неравенства (6.1.4) означают, что если игрок отклонится от равновесной ситуации (p^0, q^0) , то его выигрыш может только уменьшиться.

Тем самым, получается, что если равновесная ситуация существует, то отклонение от нее невыгодно самому игроку.

На вопрос о существовании ситуации равновесия отвечает следующая теорема.

Теорема 6.1.1. (Дж. Нэш). Всякая биматричная игра имеет хотя бы одну равновесную ситуацию (точку равновесия) в смешанных стратегиях.

Итак, равновесная ситуация существует. Но как ее найти?

Если некоторая пара чисел (p^0, q^0) претендует на то, чтобы определять ситуацию равновесия, то для того, чтобы убедиться в обоснованности этих претензий, или, наоборот, доказать их необоснованность, необходимо проверить справедливость неравенств (6.1.4) для любого p в пределах от 0 до 1 и для любого q в пределах от 0 до 1. В общем случае число таких проверок бесконечно. И, следовательно, действенный способ определения равновесной ситуации нужно искать где-то в ином месте.

Рассмотрим биматричную игру 2×2 : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ с вероятностями $p_1 = p$, $p_2 = 1 - p$, $q_1 = q$, $q_2 = 1 - q$.

Вычислим средние выигрыши игроков

$$H_A(p, q) = a_{11}pq + a_{12}p(1-q) + a_{21}(1-p)q + a_{22}(1-p)(1-q), \quad (6.1.5)$$

$$H_B(p, q) = b_{11}pq + b_{12}p(1-q) + b_{21}(1-p)q + b_{22}(1-p)(1-q). \quad (6.1.5')$$

Для таких игр оказывается справедливой следующая теорема, позволяющая находить смешанные стратегии.

Теорема 6.1.2. Выполнение неравенств (6.1.4):

$$H_A(p, q^0) \leq H_A(p^0, q^0), \quad H_B(p^0, q) \leq H_B(p^0, q^0),$$

равносильно выполнению следующих неравенств:

$$\begin{cases} H_A(0, q^0) \leq H_A(p^0, q^0) \\ H_A(1, q^0) \leq H_A(p^0, q^0) \\ H_B(p^0, 0) \leq H_B(p^0, q^0) \\ H_B(p^0, 1) \leq H_B(p^0, q^0) \end{cases} \quad (6.1.6)$$

Другими словами, чтобы убедиться в том, что пара (p^0, q^0) определяет равновесную ситуацию, достаточно проверить справедливость неравенств (6.1.4) не для всех $p \in [0, 1]$ и $q \in [0, 1]$, а только для двух чистых стратегий каждого игрока.

Перепишем формулу (6.1.5) в более удобном виде:

$$H_A(p, q) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p + (a_{21} - a_{22})q + a_{22}.$$

Положим здесь $p = 0$ и $p = 1$:

$$H_A(1, q) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})q + a_{12} + (a_{21} - a_{22})q,$$

$$H_A(0, q) = (a_{21} - a_{22})q + a_{22}$$

и рассмотрим разности:

$$H_A(p, q) - H_A(1, q) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p - \\ - (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})q + a_{22} - a_{12},$$

$$H_A(p, q) - H_A(0, q) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p.$$

Полагая

$$\begin{cases} C = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}, \\ \alpha = a_{22} - a_{12} \end{cases} \quad (6.1.7)$$

получим для них следующие выражения:

$$H_A(p, q) - H_A(1, q) = Cpq - \alpha p - Cq + \alpha = Cq(p-1) - \alpha(p-1) = \\ = (p-1)(Cq - \alpha),$$

$$H_A(p, q) - H_A(0, q) = Cpq - \alpha p = p(Cq - \alpha).$$

Так как в точке равновесия эти разности должны быть неотрицательными, то приходим к следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} (p-1)(Cq - \alpha) \geq 0 \\ p(Cq - \alpha) \geq 0. \end{cases}$$

Для $H_B(p, q)$, при обозначениях:

$$\begin{cases} D = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}, \\ \beta = b_{22} - b_{21} \end{cases} \quad (6.1.8)$$

Получаем аналогичным образом: $\begin{cases} (q-1)(Dp - \beta) \geq 0 \\ q(Dp - \beta) \geq 0. \end{cases}$

Таким образом, для того, чтобы пара (p, q) определяла равновесную ситуацию в биматричной игре 2×2 , необходимо и достаточно выполнение следующей системы:

$$\begin{cases} (p-1)(Cq - \alpha) \geq 0 \\ p(Cq - \alpha) \geq 0 \\ (q-1)(Dp - \beta) \geq 0 \\ q(Dp - \beta) \geq 0 \\ p \in [0, 1], \quad q \in [0, 1] \end{cases} \quad (6.1.9)$$

где C, D, α, β вычисляются по формулам (6.1.7)-(6.1.8).

Задача 6.1.3. Найдите равновесие по Нэшу для задачи 6.1.1.

Решение. Вычислим параметры, входящие в систему (6.1.9):

$$C = 2 - (-1) - 1 + 0 = 2, \alpha = 0 + 1 = 1,$$

$$D = 1 - (-3) - (-2) - 1 = 5, \beta = -1 - (-2) = 1.$$

Тогда получаем следующие системы неравенств:

$$\begin{cases} (p-1)(2q-1) \geq 0 \\ p(2q-1) \geq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} (q-1)(5p-1) \geq 0 \\ q(5p-1) \geq 0 \end{cases}.$$

Решим первую из систем:

$$1) \quad p=1, 2q-1 \geq 0, q \geq \frac{1}{2};$$

$$2) \quad p=0, 2q-1 \leq 0, q \leq \frac{1}{2};$$

$$3) \quad 0 < p < 1, q = \frac{1}{2}.$$

Перенесем эти результаты на чертеж в виде «зигзага»:

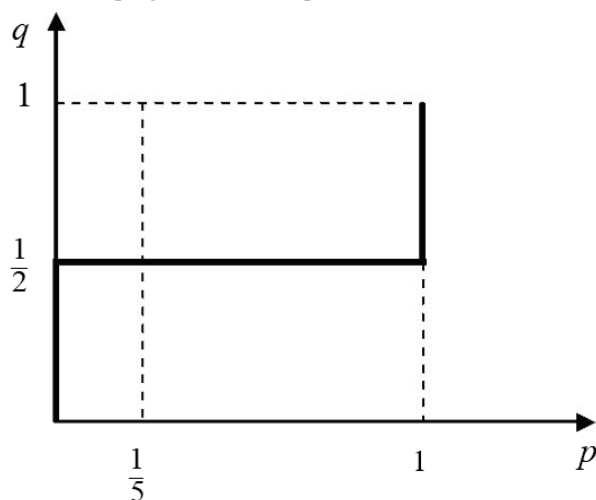


Рис. 6.1.1

Решим вторую систему:

$$1) \quad q=1, 5p-1 \geq 0, p \geq \frac{1}{5};$$

$$2) \quad q=0, 5p-1 \leq 0, p \leq \frac{1}{5};$$

$$3) \quad 0 < q < 1, 5p-1=0, p = \frac{1}{5}.$$

Перенесем эти результаты на чертеж в виде «зигзага»:

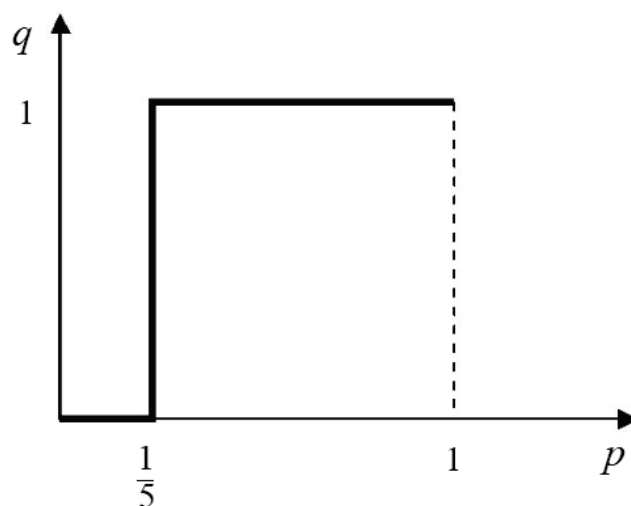


Рис. 6.1.2

Объединим эти рисунки.

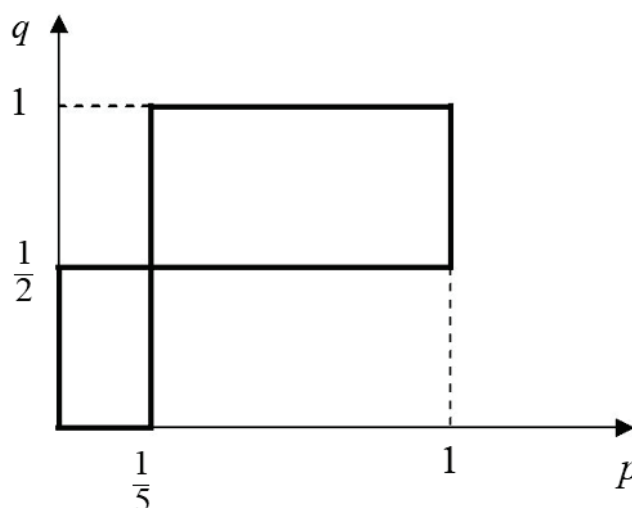


Рис. 6.1.3

Видим, что игра имеет три равновесные ситуации с соответствующими выигрышами:

- 1) $p=1, q=1, H_A(1,1)=2, H_B(1,1)=1$;
- 2) $p=0, q=0, H_A(0,0)=-2, H_B(0,0)=-1$;
- 3) $p=\frac{1}{5}, q=\frac{1}{2}, H_A\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}, H_B\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)=-\frac{7}{5}$.

Вывод. Из этих трех смешанных стратегий лучшей является первая с $p = q = 1$, то есть хорошо подготовиться к зачету и поставить зачет.

В этой задаче реализуется весьма редкая для биматричных игр ситуация. Функции выигрышей игроков достигают максимума одновременно.

Задача 6.1.4. (Борьба за рынки). Небольшая фирма A намерена сбыть партию товара на одном из двух рынков, монополизируемых другой, более

крупной фирмой B . Для этого фирма A готова предпринять по одному из рынков соответствующие приготовления, например, развернуть рекламную кампанию. Фирма B может воспрепятствовать этому, предприняв по одному из рынков предупредительные меры. Если фирма A встречает противодействие, то терпит поражение, в противном случае – захватывает рынок. Будем считать, что проникновение фирмы A на первый рынок более выгодно для нее, чем на второй, но и поражение на первом рынке принесет фирме A большие потери, чем на втором рынке. Таким образом, фирмы имеют по две стратегии: A_1 и B_1 – выбор первого рынка; A_2 и B_2 – выбор второго рынка. Составьте биматричную игру и найдите равновесие по Нэшу.

Решение. Составим платежные матрицы игроков в условных единицах, исходя из соответствующих качественных соображений:

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из этих матриц видно, что если обе фирмы выберут один рынок, то выигрывает фирма B , если разные – то фирма A .

Найдем равновесные ситуации, вычислив параметры системы (4.6.8):

$$C = -10 - 2 - 1 - 1 = -14, \alpha = -1 - 2 = -3, D = 5 + 2 + 1 + 1 = 9, \beta = 1 + 1 = 2.$$

Тогда получаем следующие системы неравенств:

$$\begin{cases} (p-1)(-14q+3) \geq 0 \\ p(-14q+3) \geq 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} (q-1)(9p-2) \geq 0 \\ q(9p-2) \geq 0 \end{cases}.$$

Решим первую систему:

- 1) $p=1, -14q+3 \geq 0, q \leq \frac{3}{14};$
- 2) $p=0, -14q+3 \leq 0, q \geq \frac{3}{14};$
- 3) $0 < p < 1, -14q+3=0, q = \frac{3}{14}.$

Решим вторую систему:

- 1) $q=1, 9p-2 \geq 0, p \geq \frac{2}{9};$
- 2) $q=0, 9p-2 \leq 0, p \leq \frac{2}{9};$
- 3) $0 < q < 1, 9p-2=0, p = \frac{2}{9}.$

Изобразим эти решения на рисунке:

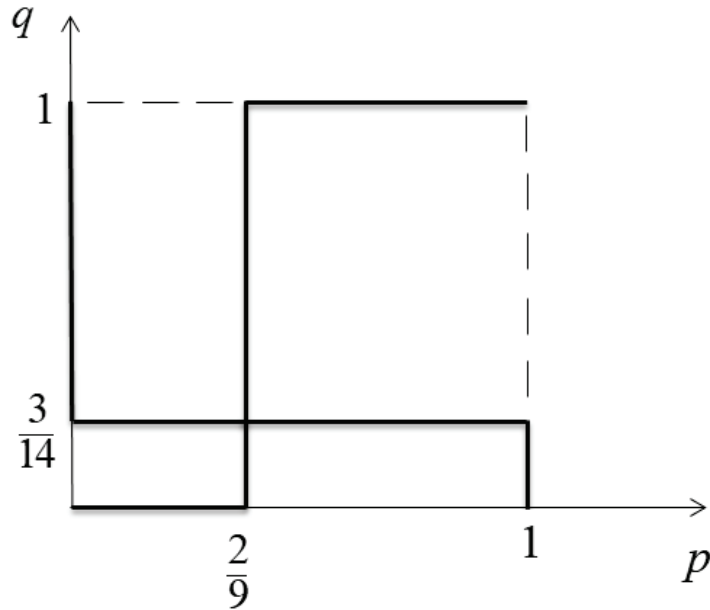


Рис. 6.1.4

Видно, что получилась одна точка равновесия $p = \frac{2}{9}$, $q = \frac{3}{14}$. Это дает нам следующие оптимальные смешанные стратегии игроков: $p^0 = \left(\frac{2}{9}, \frac{7}{9}\right)$,

$q^0 = \left(\frac{3}{14}, \frac{11}{14}\right)$, которым соответствуют оптимальные (средние) выигрыши

$$H_A(p^0, q^0) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i^0 q_j^0 = -\frac{4}{7}, \quad H_B(p^0, q^0) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij} p_i^0 q_j^0 = \frac{1}{3}.$$

Вывод. Таким образом, если игра может быть повторена многократно в схожих условиях, то фирма *A* в 22,22 % случаев должна осуществлять попытки проникновения на первый рынок, а в 77,78 % – на второй рынок. При этом (в среднем) она не проиграет больше, чем $\frac{4}{7}$ у.е. Фирме *B* рекомендуется в 21,43 % случаев оказывать противодействие на первом рынке, а в 78,57 % – на втором. В этом случае ее средний выигрыш составит не менее $\frac{1}{3}$ у.е.

Отметим, что в этой задаче получилась одна равновесная точка, и $v_A \neq v_B$. В других биматричных играх можно получить несколько равновесных ситуаций, как, например, в примере «Студент – Преподаватель». В этом случае встает проблема выбора оптимальной в некотором смысле ситуации из нескольких равновесных. Эту задачу можно попытаться решить, исходя из содержательного смысла игры.

Из рассмотренных примеров видно, что точка равновесия определяется парой

$$p = \frac{\beta}{D}, \quad q = \frac{\alpha}{C}. \quad (6.1.10)$$

А это означает, что в равновесной ситуации выбор одного игрока полностью определяется платежной матрицей другого игрока и не зависит от собственной платежной матрицы. Иначе говоря, равновесная ситуация определяется не столько стремлением увеличить свой выигрыш, сколько желанием держать под контролем выигрыш другого игрока.

Проиллюстрируем это, пользуясь условием примера 6.1.4. Для этого разобьем биматричную игру на две матричные игры с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

и решим их:

$$v_A = -\frac{4}{7}, \quad p^0 = \left(\frac{1}{7}, \frac{6}{7}\right), \quad q^0 = \left(\frac{3}{14}, \frac{11}{14}\right),$$

$$v_B = \frac{1}{3}, \quad p^0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad q^0 = \left(\frac{2}{9}, \frac{7}{9}\right).$$

Сравнивая полученные решения с решением биматричной игры, видим, что:

1. Оптимальный средний выигрыш игрока в матричной игре совпадает с его выигрышем при равновесной ситуации в биматричной.

2. По своей матрице игрок может определить только оптимальную стратегию (равновесную по Нэшу) другого игрока, но не свою, а для определения своей стратегии нужна матрица противника.

Полученные выводы можно использовать для решения биматричных игр большей размерности, чем 2×2 . Для этого нужно всего лишь решить две матричные игры той же размерности.

В биматричных играх принцип равновесия по Нэшу не всегда приводит к ситуации, выгодной обоим игрокам.

Рассмотрим в связи следующий пример.

Задача 6.1.5. (Дилемма узников). Игроками являются два узника, находящихся в камере предварительного заключения по подозрению в совершении преступления. При отсутствии прямых улик возможность их осуждения в большей степени зависит от того, заговорят они или будут молчать.

Если оба будут молчать, то наказание им обоим составит ровно 1 год. Если оба сознаются, то получают срок 6 лет (признание учитывается как смягчающее обстоятельство). Если заговорит только один, а другой будет молчать, то заговоривший будет выпущен на свободу, а промолчавший получит максимально возможное наказание 9 лет.

Составьте и решите биматричную игру.

Решение. Выигрыши игроков описываются матрицами:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}.$$

Решаем эту игру как биматричную.

$$C = -1 - (-9) - 0 - 6 = 2, \quad \alpha = -6 - (-9) = 3,$$

$$D = -1 - 0 - (-9) - 6 = 2, \beta = -6 - (-9) = 3.$$

Тогда получаем следующие системы неравенств:

$$\begin{cases} (p-1)(2q-3) \geq 0 \\ p(2q-3) \geq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} (q-1)(2p-3) \geq 0 \\ q(2p-3) \geq 0 \end{cases}.$$

Решим первую систему:

- 1) $p=1, 2q-3 \geq 0, q \geq \frac{3}{2};$
- 2) $p=0, 2q-3 \leq 0, q \leq \frac{3}{2};$
- 3) $0 < p < 1, 2q-3=0, q = \frac{3}{2}.$

Решим вторую систему:

- 1) $q=1, 2p-3 \geq 0, p \geq \frac{3}{2};$
- 2) $q=0, 2p-3 \leq 0, p \leq \frac{3}{2};$
- 3) $0 < q < 1, 2p-3=0, p = \frac{3}{2}.$

Изобразим эти решения на рисунке:

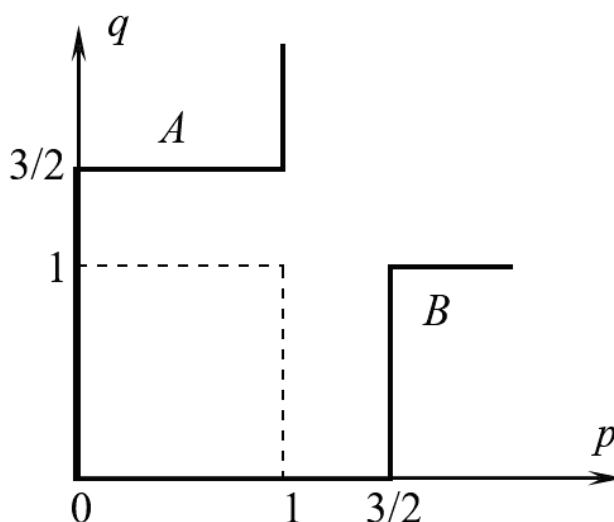


Рис. 6.1.5

Из рисунка 6.1.5 видно, что зигзаги для A и B пересекаются только в одной точке $(0,0)$. Это ситуация равновесия, в которой каждый из игроков выбирает вторую чистую стратегию «сознаться» и они теряют по 6 лет, т. е. $H_A(0,0) = H_B(0,0) = -6$.

Как уже отмечалось ранее, отклонение от ситуации равновесия одного из игроков не дает ему никаких преимуществ.

Однако при одновременном отклонении обоих игроков каждый из них может получить больший выигрыш, чем в равновесной ситуации.

Именно в ситуации $(p, q) = (1, 1)$, , когда каждый из игроков A и B выбирает первую чистую стратегию "молчать", они теряют лишь 1 (год). При этом очевидно, что ситуация $(1, 1)$ неустойчива, так как любой из игроков, изменяя свою стратегию, может увеличить свой выигрыш (избежать наказания).

Разобьем биматричную игру на две матричные игры с нулевой суммой с матрицами: $A = \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}$ и решим их:

$$v_A = -6, \quad p^0 = (0, 1), \quad q^0 = (0, 1),$$

$$v_B = -1, \quad p^0 = (1, 0), \quad q^0 = (1, 0).$$

Т. е. игроку B рекомендуется придерживаться второй стратегии, а игроку A – первой, но тогда $H_A = -9$, $H_B = 0$. Такая ситуация хуже для игрока A , чем для игрока B .

Таким образом, в биматричной игре ситуация равновесия обоих игроков определяется не столько стремлением увеличить собственный выигрыш, сколько стремлением минимизировать выигрыш другого игрока.

ЗАДАЧИ К 6.1

Задача 6.1.6. (Семейный спор). Два партнера (муж и жена) договариваются совместно провести одно из двух мероприятий: пойти на футбол (Ф) или в театр (Т). В случае осуществления первого из этих двух мероприятий (пойти на футбол) выигрыш первого партнера (игрок A) вдвое больше выигрыша второго (игрок B). Наоборот, в случае осуществления второго из этих двух мероприятий выигрыш игрока A будет вдвое меньше выигрыша игрока B . Составьте биматричную игру и найдите равновесие по Нэшу.

Решение. Составим платежные матрицы игроков в условных единицах, исходя из соответствующих качественных соображений. Матрицы выигрышей здесь имеют такой вид:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

где стратегии игрока 1: A_1 – выбираю футбол; A_2 – иду на балет; игрока 2: B_1 – иду на футбол, B_2 – на балет.

Видим, что игра имеет три равновесные ситуации с соответствующими выигрышами:

$$1) \quad p=1, q=1, H_A(1,1)=2, H_B(1,1)=1;$$

$$2) \quad p=0, q=0, H_A(0,0)=1, H_B(0,0)=2;$$

$$3) \quad p=\frac{2}{3}, q=\frac{1}{3}, H_A\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}, H_B\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}.$$

Очевидно, что для первого игрока предпочтительнее ситуация $(A_1; B_1)$, а для второго $(A_2; B_2)$, и эти ситуации являются равновесными. Хотя стратегии $(A_1; B_1)$, и $(A_2; B_2)$ являются оптимальными, поскольку дают максимальные выигрыши, однако приносят игрокам не одинаковые выигрыши, поэтому не являются справедливыми.

6.2. Оптимальность по Парето

Дадим определение другого способа определения оптимальности в биматричных играх, который основан на принципе оптимальности по Парето.

Определение 6.2.1. Ситуация (p^*, q^*) в биматричной игре двух лиц A и B называется оптимальной по Парето, если из того, что

$$H_A(p^*, q^*) \leq H_A(p, q), \quad H_B(p^*, q^*) \leq H_B(p, q) \quad (6.2.1)$$

следуют равенства $p = p^*, q = q^*$, т. е. не существует ситуации (p, q) , для которой имеют место неравенства (6.2.1). Среди этих неравенств по крайней мере одно должно быть строгим.

В оптимальной по Парето ситуации все игроки, действуя совместно, не могут увеличить выигрыш каждого, не уменьшив при этом выигрыш одного из них. В отличие от этого, в ситуации равновесия по Нэшу ни один из игроков, действуя в одиночку, не может увеличить своего собственного выигрыша.

Покажем, как на практике отыскать оптимальную по Парето ситуацию в биматричной игре 2×2 . Введем обозначения

$$U = H_A(p, q), \quad V = H_B(p, q) \quad (6.2.2)$$

и рассмотрим плоскость (U, V) . На плоскости (U, V) найдем целевую точку, в качестве координат которой выбирается сочетание наилучших значений U и V .

В данном случае это будет точка $T = (U_{\max}, V_{\max})$, где

$$U_{\max} = \max_{p, q} H_A(p, q), \quad V_{\max} = \max_{p, q} H_B(p, q).$$

Вследствие того, что обычно такая точка T при заданных ограничениях не реализуется, ее называют **точкой утопии**.

Далее, строим множество точек, отвечающее соотношениям (6.2.2), определяем на нем множество Парето, отвечающее заданным условиям на переменные p, q , и находим на нем точку, ближайшую к точке утопии T . Именно такая точка и будет идеальной точкой $P(U_{\Pi}^*, V_{\Pi}^*)$, отвечающей принципу оптимальности по Парето. Найдя идеальную точку P , можно определить (используя соотношения (6.2.2)) и значения p_{Π}^*, q_{Π}^* , при которых она достигается. Здесь (p_{Π}^*, q_{Π}^*) – это оптимальная ситуация по Парето.

Множество Парето – это множество тех граничных точек, отвечающих соотношениям (6.2.2), перемещение которых по границе построенного множества уменьшает одну из координат (здесь U или V) при одновременном увеличении другой (см. рис.6.2.1, дуга Γ)

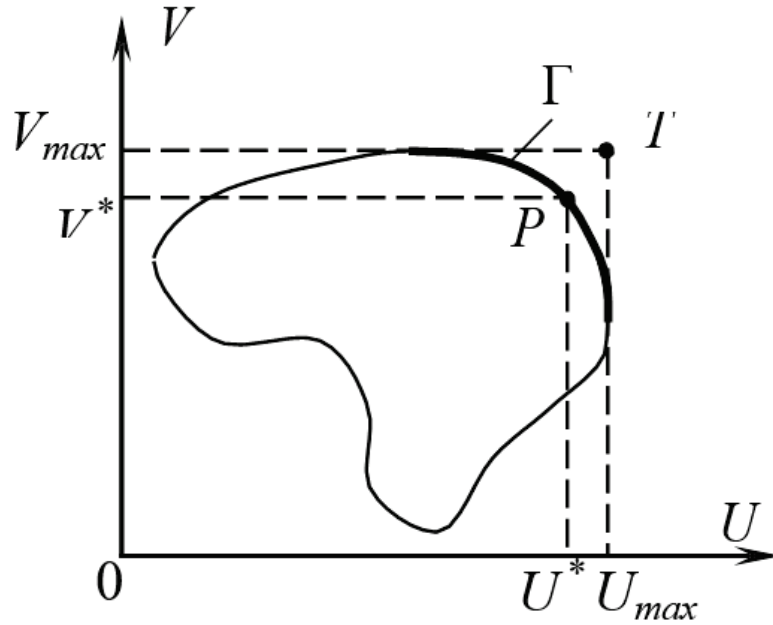


Рис. 6.2.1

Задача 6.2.1. Построить множество Парето а задаче 6.1.5.

Решение. По формулам (6.1.5), (6.1.5') находим:

$$U = H_A(p, q) = 2pq - 3p + 6q - 6, \quad V = H_B(p, q) = 2pq + 6p - 3q - 6, \quad (6.2.3)$$

$$0 \leq p \leq 1, 0 \leq q \leq 1.$$

Найдем границы множества точек, удовлетворяющих (6.2.3). Для этого можно рассматривать крайние значения переменных p и q :

$$1) \quad \text{при } p=0 \text{ имеем: } U = 6q - 6, V = -3q - 6 \Rightarrow \begin{cases} V = -\frac{1}{2}U - 9 \\ -6 \leq U \leq 0 \\ -9 \leq V \leq -6 \end{cases};$$

$$2) \quad \text{при } p=1 \text{ имеем: } U = 8q - 9, V = -q \Rightarrow \begin{cases} V = -\frac{1}{8}U - \frac{9}{8} \\ -9 \leq U \leq -1 \\ -1 \leq V \leq 0 \end{cases};$$

$$3) \quad \text{при } q=0 \text{ имеем: } U = -3p - 6, V = 6p - 6 \Rightarrow \begin{cases} V = -2U - 18 \\ -9 \leq U \leq -6 \\ -6 \leq V \leq 0 \end{cases};$$

$$4) \quad \text{при } q=1 \text{ имеем: } U = -p, V = 8p - 9 \Rightarrow \begin{cases} V = -8U - 9 \\ -1 \leq U \leq 0 \\ -9 \leq V \leq -1 \end{cases}.$$

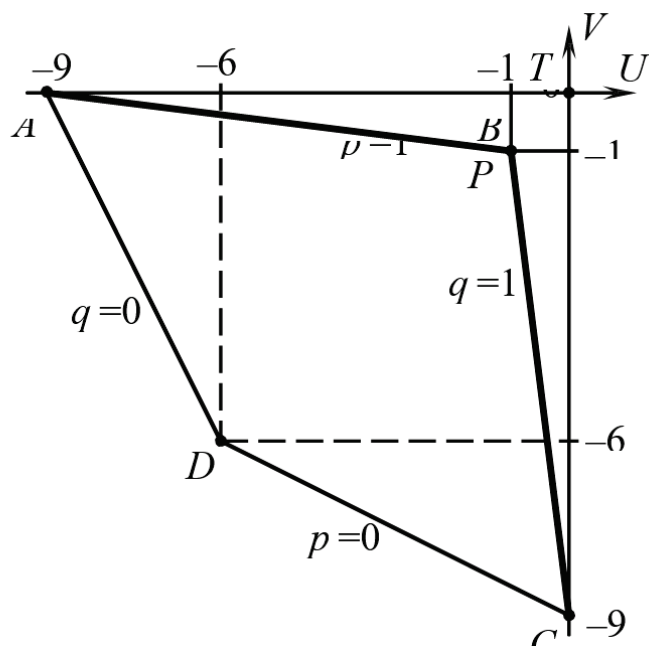


Рис. 6.2.2

На рисунке 6.2.2 изображено множество, удовлетворяющее уравнениям (6.2.3). Получился четырехугольник с вершинами в точках $A(-9, 0)$, $B(-1, -1)$, $C(0, -9)$, $D(-6, -6)$.

Точкой утопии здесь будет точка $T(0, 0)$, так как $U_{\max} = 0$ и $V_{\max} = 0$. Множеству Парето здесь отвечают отрезки прямых при $p = 1$ и $q = 1$. Как видно из рис. 6.2.2, ближайшей точкой множества Парето к точке утопии T является точка $P=B(-1, -1)$, т. е. $U_{\Pi}^* = -1$, $V_{\Pi}^* = -1$.

Решая систему уравнений $H_A(p_{\Pi}^*, q_{\Pi}^*) = -1$, $H_B(p_{\Pi}^*, q_{\Pi}^*) = -1$, находим, что $p_{\Pi}^* = 1$, $q_{\Pi}^* = 1$. Это означает, что оптимальной ситуацией по Парето будет ситуация $(p_{\Pi}^*, q_{\Pi}^*) = (1, 1)$ (т. е. игроки A и B применяют свои первые чистые стратегии). Заметим, что точка $D(-6, -6)$ соответствует точке равновесия по Нэшу в данной задаче, но при этом эта точка намного дальше от точки утопии, чем точка P . Ясно, что оптимальная ситуация по Парето здесь лучше, чем по Нэшу.

ЗАДАЧИ К 6.2

Задача 6.2.2. Исследуйте оптимальность по Парето для задачи 6.1.6 (Семейный спор).

Ответ. Есть две оптимальные ситуации по Парето: $(p_{\Pi_1}^*, q_{\Pi_1}^*) = (1, 0)$, $(p_{\Pi_2}^*, q_{\Pi_2}^*) = (0, 1)$. Напомним, что они одновременно являются и ситуациями

равновесия по Нэшу. Есть еще одна ситуация равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях, но она хуже указанных.

Задача 6.2.3. Исследуйте оптимальность по Парето для задачи 6.1.1 (Студент – Преподаватель).

Ответ. Оптимальной по Парето будет ситуация $(p_{II}^*, q_{II}^*) = (1, 1)$. Эта же ситуация является равновесной по Парето.

Задача 6.2.4. Исследуйте оптимальность по Парето для задачи 6.1.4 (Борьба за рынки).

Ответ. Оптимальной по Парето будет ситуация $(p_{II}^*, q_{II}^*) = (0, 0)$.

Подчеркнем различие ситуации равновесия по Нэшу от ситуации, оптимальной по Парето: в первой ни один игрок, действуя в одиночку, не может увеличить свой собственный выигрыш; во второй – все игроки, действуя совместно, не могут (даже нестрого) увеличить выигрыш каждого.

Итак, в биматричных играх существует несколько критериев оптимальности. Важнейшими из них являются ситуация равновесия по Нэшу и критерий оптимальности по Парето.

Отметим, что в биматричных играх (в отличие от матричных) при наличии нескольких ситуаций равновесия средний выигрыш игрока в разных равновесных ситуациях различен (напомним, что в матричной игре выигрыш игрока один и тот же вне зависимости от количества точек равновесия).

Наконец, еще одно, не менее интересное обстоятельство. Достаточно сложной является и проблема перехода от качественных оценок ситуации к количественным оценкам. То есть, если, например, в примере «Студент – Преподаватель» принять другие количественные оценки выигрышей, то можно получить и другие ситуации равновесия. Однако если эти изменения будут не слишком значительными – элементы платежной матрицы «пошевелинутся» слегка, то слегка «пошевелинутся» и зигзаги, не изменяя ни своей общей формы, ни взаимного расположения, а значит, число равновесных ситуаций не изменится. Впрочем, сказанное относится лишь к случаю, когда множество ситуаций равновесия конечно и состоит из нечетного числа точек (одной или трех). Как принято говорить в подобных случаях, это число «устойчиво относительно малых шевелений».

Конечно, в некоторых биматричных играх равновесные ситуации случаются и в чистых стратегиях. Но, как показывают разобранные примеры, во-первых, чистой ситуации равновесия может вовсе не быть, и, во-вторых, даже при ее наличии не исключено существование равновесных ситуаций в смешанных стратегиях. И чтобы найти их все, неизбежно приходится обращаться к описанному выше подходу.

7. ИГРЫ С ПРИРОДОЙ

Ситуации, описываемые рассмотренными выше моделями в виде игр, на практике могут не в полной мере оказаться адекватными действительности, поскольку реализация модели предполагает многократность повторения действий (решений), предпринимаемых в похожих условиях. В реальности количество принимаемых решений в неизменных условиях жестко ограничено. Нередко ситуация является уникальной, и решение в условиях неопределенности должно приниматься однократно. Это порождает необходимость развития методов моделирования принятия решений в условиях неопределенности и риска.

Математическими моделями такой ситуации являются игры с природой. Формально изучение игр с природой должно начинаться с построения платежной матрицы, что является, по существу, наиболее трудоемким этапом подготовки принятия решения.

Ошибки в платежной матрице не могут быть компенсированы никакими вычислительными методами и приведут к неверному итоговому результату.

Отличительная особенность игры с природой состоит в том, что в ней сознательно действует только один из участников, в большинстве случаев называемый игроком 1. Игрок 2 (природа) сознательно против игрока 1 не действует, а выступает как не имеющий конкретной цели и случайным образом выбирающий очередные «ходы» партнер по игре. Поэтому термин «природа» характеризует некую объективную действительность, которую не следует понимать буквально, хотя вполне могут встретиться ситуации, в которых «игроком» 2 действительно может быть природа (например, обстоятельства, связанные с погодными условиями или с природными стихийными силами).

Мажорирование стратегий в игре с природой имеет определенную специфику: исключать из рассмотрения можно лишь доминируемые стратегии игрока 1: если для всех $j = 1, \dots, n$ $a_{kj} \leq a_{lj}$, $k, l = 1, \dots, m$, то k -ю стратегию принимающего решения игрока 1 можно не рассматривать и вычеркнуть из матрицы игры. Столбцы, отвечающие стратегиям природы, вычеркивать из матрицы игры (исключать из рассмотрения) недопустимо, поскольку природа не стремится к выигрышу в «игре» с человеком, для нее нет целенаправленно выигрышных или проигрышных стратегий, она действует неосознанно¹.

На первый взгляд отсутствие обдуманного противодействия упрощает игроку задачу выбора решения. Однако, хотя ЛПР никто не мешает, ему труднее обосновать свой выбор, поскольку в этом случае гарантированный результат не известен.

¹ Впрочем, в матричных представлениях игр с природой значения выигрышей принимающего решения игрока не всегда располагаются по строкам. Это допустимо делать и по столбцам, принимая ЛПР (лицо, принимающее решение) как игрока 2, понимая, однако, что мажорировать можно только стратегии принимающего решения игрока.

Методы принятия решений в играх с природой зависят от характера неопределенности, точнее от того, известны или нет вероятности состояний (стратегий) природы, т. е. имеет ли место **ситуация риска** или **ситуация неопределенности**.

Собственно разница между риском и неопределённостью касается того, знает ли принимающий решение что-либо о вероятности наступления определённых событий. **Риск** присутствует тогда, когда вероятности, связанные с различными последствиями принятия решения, могут оцениваться на основе данных предшествующего периода (имеется статистическая информация о подобных ранее принимаемых решениях, о подобных изучаемой ситуациях и т. п.). **Неопределённость** существует тогда, когда эти вероятности приходится определять субъективно, т. к. нет данных предшествующего периода (нет соответствующей статистики).

Задача выбора решения в условиях неопределённости сводится к следующему.

Пусть задан некоторый **вектор** $S = (S_1, S_2, \dots, S_n)$, описывающий n **состояний внешней среды**, и **вектор** $X = (X_1, X_2, \dots, X_m)$, описывающий m **допустимых решений**. Требуется найти такой вектор $X^* = (0, 0, \dots, 0, X_i, 0, \dots, 0)$, который бы обеспечивал **оптимум** некоторой **функции полезности** $W = (X, S)$ по некоторому **критерию** K .

Значение оптимума функции $W = (X, S)$ раскрывается исходя из постановки конкретной задачи (к примеру, если обсуждается получение прибыли, то значение функции стремятся максимизировать, если себестоимость – минимизировать).

Информацию об указанной функции полезности (по сути *исходные данные задачи* такого типа) представляют **матрицей размерности** $m \times n$ с элементами $W_{ij} = F(X_i, S_j)$, где F – **решающее правило** (определяемое из постановки конкретной задачи).

Формирование решающего правила во многом предопределяет конечный результат расчетов (в случае его неточности даже правильный выбор критерия оптимальности и соответствующие расчеты не дают основания считать принятое решение наилучшим).

При достаточно четкой экономической постановке задачи практически не возникает проблем с формированием матрицы $\{W_{ij}\}$.

Критерий принятия решения в ситуации риска

Предположим, что в нашем распоряжении имеются статистические данные, позволяющие оценить вероятность того или иного состояния внешней среды, и этот опыт может быть использован для оценки будущего. При известных вероятностях P_j для возникновения состояния S_j можно найти математическое ожидание $W = (X, S, P)$ и определить вектор X^* , обеспечивающий

$$W = \max_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1}^n W_{ij} P_j. \quad (7.1)$$

Критерии принятия решения в ситуации неопределённости

Неопределенность, связанную с отсутствием информации о вероятностях состоянии среды (природы), называют «безнадежной» или «дурной». В таких случаях для определения наилучших решений используются следующие критерии: Лапласа, Вальда, Сэвиджа, Гурвица.

1. Критерий Лапласа.

По принципу недостаточного основания в условиях, когда невозможно выяснить вероятности для возникновения того или иного состояния внешней среды, им сопоставляют *равные вероятности*, находят *средний эффект* для каждого из рассматриваемых вариантов решения и выбирается тот из них, где средний эффект максимален:

$$W = \max_{i=1,\dots,m} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n W_{ij} \quad (7.2)$$

2. Критерий Вальда (критерий наибольшей осторожности/ пессимиста).

Для каждого из рассматриваемых вариантов решения X_i выбирается *самая худшая ситуация* (наименьшее из W_{ij}) и среди них отыскивается гарантированный максимальный эффект:

$$W = \max_{i=1,\dots,m} \min_{j=1,\dots,n} W_{ij} \quad (7.3)$$

3. Критерий Гурвица.

Ориентация на самый худший исход является своеобразной перестраховкой, однако опрометчиво выбирать и излишне оптимистичную политику. Критерий Гурвица *предлагает некоторый компромисс*:

$$W = \max_{i=1,\dots,m} \left[\alpha \max_{j=1,\dots,n} W_{ij} + (1-\alpha) \min_{j=1,\dots,n} W_{ij} \right], \quad (7.4)$$

где параметр α принимает значение от 0 до 1 и выступает как *коэффициент оптимизма*. К примеру, при $\alpha = 0$ (полный пессимизм) критерий Гурвица превращается в критерий Вальда, при $\alpha = 0,5$ мы расцениваем равновероятно шансы на успех и неудачу, при $\alpha = 0,2$ мы более осторожны и вероятность успеха считаем меньшей (0,2), чем возможную неудачу.

4. Критерий Сэвиджа.

Суть его – *нахождение минимального риска*. При выборе решения по этому критерию:

- матрице функции полезности (эффективности) сопоставляется новая матрица – *матрица сожалений*:

$$D_{ij} = W_{ij} - \max_i W_{ij}, \quad (7.5)$$

- элементы которой отражают убытки от ошибочного действия, т. е. выгоду, упущенную в результате принятия i -го решения в j -м состоянии;

- по матрице D выбирается решение по пессимистическому критерию Вальда, дающее наименьшее значение максимального сожаления

$$W = \max_{i=1, \dots, m} \min_{j=1, \dots, n} D_{ij}. \quad (7.6)$$

Вполне логично, что **различные критерии приводят к различным выводам относительно наилучшего решения**. Вместе с тем *возможность выбора критерия дает свободу лицам, принимающим экономические решения* (если они, конечно, располагают достаточными средствами для постановки подобной задачи). **Любой критерий должен согласовываться с намерениями решающего задачу и соответствовать его характеру, знаниям и убеждениям.**

Задача 7.1. В приморском городе решено открыть яхт-клуб. *Сколько следует закупить яхт* (из расчета: одна яхта на 5 человек), если предполагаемое число членов клуба колеблется от 10 до 25 человек. Годовой абонемент стоит 100 денежных единиц. Цена яхты – 170 денежных единиц. Аренда помещения и хранение яхт обходится в 730 денежных единиц в год.

Решение. Несомненно, что имеет смысл рассматривать количество приобретаемых яхт в диапазоне от двух до пяти (4 варианта) и количество потенциальных яхтсменов от 10 до 25. Однако объем перебора будет великоват и потому ограничимся вариантами 10, 15, 20, 25 (если полученные выводы для смежных вариантов будут существенно разниться, проведем дополнительный, уточняющий расчет).

Итак: $X = \{X_i\} = \{2, 3, 4, 5\}$ – количество яхт ($i = 1, 2, 3, 4$); $S = \{S_j\} = \{10, 15, 20, 25\}$ – количество членов яхт-клуба ($j = 1, 2, 3, 4$).

Для того чтобы начать поиск решения, построим матрицу полезности, элементы которой показывают прибыль при принятии i -го решения при j -ом количестве членов яхт-клуба:

$W_{ij} = 100 \cdot \min(5X_i; S_j) - 170X_i - 730$, т. е. решающее правило в нашей задаче формулируется как «доход – затраты».

Выполнив несложные расчеты, заполним матрицу полезности $\{W_{ij}\}$:

Таблица 7.1

	$S_1 = 2$	$S_2 = 15$	$S_3 = 20$	$S_4 = 25$
$X_1 = 2$	-70	-70	-70	-70
$X_2 = 3$	-240	260	260	260
$X_3 = 4$	-410	90	590	590
$X_4 = 5$	-580	-80	420	920

Например, $W_{11} = 100 \cdot \min(5 \cdot 2; 10) - 170 \cdot 2 - 730 = -70$

$W_{12} = 100 \cdot \min(5 \cdot 2; 15) - 170 \cdot 2 - 730 = -70$

$$W_{13} = W_{14} = -70 \text{ (спрос на яхты останется неудовлетворенным).}$$

Отрицательные значения показывают, что при этих соотношениях спроса на яхты и их наличия яхт-клуб несет убытки.

Критерий принятия решения в ситуации риска

Предположим, что есть статистические данные, позволяющие оценить вероятность того или иного спроса на членство в яхт-клубе:

$$P = (0,1; 0,2; 0,4; 0,3).$$

Тогда математическое ожидание величины прибыли для каждого из рассматриваемых вариантов решения (предложение яхт в яхт-клубе):

$$W_1 = (-70) \cdot 0,1 + (-70) \cdot 0,2 + (-70) \cdot 0,4 + (-70) \cdot 0,3 = -70;$$

$$W_2 = (-240) \cdot 0,1 + (260) \cdot 0,2 + (260) \cdot 0,4 + (260) \cdot 0,3 = 210;$$

$$W_3 = 390; W_4 = 370.$$

Вывод: в условиях рассматриваемой ситуации наиболее целесообразно закупить 4 яхты (в этом случае максимальная ожидаемая прибыль яхт-клуба составит 390 денежных единиц).

Принятие решения в ситуации неопределенности

1. Для применения *критерия Лапласа* находим:

$$W_1 = ((-70) + (-70) + (-70) + (-70)) / 4 = -70;$$

$$W_2 = ((-240) + (260) + (260) + (260)) / 4 = 135;$$

$$W_3 = 215; W_4 = 170.$$

Вывод: в условиях равновероятности возникновения той или иной величины спроса на членство в яхт-клубе следует закупить 4 яхты и при этом можно рассчитывать на прибыль в размере 215 д. е.

2. *Критерий Вальда* (выбор осторожной, пессимистической стратегии) – для каждой альтернативы (количество яхт в клубе) выбирается самая худшая ситуация (наименьшее значение величины прибыли) и среди них отыскивается гарантированный максимальный эффект:

$$W = \max \{-70; -240; -410; -580\} = -70$$

Вывод: принимая решение по критерию Вальда, яхт-клубу следует закупить 2 яхты и максимум ожидаемого убытка не превысит 70 д. е.

3. *Критерий Гурвица* (компромиссное решение между самым худшим исходом и излишне оптимистическим). Рассмотрим изменение решения нашей задачи в зависимости от значений коэффициента оптимизма (в таблице выделены значения, удовлетворяющие критерию Гурвица при различных α):

Таблица 7.2

	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.8$
$X_1 = 2$	-70	-70	-70
$X_2 = 3$	-140	10	160
$X_3 = 4$	-210	90	390
$X_4 = 5$	-380	170	620

Вывод: при $\alpha \geq 0,5$ следует закупить 5 яхт и ожидать прибыль порядка, не меньшую 170 д. е. (надеемся на широкую популярность нашего клуба и определенную финансовую состоятельность любителей), при $\alpha = 0,2$ не следует закупать более 2 яхт (мы более осторожны в своих прогнозах и, скорее всего, предпочтем отказаться от создания клуба).

4. Критерий Сэвиджа (нахождение минимального риска). При выборе решения по этому критерию сначала матрице полезности сопоставляется матрица сожалений D – для нашего примера вычитанием (–70) из первого столбца матрицы полезности, 260 из второго столбца, 590 и 920 из третьего и четвертого столбцов соответственно.

Таблица 7.3

	$S_1 = 2$	$S_2 = 15$	$S_3 = 20$	$S_4 = 25$
$X_1 = 2$	0	-330	-660	-990
$X_2 = 3$	-170	0	-330	-660
$X_3 = 4$	-340	-170	0	-330
$X_4 = 5$	-510	-340	-170	0

Наибольшее значение среди минимальных элементов строк (выделенные в таблице значения) равно:

$$\max \{-990; -660; -340; -510\} = -340$$

Вывод: покупая 4 яхты для открываемого яхт-клуба, мы уверены, что в худшем случае убытки клуба не превысят 340 д. е.

Общий вывод. Рассмотренные критерии приводят к различным решениям и дают тем самым информацию к размышлению (принятое решение здесь будет существенно зависеть от психологии и интуиции субъекта решения).

ЗАДАЧИ К 7

Задача 7.2. В сельскохозяйственном районе с посевной площадью 1430 га решено построить элеватор. Имеются типовые проекты элеватора мощностью на 20, 30, 40, 50 и 60 тыс. ц зерна. Привязка проекта обойдется в 37 тысяч денежных единиц. Стоимость материалов и оборудования элеватора мощностью 20 тыс. ц равна 60 тыс. денежных единиц и возрастает на 10 % с ростом мощности элеватора на 10 тыс. ц. Затраты на эксплуатацию элеватора мощностью 20 тыс. ц составляют 10 тыс. д. е. и уменьшаются на 10 % при увеличении мощности на 10 тыс. ц. За хранение зерна на счет элеватора вносится плата в размере 10 д. е. за 1 ц. Урожай в данном районе колеблется от 14 до 20 ц с 1 га. Какой элеватор выгоднее построить?

Решение. Введем обозначения: вектор допустимых решений – типовые проекты элеваторов: $X = \{X_i\} = \{20, 30, 40, 50, 60\}$ – ($i = 1, 2, 3, 4, 5$); вектор состояний внешней среды – урожайность в данном районе: $S = \{S_j\} = \{14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$ – ($j = 1, 2, 3, \dots, 7$).

Строим матрицу полезности, элементы которой показывают прибыль при принятии i -го решения при j -ой урожайности:

$$W_{ij} = 10 \cdot \min(x_i \cdot 1000; S_j \cdot 1430) - 37000 - [60000 + 6000 \cdot (x_i - 20)] - [10000 - 100 \cdot (x_i - 20)],$$

т. е. решающее правило в нашей задаче формулируется как «плата за хранение зерна (доход) – расход на привязку проекта – стоимость материалов и оборудования элеватора – затраты на эксплуатацию элеватора».

Выполнив несложные расчеты, заполним матрицу полезности $\{W_{ij}\}$:

Таблица 7.4

	$S_1 = 14$	$S_2 = 15$	$S_3 = 16$	$S_4 = 17$	$S_5 = 18$	$S_6 = 19$	$S_7 = 20$
$x_1 = 20$	93000	93000	93000	93000	93000	93000	93000
$x_2 = 30$	88200	102500	116800	131100	145400	159700	174000
$x_3 = 40$	83200	97500	111800	126100	140400	154700	169000
$x_4 = 50$	78200	92500	106800	121100	135400	149700	164000
$x_5 = 60$	73200	87500	101800	116100	130400	144700	159000

Принятие решения в ситуации риска

Предположим, что есть статистические данные, позволяющие оценить вероятность той или иной урожайности в рассматриваемом районе:

$$P = (0,01; 0,09; 0,1; 0,25; 0,3; 0,2; 0,05).$$

При известных вероятностях P_j для урожайности S_j можно найти математическое ожидание величины прибыли W_i для каждого из вариантов решения (типовые проекты элеваторов) и определить оптимальный выбор проекта, обеспечивающий получение максимальной прибыли.

Например,

$$W_2 = 88200 \cdot 0,01 + 102500 \cdot 0,09 + 116800 \cdot 0,1 + 131100 \cdot 0,25 + 145400 \cdot 0,3 + 159700 \cdot 0,2 + 174000 \cdot 0,05 = 138822.$$

Вывод: в условиях рассматриваемой ситуации наиболее целесообразно выбрать проект элеватора мощностью 30 тыс. ц, в этом случае обеспечивается получение максимальной прибыли 138822 д. е.

Таблица 7.5

x_i	W_i
20	93000
30	138822
40	133822
50	128822
60	123822

Принятие решения в ситуации неопределенности

В рассматриваемом примере при равной вероятности той или иной урожайности получаем значения $W_i(L)$ для каждого из вариантов решения (типовые проекты элеваторов), например,

$$W_2(L) = (88200 + 102500 + 116800 + 131100 + 145400 + 159700 + 174000) / 7 = 131100$$

и по **критерию Лапласа** оптимальным вариантом является проект элеватора мощностью 30 тыс. ц с ожидаемой прибылью 131,1 тыс. д. е.

Таблица 7.6

	$W_i(L)$	$W_i(B)$	$\alpha=0.2$	$\alpha=0.5$	$\alpha=0.8$
$x_1 = 20$	93000	93000	93000	93000	93000
$x_2 = 30$	131100	88200	105360	131100	156840
$x_3 = 40$	126100	83200	100360	126100	151840
$x_4 = 50$	121100	78200	95360	121100	146840
$x_5 = 60$	116100	73200	90360	116100	141840

Выбирая самый худший вариант по величине прибыли для каждой альтернативы (проект элеватора), получаем значения $W_i(B)$ и среди них отыскиваем гарантированный максимальный эффект.

Таким образом, по критерию Вальда следует построить элеватор мощностью 20 тыс. ц с максимально возможной прибылью 93 тыс. д. е.

Обратившись к оценкам по критерию Гурвица при трех различных уровнях оптимизма ($\alpha = 0,2; 0,5; 0,8$), обнаруживаем целесообразность выбора проекта элеватора мощностью 30 тыс. ц с ожидаемой прибылью соответственно 105360, 131100, 156840 д. е.

При подходе с позиций критерия Сэвиджа (упущенных возможностей и последующего сожаления об этом) строим матрицу сожалений D , вычитая из столбцов матрицы полезности наибольшие значения, и применяем к ней пессимистический критерий Вальда, дающий наименьшее значение максимального сожаления.

Таблица 7.7

	$S_1 = 14$	$S_2 = 15$	$S_3 = 16$	$S_4 = 17$	$S_5 = 18$	$S_6 = 19$	$S_7 = 20$	min
$x_1 = 20$	0	-9500	-23800	-38100	-52400	-66700	-81000	-81000
$x_2 = 30$	-4800	0	0	0	0	0	0	-4800
$x_3 = 40$	-9800	-5000	-5000	-5000	-5000	-5000	-5000	-9800
$x_4 = 50$	-14800	-10000	-10000	-10000	-10000	-10000	-10000	-14800
$x_5 = 60$	-19800	-15000	-15000	-15000	-15000	-15000	-15000	-19800

Для нашего примера по этому критерию оптимален проект элеватора мощностью 30000 ц.

Таким образом, практически по всем критериям отдается предпочтение проекту 30000 ц и лишь при глубоком пессимизме во взглядах на ожидаемый урожай – проекту 20000 ц с гарантией ожидаемой прибыли лишь в 93 тыс. д. е. и, может быть, значительными упущенными возможностями. Остальные проекты рассматривать явно нецелесообразно.

Задача 7.3. Для данной матрицы:

24 %	11 %	38 %	?
6	3	-4	6
-4	-5	2	-5
5	8	1	0
3	0	1	-5
7	-3	3	4

А) упростить матрицу, исключая строки, соответствующие заведомо невыгодным стратегиям активного игрока;

Б) восстановить пропущенную вероятность одной из гипотез о «поведении природы» и выявить оптимальную стратегию активного игрока по математическому ожиданию прибыли;

В) выявить оптимальные стратегии активного игрока, применяя критерии Лапласа, Вальда и Гурвица (при $\gamma = 0,3$).

Решение. А) Первый игрок имеет пять стратегий, а второй, «природа», характеризуется четырьмя возможными гипотезами. Известны вероятности реализаций первых трех гипотез. Введем обозначения стратегий активного игрока – «получателя выгоды» и «природы».

	П1	П2	П3	П4
A1	6	3	-4	6
A2	-4	-5	2	-5
A3	5	8	1	0
A4	3	0	1	-5
A5	7	-3	3	4

Сравним строки данной платежной матрицы для выявления заведомо невыгодных игроку стратегий.

	П1	П2	П3	П4
A1 и A2	$6 \geq -4$	$3 \geq -5$	$-4 \leq 2$	$6 \geq -5$
A1 и A3	$6 \geq 5$	$3 \leq 8$	$-4 \leq 1$	$6 \geq 0$
A1 и A4	$6 \geq 3$	$3 \geq 0$	$-4 \leq 1$	$6 \geq -5$
A1 и A5	$6 \leq 7$	$3 \geq -3$	$-4 \leq 3$	$6 \geq 4$
A2 и A3	$-4 \leq 5$	$-5 \leq 8$	$2 \geq 1$	$-5 \leq 0$
A2 и A4	$-4 \leq 3$	$-5 \leq 0$	$2 \geq 1$	$-5 = -5$
A2 и A5	$-4 \leq 7$	$-5 \leq -3$	$2 \leq 3$	$-5 \leq 4$
A3 и A4	$5 \geq 3$	$8 \geq 0$	$1 = 1$	$0 \geq -5$
A3 и A5	$5 \leq 7$	$8 \geq -3$	$1 \leq 3$	$0 \leq 4$
A4 и A5	—	—	—	—

В выделенных строках знаки неравенств – одинаковые, что указывает на невыгодность стратегий активного игрока A2 и A4 относительно

стратегий $A5$ и $A3$ соответственно. Дальнейшее сравнение со стратегией $A4$ не проводилось.

Платежную матрицу можно упростить, удалив из нее строки, соответствующие выявленным невыгодным стратегиям (они выделены в таблице).

	П1	П2	П3	П4		П1	П2	П3	П4	
A1	6	3	-4	6	~	A1	6	3	-4	6
A2	-4	-5	2	-5		A3	5	8	1	0
A3	5	8	1	0		A5	7	-3	3	4
A4	3	0	1	-5						
A5	7	-3	3	4						

Б) Восстановим вероятность возможного варианта П4 «поведения» природы, исходя из того, что события П1, П2, П3 и П4 образуют полную группу

$$P(\Pi_1) + P(\Pi_2) + P(\Pi_3) + P(\Pi_4) = 1,$$

$$P(\Pi_4) = 1 - P(\Pi_1) - P(\Pi_2) - P(\Pi_3) = 0,27.$$

Рассчитаем математическое ожидание дискретной случайной величины – получаемой игроком выгоды, при возможном использовании каждой его стратегии.

	П1	П2	П3	П4	
P_j	0,24	0,11	0,38	0,27	M_i
$A1$	6	3	-4	6	1,87
$A3$	5	8	1	0	2,46
$A5$	7	-3	3	4	3,57

$$M_1 = 6 \times 0,24 + 3 \times 0,11 - 4 \times 0,38 + 6 \times 0,27 = 1,87;$$

$$M_3 = 5 \times 0,24 + 8 \times 0,11 + 1 \times 0,38 + 0 \times 0,27 = 2,46;$$

$$M_5 = 7 \times 0,24 - 3 \times 0,11 + 3 \times 0,38 + 4 \times 0,27 = 3,57.$$

При многократном взаимодействии оптимальной является стратегия $A5$, обеспечивающая приближение величины среднего «платежа» к значению 3,57. При этом иногда (в одиннадцати процентах случаев) игрок будет нести убыток.

В) *Лаплас*:

$$W_1 = (6 + 3 - 4 + 6) / 4 = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4};$$

$$W_3 = (5 + 8 + 1) / 4 = \frac{14}{4} = 3.5;$$

$$W_5 = (7 - 3 + 3 + 4) / 4 = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}.$$

Вывод: максимальная выгода может быть при реализации стратегии АЗ.

Вальд: $W = \max \{-4; 0; -3\} = 0$

Вывод: при реализации стратегии АЗ все платежи – неотрицательные, что обеспечивает отсутствие убытков. Выбор других стратегий может привести к убыткам.

Гурвиц ($\gamma = 0,3$):

	П1	П2	П3	П4	$\min_j(a_{ij})$	$\max_j(a_{ij})$	Γ_i
А1	6	3	-4	6	-4	6	-1
А3	5	8	1	0	0	8	2,4
А5	7	-3	3	4	-3	7	0

Вывод: при данном «уровне ответственности» оптимальной является стратегия АЗ.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ВАРИАНТЫ

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ К ТЕМЕ 5

Вариант 1	Вариант 2
1. Определите верхнюю и нижнюю цены игры и там, где это возможно, укажите седловую точку и значение выигрыша.	1. Определите верхнюю и нижнюю цены игры и там, где это возможно, укажите седловую точку и значение выигрыша.
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
2. Найдите решение следующих игровых задач графическим способом.	2. Найдите решение следующих игровых задач графическим способом.
а) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \\ 0 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$	а) $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 8 \\ 1 & 6 \\ 9 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$
б) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}$	б) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}$
3. Получите новую платежную матрицу, используя принцип доминирования. Решите игру.	3. Получите новую платежную матрицу, используя принцип доминирования. Решите игру.
$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 7 & 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
4. Решите игру в смешанных стратегиях, используя симплекс метод.	4. Решите игру в смешанных стратегиях, используя симплекс метод.
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Вариант 3	Вариант 4
1. Определите верхнюю и нижнюю цены игры и там, где это возможно, укажите седловую точку и значение выигрыша.	1. Определите верхнюю и нижнюю цены игры и там, где это возможно, укажите седловую точку и значение выигрыша.
$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
2. Найдите решение следующих игровых задач графическим способом.	2. Найдите решение следующих игровых задач графическим способом.
а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 6 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$	а) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & -2 \\ 5 & -4 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$
б) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$	б) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}$
3. Получите новую платежную матрицу, используя принцип доминирования. Решите игру.	3. Получите новую платежную матрицу, используя принцип доминирования. Решите игру.
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
4. Решите игру в смешанных стратегиях, используя симплекс метод.	4. Решите игру в смешанных стратегиях, используя симплекс метод.
$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Вариант 5	Вариант 6
1. Определите верхнюю и нижнюю цены игры и там, где это возможно, укажите седловую точку и значение выигрыша.	1. Определите верхнюю и нижнюю цены игры и там, где это возможно, укажите седловую точку и значение выигрыша.
$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 8 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. Найдите решение следующих игровых задач графическим способом.	2. Найдите решение следующих игровых задач графическим способом.
а) $\begin{pmatrix} 3 & 10 \\ -1 & 9 \\ 4 & 5 \\ 1 & 8 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$	а) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 5 \\ 6 & 0 \\ 3 & 4 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$
б) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 6 & -2 \\ -2 & 4 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$	б) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$
3. Получите новую платежную матрицу, используя принцип доминирования. Решите игру.	3. Получите новую платежную матрицу, используя принцип доминирования. Решите игру.
$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & 1 & -2 \\ 6 & 8 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$
4. Решите игру в смешанных стратегиях, используя симплекс метод.	4. Решите игру в смешанных стратегиях, используя симплекс метод.
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Вариант 7	Вариант 8
1. Определите верхнюю и нижнюю цены игры и там, где это возможно, укажите седловую точку и значение выигрыша.	1. Определите верхнюю и нижнюю цены игры и там, где это возможно, укажите седловую точку и значение выигрыша.
$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
2. Найдите решение следующих игровых задач графическим способом.	2. Найдите решение следующих игровых задач графическим способом.
а) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 6 \\ 2 & 8 \\ 4 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$	а) $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 6 \\ 7 & -2 \\ -4 & 7 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$
б) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	б) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & -3 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$
3. Получите новую платежную матрицу, используя принцип доминирования. Решите игру.	3. Получите новую платежную матрицу, используя принцип доминирования. Решите игру.
$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 6 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$
4. Решите игру в смешанных стратегиях, используя симплекс метод.	4. Решите игру в смешанных стратегиях, используя симплекс метод.
$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Вариант 9	Вариант 10
1. Определите верхнюю и нижнюю цены игры и там, где это возможно, укажите седловую точку и значение выигрыша.	1. Определите верхнюю и нижнюю цены игры и там, где это возможно, укажите седловую точку и значение выигрыша.
$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 4 \\ 8 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 8 & 4 & 6 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$
2. Найдите решение следующих игровых задач графическим способом.	2. Найдите решение следующих игровых задач графическим способом.
а) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -1 \\ 5 & 4 \\ -7 & 8 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$	а) $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 3 & 4 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$
б) $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$	б) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 & 6 \\ 3 & 7 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
3. Получите новую платежную матрицу, используя принцип доминирования. Решите игру.	3. Получите новую платежную матрицу, используя принцип доминирования. Решите игру.
$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$
4. Решите игру в смешанных стратегиях, используя симплекс метод.	4. Решите игру в смешанных стратегиях, используя симплекс метод.
$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

Вариант 11	Вариант 12
1. Определите верхнюю и нижнюю цены игры и там, где это возможно, укажите седловую точку и значение выигрыша.	1. Определите верхнюю и нижнюю цены игры и там, где это возможно, укажите седловую точку и значение выигрыша.
$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 6 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$
2. Найдите решение следующих игровых задач графическим способом.	2. Найдите решение следующих игровых задач графическим способом.
а) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 8 \\ 4 & 3 \\ 5 & -2 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$	а) $\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ 7 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$
б) $\begin{pmatrix} -4 & 6 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & -3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$	б) $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 & 9 & 2 \\ 1 & 8 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
3. Получите новую платежную матрицу, используя принцип доминирования. Решите игру.	3. Получите новую платежную матрицу, используя принцип доминирования. Решите игру.
$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
4. Решите игру в смешанных стратегиях, используя симплекс метод.	4. Решите игру в смешанных стратегиях, используя симплекс метод.
$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Вариант 13	Вариант 14
1. Определите верхнюю и нижнюю цены игры и там, где это возможно, укажите седловую точку и значение выигрыша.	1. Определите верхнюю и нижнюю цены игры и там, где это возможно, укажите седловую точку и значение выигрыша.
$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 6 \\ -3 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 8 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$
2. Найдите решение следующих игровых задач графическим способом.	2. Найдите решение следующих игровых задач графическим способом.
а) $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 5 \\ 6 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$	а) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \\ -4 & 5 \\ 6 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
б) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & -1 & 7 \end{pmatrix}$	б) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$
3. Получите новую платежную матрицу, используя принцип доминирования. Решите игру.	3. Получите новую платежную матрицу, используя принцип доминирования. Решите игру.
$\begin{pmatrix} 6 & 7 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$
4. Решите игру в смешанных стратегиях, используя симплекс метод.	4. Решите игру в смешанных стратегиях, используя симплекс метод.
$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Вариант 15	Вариант 16
1. Определите верхнюю и нижнюю цены игры и там, где это возможно, укажите седловую точку и значение выигрыша.	1. Определите верхнюю и нижнюю цены игры и там, где это возможно, укажите седловую точку и значение выигрыша.
$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 1 & 2 \\ 8 & 6 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
2. Найдите решение следующих игровых задач графическим способом.	2. Найдите решение следующих игровых задач графическим способом.
а) $\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 6 & -3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$	а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \\ 4 & -3 \\ 6 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$
б) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & -7 & 1 \\ 6 & -1 & 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}$	б) $\begin{pmatrix} -6 & 4 & 3 & 7 & -2 \\ 4 & 1 & 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$
3. Получите новую платежную матрицу, используя принцип доминирования. Решите игру.	3. Получите новую платежную матрицу, используя принцип доминирования. Решите игру.
$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & 1 \\ 6 & 6 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
4. Решите игру в смешанных стратегиях, используя симплекс метод.	4. Решите игру в смешанных стратегиях, используя симплекс метод.
$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

Вариант 17	Вариант 18
1. Определите верхнюю и нижнюю цены игры и там, где это возможно, укажите седловую точку и значение выигрыша.	1. Определите верхнюю и нижнюю цены игры и там, где это возможно, укажите седловую точку и значение выигрыша.
$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 \\ 4 & 5 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
2. Найдите решение следующих игровых задач графическим способом.	2. Найдите решение следующих игровых задач графическим способом.
а) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 4 \\ 2 & 5 \\ -3 & 6 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$	а) $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ -1 & 5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$
б) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 & 5 & -5 \\ 2 & 0 & -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$	б) $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 & 3 & -6 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$
3. Получите новую платежную матрицу, используя принцип доминирования. Решите игру.	3. Получите новую платежную матрицу, используя принцип доминирования. Решите игру.
$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & -5 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 9 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$
4. Решите игру в смешанных стратегиях, используя симплекс метод.	4. Решите игру в смешанных стратегиях, используя симплекс метод.
$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Вариант 19	Вариант 20
1. Определите верхнюю и нижнюю цены игры и там, где это возможно, укажите седловую точку и значение выигрыша.	1. Определите верхнюю и нижнюю цены игры и там, где это возможно, укажите седловую точку и значение выигрыша.
$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 4 & 3 \\ 7 & 8 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$
2. Найдите решение следующих игровых задач графическим способом.	2. Найдите решение следующих игровых задач графическим способом.
а) $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 6 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$	а) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 4 \\ 1 & 6 \\ -4 & 8 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$
б) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 & 6 & -1 \\ -4 & 1 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	б) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 & -4 & 1 \\ -1 & 6 & -2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$
3. Получите новую платежную матрицу, используя принцип доминирования. Решите игру.	3. Получите новую платежную матрицу, используя принцип доминирования. Решите игру.
$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -5 \\ 6 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$
4. Решите игру в смешанных стратегиях, используя симплекс метод.	4. Решите игру в смешанных стратегиях, используя симплекс метод.
$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

Вариант 21	Вариант 22
1. Определите верхнюю и нижнюю цены игры и там, где это возможно, укажите седловую точку и значение выигрыша.	1. Определите верхнюю и нижнюю цены игры и там, где это возможно, укажите седловую точку и значение выигрыша.
$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 \\ 5 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$
2. Найдите решение следующих игровых задач графическим способом.	2. Найдите решение следующих игровых задач графическим способом.
а) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 6 & -4 \\ 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$	а) $\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & 2 \\ -2 & 4 \\ 6 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
б) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 8 & -1 & -3 \end{pmatrix}$	б) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 6 & 3 \\ -3 & 4 & 5 & -5 & 2 \end{pmatrix}$
3. Получите новую платежную матрицу, используя принцип доминирования. Решите игру.	3. Получите новую платежную матрицу, используя принцип доминирования. Решите игру.
$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -1 & -5 \\ 6 & 7 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
4. Решите игру в смешанных стратегиях, используя симплекс метод.	4. Решите игру в смешанных стратегиях, используя симплекс метод.
$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Вариант 23	Вариант 24
1. Определите верхнюю и нижнюю цены игры и там, где это возможно, укажите седловую точку и значение выигрыша.	1. Определите верхнюю и нижнюю цены игры и там, где это возможно, укажите седловую точку и значение выигрыша.
$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. Найдите решение следующих игровых задач графическим способом.	2. Найдите решение следующих игровых задач графическим способом.
а) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 8 \\ 7 & 1 \\ -4 & 9 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$	а) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \\ 5 & -2 \\ -1 & 3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$
б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 8 & 3 & -2 & -7 \end{pmatrix}$	б) $\begin{pmatrix} -4 & 6 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & -3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$
3. Получите новую платежную матрицу, используя принцип доминирования. Решите игру.	3. Получите новую платежную матрицу, используя принцип доминирования. Решите игру.
$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
4. Решите игру в смешанных стратегиях, используя симплекс метод.	4. Решите игру в смешанных стратегиях, используя симплекс метод.
$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Вариант 25	Вариант 26
1. Определите верхнюю и нижнюю цены игры и там, где это возможно, укажите седловую точку и значение выигрыша.	1. Определите верхнюю и нижнюю цены игры и там, где это возможно, укажите седловую точку и значение выигрыша.
$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 8 \\ 4 & -2 & 5 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
2. Найдите решение следующих игровых задач графическим способом.	2. Найдите решение следующих игровых задач графическим способом.
а) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -3 \\ -4 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	а) $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 4 \\ -1 & 6 \\ 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$
б) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & -1 & 3 \\ -5 & 6 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	б) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -4 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 8 & -1 \end{pmatrix}$
3. Получите новую платежную матрицу, используя принцип доминирования. Решите игру.	3. Получите новую платежную матрицу, используя принцип доминирования. Решите игру.
$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & -4 \\ 4 & 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$
4. Решите игру в смешанных стратегиях, используя симплекс метод.	4. Решите игру в смешанных стратегиях, используя симплекс метод.
$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Вариант 27	Вариант 28
1. Определите верхнюю и нижнюю цены игры и там, где это возможно, укажите седловую точку и значение выигрыша.	1. Определите верхнюю и нижнюю цены игры и там, где это возможно, укажите седловую точку и значение выигрыша.
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
2. Найдите решение следующих игровых задач графическим способом.	2. Найдите решение следующих игровых задач графическим способом.
а) $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$	а) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \\ -1 & 6 \\ 6 & 3 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$
б) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 6 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & -4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$	б) $\begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & 4 & -3 & 3 \end{pmatrix}$
3. Получите новую платежную матрицу, используя принцип доминирования. Решите игру.	3. Получите новую платежную матрицу, используя принцип доминирования. Решите игру.
$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \\ 3 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$
4. Решите игру в смешанных стратегиях, используя симплекс метод.	4. Решите игру в смешанных стратегиях, используя симплекс метод.
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 3 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Вариант 29	Вариант 30
1. Определите верхнюю и нижнюю цены игры и там, где это возможно, укажите седловую точку и значение выигрыша.	1. Определите верхнюю и нижнюю цены игры и там, где это возможно, укажите седловую точку и значение выигрыша.
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 4 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 4 & 3 \\ 7 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 & 3 \\ 6 & 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
2. Найдите решение следующих игровых задач графическим способом.	2. Найдите решение следующих игровых задач графическим способом.
а) $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & -1 \\ 7 & -4 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$	а) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$
б) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 & -4 & 7 \\ 4 & 8 & 1 & 9 & -1 \end{pmatrix}$	б) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & -1 & 7 \\ -1 & 4 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$
3. Получите новую платежную матрицу, используя принцип доминирования. Решите игру.	3. Получите новую платежную матрицу, используя принцип доминирования. Решите игру.
$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
4. Решите игру в смешанных стратегиях, используя симплекс метод.	4. Решите игру в смешанных стратегиях, используя симплекс метод.
$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ К ТЕМЕ 6

Найдите равновесие по Нэшу и оптимальность по Парето для следующих матриц			
1.	$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$	16.	$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$
2.	$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	17.	$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$
3.	$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	18.	$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$
4.	$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$	19.	$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$
5.	$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$	20.	$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$
6.	$A = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	21.	$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$
7.	$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	22.	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
8.	$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	23.	$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
9.	$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$	24.	$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$
10.	$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$	25.	$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$
11.	$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$	26.	$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$
12.	$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$	27.	$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
13.	$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$	28.	$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
14.	$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$	29.	$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
15.	$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	30.	$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ВАРИАНТЫ К ТЕМЕ 7

Задача 1 (для вариантов 1-15). Предприниматель решил закупить партию продовольственного товара. У него имеются 5 вариантов закупки: партии A, B, C, D и E. В результате прибыль предпринимателя зависит от того, какой спрос будет на его продукцию. Возможны 4 варианта спроса: S1, S2, S3, S4. Прибыль каждой партии для каждого варианта спроса представлена в таблице.

Используя критерии Лапласа, Вальда, метод максимального оптимизма, Сэвиджа, Гурвица с $\alpha = 0.4$, примите оптимальное решение.

1.		$S_1 = 2$	$S_2 = 15$	$S_3 = 20$	$S_4 = 25$
	A	161	185	171	201
	B	198	187	197	204
	C	200	197	207	187
	D	164	164	205	175
	E	206	168	190	188
2.		$S_1 = 2$	$S_2 = 15$	$S_3 = 20$	$S_4 = 25$
	A	161		171	201
	B	198	187		204
	C		197	207	187
	D	164	164	205	
	E	206		190	188
3.		$S_1 = 2$	$S_2 = 15$	$S_3 = 20$	$S_4 = 25$
	A	161		171	201
	B	198	187		204
	C		197	207	187
	D	164	164	205	
	E	206		190	188

4.		$S_1 = 2$	$S_2 = 15$	$S_3 = 20$	$S_4 = 25$
	A	161		171	201
	B	198	187		204
	C		197	207	187
	D	164	164	205	
	E	206		190	188
5.		$S_1 = 2$	$S_2 = 15$	$S_3 = 20$	$S_4 = 25$
	A	161		171	201
	B	198	187		204
	C		197	207	187
	D	164	164	205	
	E	206		190	188
6.		$S_1 = 2$	$S_2 = 15$	$S_3 = 20$	$S_4 = 25$
	A	161		171	201
	B	198	187		204
	C		197	207	187
	D	164	164	205	
	E	206		190	188
7.		$S_1 = 2$	$S_2 = 15$	$S_3 = 20$	$S_4 = 25$
	A	161		171	201
	B	198	187		204
	C		197	207	187
	D	164	164	205	
	E	206		190	188

8.		$S_1 = 2$	$S_2 = 15$	$S_3 = 20$	$S_4 = 25$
	A	161		171	201
	B	198	187		204
	C		197	207	187
	D	164	164	205	
	E	206		190	188
9.		$S_1 = 2$	$S_2 = 15$	$S_3 = 20$	$S_4 = 25$
	A	161		171	201
	B	198	187		204
	C		197	207	187
	D	164	164	205	
	E	206		190	188
10.		$S_1 = 2$	$S_2 = 15$	$S_3 = 20$	$S_4 = 25$
	A	161		171	201
	B	198	187		204
	C		197	207	187
	D	164	164	205	
	E	206		190	188
11.		$S_1 = 2$	$S_2 = 15$	$S_3 = 20$	$S_4 = 25$
	A	161		171	201
	B	198	187		204
	C		197	207	187
	D	164	164	205	
	E	206		190	188

12.		$S_1 = 2$	$S_2 = 15$	$S_3 = 20$	$S_4 = 25$
	<i>A</i>	161		171	201
	<i>B</i>	198	187		204
	<i>C</i>		197	207	187
	<i>D</i>	164	164	205	
	<i>E</i>	206		190	188
13.		$S_1 = 2$	$S_2 = 15$	$S_3 = 20$	$S_4 = 25$
	<i>A</i>	161		171	201
	<i>B</i>	198	187		204
	<i>C</i>		197	207	187
	<i>D</i>	164	164	205	
	<i>E</i>	206		190	188
14.		$S_1 = 2$	$S_2 = 15$	$S_3 = 20$	$S_4 = 25$
	<i>A</i>	161		171	201
	<i>B</i>	198	187		204
	<i>C</i>		197	207	187
	<i>D</i>	164	164	205	
	<i>E</i>	206		190	188
15.		$S_1 = 2$	$S_2 = 15$	$S_3 = 20$	$S_4 = 25$
	<i>A</i>	161		171	201
	<i>B</i>	198	187		204
	<i>C</i>		197	207	187
	<i>D</i>	164	164	205	
	<i>E</i>	206		190	188

ЗАДАЧА 1 (для вариантов 16 – 30). Коммерческий директор торговой организации желает открыть филиал в районном центре города. Ему дают

«добро» в четырех районных центрах: А, В, С и D. Затраты на строительство не определены и, в связи с позиций партнеров, зависят от того, какой будет спрос на предлагаемый товар в период строительства. Возможны 5 вариантов развития ситуации: S1, S2, S3, S4, S5.

Используя критерии Лапласа, Вальда, метод максимального оптимизма, Сэвиджа, Гурвица с $\alpha = 0.6$ примите оптимальное решение.

16.		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
	A	27	34	23	7	29
	B	31	11	22	30	21
	C	34	32	16	13	34
	D	8	18	32	33	16
17.		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
	A	27	32	23	7	29
	B	31	11	22	31	21
	C	34	32	16	13	31
	D	8	18	35	33	16
18.		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
	A	27	33	23	7	29
	B	31	11	22	31	21
	C	33	32	16	13	35
	D	8	18	34	33	16
19.		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
	A	27	34	23	7	29
	B	31	11	22	31	21
	C	30	32	16	13	31
	D	8	18	33	33	16
20.		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
	A	27	31	23	7	29
	B	31	11	22	34	21

	C	35	32	16	13	33
	D	8	18	32	33	16
21.		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
	A	27	31	23	7	29
	B	31	11	22	31	21
	C	34	32	16	13	33
	D	8	18	32	33	16
22.		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
	A	27	31	23	7	29
	B	31	11	22	33	21
	C	34	32	16	13	33
	D	8	18	31	33	16
23.		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
	A	27	31	23	7	29
	B	31	11	22	34	21
	C	32	32	16	13	34
	D	8	18	33	33	16
24.		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
	A	27	31	23	7	29
	B	31	11	22	30	21
	C	32	32	16	13	34
	D	8	18	31	33	16
25.		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
	A	27	34	23	7	29
	B	31	11	22	34	21
	C	32	32	16	13	32
	D	8	18	32	33	16

26.		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
	A	27	33	23	7	29
	B	31	11	22	33	21
	C	33	32	16	13	34
	D	8	18	30	33	16
27.		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
	A	27	33	23	7	29
	B	31	11	22	21	21
	C	31	32	16	13	30
	D	8	18	32	33	16
28.		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
	A	27	35	23	7	29
	B	31	11	22	34	21
	C	35	32	16	13	31
	D	8	18	33	33	16
29.		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
	A	27	31	23	7	29
	B	31	11	22	33	21
	C	34	32	16	13	32
	D	8	18	33	33	16
30.		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
	A	27	33	23	7	29
	B	31	11	22	35	21
	C	30	32	16	13	30
	D	8	18	35	33	16

ЗАДАЧА 2.

Для данных матриц:

- упростить матрицу, исключив из неё доминируемые строки, соответствующие заведомо невыгодным стратегиям активного игрока;
- восстановить пропущенную вероятность одной из гипотез о «поведении природы» и выявить оптимальную стратегию активного игрока по математическому ожиданию прибыли;
- выявить оптимальные стратегии активного игрока, применяя критерии Лапласа, Вальда, Гурвица (при $\alpha = 0,3$) и Сэвиджа.

1.	18 %	14 %	25 %	?	2.	14 %	19 %	33 %	?
	1	4	5	3		0	-1	9	6
	-1	8	6	3		1	-4	3	0
	-1	6	9	1		3	5	8	5
	4	7	5	6		-5	-1	2	-4
	-5	4	-3	-3		-2	-2	2	8
3.	14 %	33 %	21 %	?	4.	18 %	42 %	11 %	?
	9	1	7	6		2	0	-5	4
	7	-2	-5	2		6	3	9	9
	5	6	0	0		4	0	-4	6
	8	-4	3	-5		2	5	3	-5
	-1	6	9	-5		3	9	-2	1
5.	15 %	19 %	30 %	?	6.	29 %	11 %	33 %	?
	7	-5	3	4		3	9	4	-2
	9	5	8	7		7	-5	1	7
	0	7	-3	-1		1	2	2	-2
	9	-4	-3	9		4	9	8	1
	1	-2	-5	1		9	-2	-5	-2

7.	24 %	31 %	25 %	?	8.	11 %	35 %	31 %	?
	-5	-4	-3	-4		6	1	9	-2
	-5	-3	0	4		-2	-4	-3	5
	7	9	2	-1		0	2	5	7
	4	-4	6	9		-2	-1	-3	-3
	2	-2	5	8		1	-2	-5	4
9.	54 %	17 %	10 %	?	10.	20 %	39 %	29 %	?
	-1	0	4	3		-1	8	-5	-2
	4	1	-5	-3		4	5	1	2
	-4	0	4	1		-1	-4	0	7
	7	7	-5	0		-5	3	-4	2
	5	0	-1	3		6	1	1	8
11.	29 %	20 %	17 %	?	12.	28 %	30 %	13 %	?
	8	-2	6	8		-5	2	4	-3
	0	-2	-1	4		-3	1	-5	8
	-1	1	4	0		2	3	1	8
	6	-5	3	-2		2	3	-2	-5
	9	1	0	-5		8	-1	9	-5
13.	46 %	11 %	28 %	?	14.	60 %	15 %	12 %	?
	-2	4	-2	6		1	-2	9	9
	3	2	-1	9		1	5	-5	-2
	-2	6	8	7		2	2	-5	-3
	3	-1	-4	-2		7	7	1	-3
	5	9	8	0		6	8	5	-2
15.	22 %	26 %	27 %	?	16.	17 %	30 %	25 %	?
	1	4	8	-4		8	-1	8	9
	5	8	-4	7		2	-4	-2	0
	-4	-2	6	1		6	3	0	-2
	-4	-3	-1	-2		8	-1	-1	-3
	-2	8	-4	-1		-5	7	9	1

17.	34 % 32 % 12 % ?		18.	51 % 27 % 10 % ?	
	6 5 -1 0			8 0 8 2	
	-4 0 -2 -3			0 -5 -5 4	
	6 3 9 -2			5 -3 1 8	
	5 -4 -5 -4			6 -1 -3 8	
	0 -5 -1 7			6 0 -3 -4	
19.	21 % 16 % 29 % ?		20.	20 % 40 % 12 % ?	
	9 2 1 -4			6 1 5 2	
	7 9 0 -4			-1 0 4 9	
	-1 6 7 -5			2 -3 -4 -2	
	-1 -3 -5 3			5 -5 4 -3	
	-1 6 7 3			6 6 4 0	
21.	28 % 32 % 26 % ?		22.	23 % 15 % 25 % ?	
	3 5 7 0			-1 -3 -2 -4	
	5 3 0 -4			2 -3 7 1	
	6 5 9 8			5 6 9 7	
	8 2 1 9			9 -5 0 -1	
	9 6 1 2			8 0 -3 -3	
23.	24 % 35 % 31 % ?		24.	22 % 31 % 28 % ?	
	1 8 2 2			5 -3 0 -5	
	-1 6 -5 -2			8 -2 3 0	
	0 -3 -2 -4			2 6 4 0	
	7 8 1 1			-2 -5 2 4	
	-3 4 3 2			1 1 0 0	
25.	16 % 15 % 32 % ?		26.	10 % 45 % 21 % ?	
	9 5 3 1			6 2 8 0	
	2 -4 4 -2			-5 -2 8 -1	
	5 0 5 6			3 5 4 -3	
	7 3 4 -2			6 -1 1 -5	
	2 -2 -5 -5			1 3 8 -1	

27.	29 %	19 %	36 %	?		28.	20 %	10 %	40 %	?	
	5	2	6	4			8	6	1	5	
	7	9	-4	9			6	-2	8	7	
	-1	-5	3	-2			6	3	2	5	
	3	9	5	0			4	2	1	4	
	0	-4	-3	2			-4	0	2	1	
29.	15 %	15 %	47 %	?		30.	31 %	23 %	27 %	?	
	4	-4	2	3			-1	4	3	0	
	1	5	2	1			2	5	4	7	
	2	4	7	0			1	7	2	-2	
	1	1	-2	5			1	4	2	6	
	9	7	3	3			-5	3	-2	8	

ЗАДАЧА 3. Для предложенной задачи построить математическую модель. Найдите оптимальное решение с позиций критериев Лапласа, Вальда, Гурвица, Сэвиджа и дайте соответствующие комментарии к их применению.

Вариант 1, 16. Фирма может за определенную плату (100 руб.) составить любому студенту программу для каких-то типовых расчетов на ПЭВМ. Каждый сотрудник фирмы может качественно выполнить до 10 заказов. Стоимость аренды машинного времени составляет 800 руб. в месяц (этого времени достаточно для выполнения 10 работ). Количество студентов, пользующихся услугами фирмы, не превышает 100 человек в месяц. Определить число сотрудников фирмы, дающее максимум общего дохода (для регистрации фирмы необходима численность не менее двух человек).

Вариант 2, 17. Землевладелец на знойном юге решает вопрос о числе рабочих, привлекаемых к уборке томатов. Урожайность колеблется в зависимости от погоды от 500 до 600 центнеров, закупочная цена стабильна и равна 5 руб./кг. Рабочий за сезон собирает 20 центнеров, получая 1,2 руб./кг за уборку и 280 руб. для оплаты стоимости проезда к месту работ. Затраты на обеспечение рабочих жильем (речь не идет даже о трехзвездочной гостинице) составляют 300 руб. и не зависят от численности.

Вариант 3, 18. Председатель сельхозкооператива решает закупить бочки для засолки огурцов. Виды на урожай колеблются от 700 до 1000 кг, в бочку вмещается 50 кг, цена бочки – 300 руб., затраты на засолку – 20 руб. за бочку, аренда места на рынке – 50 руб., реализационная цена – 7,20 руб./кг.

Вариант 4, 19. Универмаг, работающий по 10 часов в сутки, ежедневно посещают от 7 до 10 тыс. чел. Стоимость покупок одного посетителя в среднем – 50 руб. Время обслуживания – 3 мин. на покупателя. Затраты на оборудование одного рабочего места – 2400 руб., зарплата продавца – 1400 руб.

в месяц. Найти число рабочих мест при планировании работы на месяц (30 рабочих дней).

Вариант 5, 20. Фирма, действующая в живописном Горном Алтае, планирует десятидневные маршруты для туристов в летнем сезоне (60 дней). Известно, что число туристов в течение десятидневки колеблется от 1 до 1,5 тыс. чел. Группы комплектуются из 25 чел. Стоимость путевки – 2 тыс. руб. Заработная плата инструктора составляет 6 тыс. руб. в месяц. На экипировку группы затрачивается 1,5 тыс. руб., на питание группы – 12 тыс. руб. К тому же приходится оплачивать ремонт помещений и снаряжения при подготовке к сезону – 30 тыс. руб. Сколько же инструкторов разумно пригласить на работу?

Вариант 6, 21. В транспортном цехе ежедневно выходит из строя до 8 агрегатов, каждый из которых мог бы дать продукции на 550 руб. Слесарь-ремонтник, получающий 2500 руб. в месяц, не может в день обслужить более двух станков. Сколько же слесарей должен привлечь на работу начальник транспортного цеха?

Вариант 7, 22. Организуются пригородные автобусные рейсы. Число пассажиров колеблется от 300 до 450 чел., из которых 10 % имеют право бесплатного проезда. Цена билета 6 руб. Вместимость автобуса – 30 чел. Эксплуатационные затраты на один рейс – 50 руб. Оплата шофера за одну поездку – 60 руб. Сколько же организовать рейсов?

Вариант 8, 23. В райцентре решается вопрос о строительстве сыроваренного завода. Известно, что дневной объем поставок молока колеблется от 4800 до 5600 л в день. Один сепаратор ежедневно перерабатывает 600 л молока в 50 кг сыра. Стоимость аппарата 40000 руб., ежемесячные эксплуатационные расходы – 1500 руб., аренда помещения – 12000 руб. в год. Молоко закупается по 5 руб./л, сыр продается по 100 руб./кг. Неиспользованное молоко приходится вывозить на свинокомплекс молоковозами (вместимость 5 т) с затратами 100 руб. за рейс. Сколько же сепараторов закупать?

Вариант 9, 24. Прядельная фабрика ежемесячно получает от 35 до 50 т хлопка повышенной влажности. Один сушильный агрегат может высушить 5 т. Затраты на техническое обслуживание агрегата 1000 руб. (независимо от его использования или простоя). Потери от 1 т невысушенного хлопка – 7000 руб. Сколько агрегатов разумно иметь на фабрике?

Вариант 10, 25. В 50-е годы в одном из небольших городов области планировалось строительство кинотеатра. Имелись проекты на 400, 500, 600 и 750 мест. Затраты на содержание кинотеатра составляли 40 руб. в день и дополнительно 10 руб. за каждые сто мест (свыше 600). В день можно было дать 6 сеансов, стоимость билета составляла в среднем 40 коп. Количество посетителей колебалось от 2000 до 3000 чел. Какой из проектов следовало выбрать?

Вариант 11, 26. Требуется выяснить потребности транспортного агентства в автобусах для экскурсионного обслуживания. Обычно число заявок на автобусы колеблется в пределах от 10 до 50. Затраты на эксплуатацию каждого автобуса составляют 10 денежных единиц плюс 100 на содержание

автопарка в целом в день. Экскурсионное бюро выплачивает транспортному агентству 20 денежных единиц за каждую заявку.

Вариант 12, 27. Бюро трудоустройства населения планирует открытие курсов компьютерной грамотности. Ожидаемая численность слушателей в пределах от 100 до 200 чел. За каждого из них бюро получает от работодателя 1000 руб. Преподаватель работает с группой, не превышающей 10 чел. Расходы на хозяйственные нужды составляют 5000 руб. и на оплату преподавателя 4500 руб. Сколько преподавателей разумно привлечь?

Вариант 13, 28. Ежедневный спрос на булочки в продовольственном магазине колеблется от 1000 до 1500. Булочки покупаются лотками по 100 штук по цене 1,60 и продаются по цене 2,20 за штуку. Непроданные булочки распродают по цене 0,80 на следующее утро. Ваши рекомендации?

Вариант 14, 29. Ежедневный спрос на булочки в продовольственном магазине может принимать следующие значения.

1	2	3	4	5
100	150	200	250	300

Если булочка не продана днем, то она может быть реализована за 4,5 рубля к концу дня. Свежие булочки продаются по 15 рублей за штуку. Затраты магазина на одну булочку 7,5 рубля. Используя игровой подход, определите какое число булочек надо заказывать ежедневно.

Вариант 15, 30. Фирма купила станок за 150 денежных единиц. Для его ремонта можно купить специальное оборудование за 60 ед. или обойтись старым оборудованием. Если станок выходит из строя, его ремонт с помощью спецоборудования обходится в 15 ед., без спецоборудования – в 50 ед. Известно, что в течение срока эксплуатации станок выходит из строя не более трех раз: вероятность того, что станок не сломается – 0,2; сломается 1 раз – 0,5; сломается 2 раза – 0,2; сломается 3 раза – 0,1. Требуется определить целесообразность приобретения специализированного ремонтного оборудования.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Аркин, П. А. Исследование операций [Текст] : учебное пособие / П. А. Аркин, К. А. Соловейчик, К. Г. Аркина. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2016. – 232 с.
2. Аркин, П. А. Организационно-экономический механизм экономической координации: логистический подход [Текст] / П. А. Аркин. – СПб.: Изд-во СПбГУЭиФ, 1998. – 159 с.
3. Аркин, П. А. Организационно-экономическое моделирование [Текст] : учебное пособие / П. А. Аркин, К. А. Соловейчик, К. Г. Аркина. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2016. – 262 с.
4. Аркин, П. А. Управление развитием технологических ресурсов хозяйственных систем [Текст] : монография / П. А. Аркин, Е. М. Рогова, К. А. Соловейчик. – СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2003. – 174 с.
5. Барсукова, О. Ю. Теория принятия решений. Ч. 1. Теория игр. [Текст] : учебное пособие / О. Ю. Барсукова, П. Г. Пичугина, Н. Ю. Скибицкая. – Пенза: Изд-во ПГУ, 2012. – 74 с.
6. Богданова, Е. Л. Экономико-математическое моделирование в риск-менеджменте [Текст] : учебное пособие / Е. Л. Богданова, К. А. Соловейчик, К. Г. Аркина. – СПб.: Университет ИТМО, 2017. – 198 с.
7. Васильев, Н. С. Двойственность в линейном программировании и теория матричных игр [Текст] : учебное пособие / Н. С. Васильев, В. В. Станцо. – М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2010. – 48 с.
8. Воронова, Д. Ю. Логистика закупок [Текст] : учебное пособие / Д. Ю. Воронова, А. Г. Николаева, Л. Ю. Бережная. – СПб.: ВШТЭ СПбГУПТД, 2021. – 271 с.
9. Гетманчук, А. В. Экономико-математические методы и модели [Текст] : учебное пособие / А. В. Гетманчук, М. М. Ермилов. – М.: Издательско-торговая корпорация "Дашков и К", 2013. – 188 с.
10. Гончарь, П. С. Задания по теории игр с примерами решения [Текст] : учебно-методическое пособие / П. С. Гончарь, Л. Э. Гончарь, Д. С. Завалицин. – Екатеринбург: Изд-во УрГУПС, 2012. – 74 с.
11. Демин, Д. Б. Методические указания и контрольные задания по дисциплине «Теория игр» [Текст] / Д. Б. Демин. – М., 2014 – 75 с.
12. Дубров, А. М. Моделирование рисков ситуации в экономике и бизнесе [Текст] : учебное пособие / А. М. Дубров, Б. А. Лагоша, Е. Ю. Хрусталева. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 176 с.
13. Евдокимов, М. А. Применение математики в экономике: учебное пособие / М. А. Евдокимов, Л. Н. Смирнова, Т. А. Бенгина, В. Н. Маклаков, О. С. Самойлова. – Самара: Самар. Гос. техн. ун-т, 2012. – 114 с.
14. Звягинцева, Т. Е. Введение в математический анализ [Текст] : методические рекомендации / Т. Е. Звягинцева, О. С. Корсакова, К. Г. Межевич. – СПб., 2005.

15. Звягинцева, Т. Е. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] : методические рекомендации / Т. Е. Звягинцева, О. С. Корсакова, К. Г. Межевич. – СПб., 2005.
16. Звягинцева, Т. Е. Числовые и степенные ряды: методические рекомендации и варианты контрольных заданий. Ч. 4. [Текст] / Т. Е. Звягинцева, О. С. Корсакова, К. Г. Межевич. – СПб.: РГПУ им. А. И. Герцена, 2005.
17. Ильченко, А. Н. Практикум по экономико-математическим методам [Текст] / А. Н. Ильченко, О. Л. Ксенофонтова, Г. В. Канакина. – М.: Финансы и статистика, 2009. – 288 с.
18. Киселева, И. А. Моделирование рискованных ситуаций [Текст] : учебно-практическое пособие / И. А. Киселева. – М.: МЭСИ, 2007. – 102 с.
19. Колобашкина, Л. В. Основы теории игр [Текст] : учебное пособие / Л. В. Колобашкина. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. – 195 с.
20. Лабскер, Л. Г. Теория игр в экономике, финансах и бизнесе [Текст] : учебник / Л. Г. Лабскер, Н. А. Ященко. – М.: КноРус, 2017. – 525 с.
21. Лабскер, Л. Г. Теория игр в экономике (практикум с решениями задач) [Текст] : учебное пособие / Л. Г. Лабскер, Н. А. Ященко. – Москва, 2018. – 264 с.
22. Лукичёва, Л. И. Управленческие решения [Текст] / Л. И. Лукичёва, Д. Н. Егорычев – М.: Издательство «Омега-Л», 2009. – 383 с.
23. Межевич, К. Г. Дискретная математика: комбинаторика [Текст] : учебное пособие / К. Г. Межевич. – СПб.: СПбГТИ, 2009.
24. Методы решения задач: применение производных [Текст] : методические указания. – СПб.: СПбГЭУ "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина), 2011.
25. Методы решения задач: техника вычисления производных [Текст] : методические указания. – СПб.: СПбГЭУ "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина), 2009.
26. Никитин, С. И. Теория игр [Текст] : учебное пособие / С. И. Никитин, О. Х. Бритаева. – СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского гос. экономического ун-та, 2014. – 146 с.
27. Оверчук, М. Л. Теория игр в задачах [Текст] / М. Л. Оверчук. – М.: МАДИ, 2016. – 56 с.
28. Петракова, Н. В. Основы математического моделирования. Модели. Методы. Примеры [Текст] / Н. В. Петракова. – Брянск: Издательство Брянская ГСХА, 2011. – 162 с.
29. Прокопенко, Н. Ю. Исследование операций [Текст] : учебное пособие / Н. Ю. Прокопенко. – Н. Новгород: ННГАСУ, 2018. – 165с.
30. Розен, В. В. Математические модели принятия решений в экономике [Текст] : учебное пособие / В. В. Розен, Л. В. Бессонов. – Саратов, 2008. – 401 с.
31. Садовин, Н. С. Основы теории игр [Текст] : учебное пособие / Н. С. Садовин, Т. Н. Садовина. – Йошкар-Ола: Мар. гос. ун-т, 2011. – 119 с.

32. Соловейчик, К. А. Процессы управления наукоемкими производствами в машиностроении [Текст] : монография / К. А. Соловейчик, С. В. Салкуцан, П. А. Аркин. – СПб: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2018. – 438 с.
33. Харитонов, И. В. Основы теории принятия управленческих решений [Текст] : учебник / И. В. Харитонов. – Архангельск: САФУ, 2015. – 155 с.
34. Черников, Ю. Г. Системный анализ и исследование операций [Текст] : учебное пособие / Ю. Г. Черников. – М.: МГГУ, 2006. – 370 с.
35. Шапкин, А. С. Математические методы и модели исследования операций [Текст] : учебник / А.С. Шапкин, В. А. Шапкин. – М.: Издательско-торговая корпорация "Дашков и К°", 2016. – 400 с.
36. Шапкин, А. С. Теория риска и моделирование рискованных ситуаций [Текст] : учебник / А. С. Шапкин, В. А. Шапкин. – М.: Издательско-торговая корпорация "Дашков и К°", 2014. – 880 с.
37. Шикин, Е. В. Исследование операций [Текст] / Е. В. Шикин, Г. Е. Шикина. – М.: Издательство МГУ, 2006. – 275 с.

Учебное издание

**Николаева Анна Георгиевна
Терешкин Артем Вячеславович
Аркина Ксения Георгиевна
Аширметова Ольга Борисовна
Соусов Вячеслав Евгеньевич
Бородина Екатерина Павловна**

Методы принятия управленческих решений

Учебное пособие

Редактор и корректор М. Д. Баранова
Техн. редактор Д. А. Романова

Темплан 2023 г., поз. 5040

Подписано к печати 18.04.2023.	Формат 60x84/16.	Бумага тип № 1.
Печать офсетная.	Печ.л. 8,3.	Уч.-изд. л. 8,3.
Тираж 30 экз.	Изд. № 5040.	Цена «С».
		Заказ №

Ризограф Высшей школы технологии и энергетики СПбГУПТД,
198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4.