

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»

ВЫСШАЯ ШКОЛА ТЕХНОЛОГИИ И ЭНЕРГЕТИКИ

Е.А.Колесникович

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА В ОЦЕНКЕ СОБСТВЕННОСТИ

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2017

УДК 657.421.32 (07)

ББК 65. 9 (2) 49

К 603

Колесникович Е.А. Финансовая математика в оценке собственности: учебно-методическое пособие; ВШТЭ СПбГУПТД-СПб., 2017. - 17 с.

В учебном пособии представлены элементы финансовой математики в оценке собственности с вариантами контрольной работы по данному курсу.

Учебное пособие разработано с целью учебно-методического обеспечения дисциплины «Оценка и управление стоимостью».

Предназначается для студентов всех форм обучения по направлениям 38.03.01 «Экономика», 38.03.02 «Менеджмент».

Рецензент: канд. экон. наук, доцент кафедры финансов и учета ВШТЭ СПбГУПТД Шмулевич Т.В.

Подготовлено и рекомендовано к печати кафедрой маркетинга и логистики ВШТЭ СПбГУПТД (протокол № 8 от 01.06.2017 г.).

Утверждено к изданию методической комиссией ВШТЭ СПбГУПТД (протокол № 10 от 28.06.2017 г.).

©Высшая школа технологии и энергетики
СПбГУПТД, 2017

©Колесникович Е.А., 2017

Введение

В теории и практике оценки финансовая математика используется в основном для расчетов по доходному подходу. Главный принцип - принцип *ожиданий*, в соответствии с которым *оценочная стоимость* - это текущая (*настоящая*) стоимость (PV-presentvalue) всех будущих выгод (доходов) от собственности, а также от возможной ее продажи в конце периода функционирования. Это связано с тем, что оценщик оперирует денежными потоками в различные периоды времени (рис. 1).

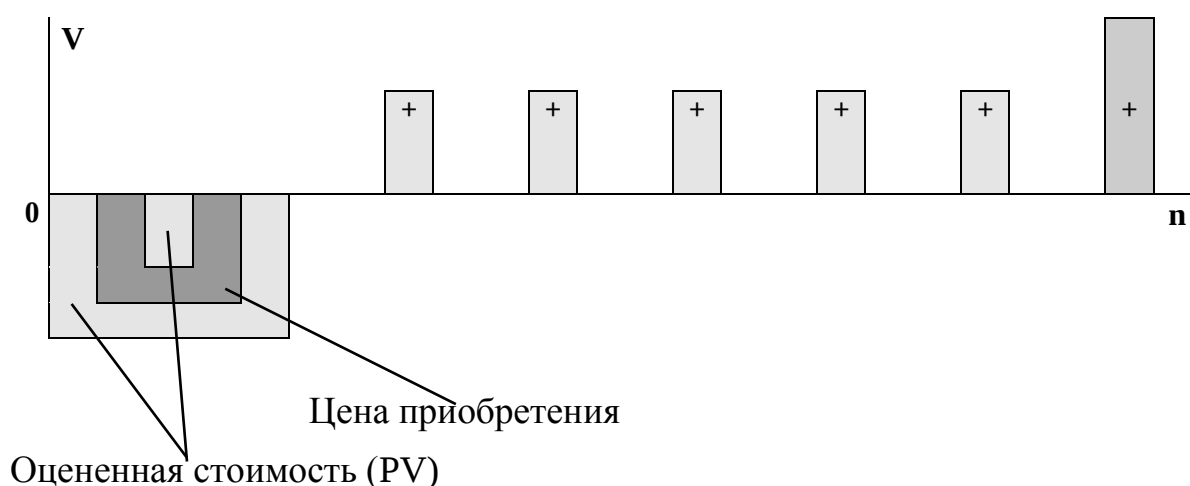
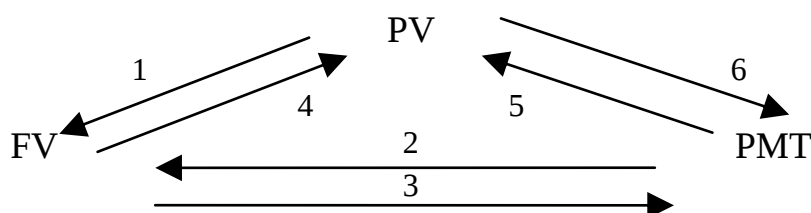


Рис.1. Денежные потоки различных периодов времени

Основные понятия

<i>Денежные понятия</i>		<i>Условия кредита</i>	
PV	текущая стоимость (<i>presentvalue</i>);	N	число лет;
FV	будущая стоимость (<i>futurevalue</i>);	n	число периодов;
PMT	платёж (<i>payment</i>), взнос, выплата;	I/y	(номинальная годовая ставка процента (<i>interestperyear</i>);
		i	ставка процента за период;
		P/y	количество платежей в году (<i>paymentsperyear</i>);

Почему функций сложного процента всего 6?



Первая функция сложного процента - аккумулированная (accumulate-накапливать) сумма Единицы (фактор накопления капитала)

Сложный процент - форма расчета дохода, основанная на присоединении к сумме долга начисленных, но невыплаченных процентов, начисление процентов на проценты, расчет процентов на два или большее число периодов, проводимый таким образом, что процент начисляется не только на исходную сумму, но и на процент, начисленный в предыдущем периоде.

Задача № 1: Вы положили в Банк 100 денежных единиц на 5 лет приежегодном начислении процентов по 10 % ставке. Сколько денег вы снимете со счета через 5 лет?

Решение:

Таблица 1

Год	Сумма вклада на начало года	Сумма дохода от вклада	Сумма вклада на конец года
1	100,00	10,00	110,00
2	110,00	11,00	121,00
3	121,00	12,10	133,10
4	133,10	13,31	146,41
5	146,41	14,64	161,05

Определение. Аккумулированная сумма Единицы- будущая стоимость суммы, до которой вырастет одна денежная единица (рубль, \$), если ее депонировать или инвестировать на определенное количество периодов времени с учетом накопления процентов.

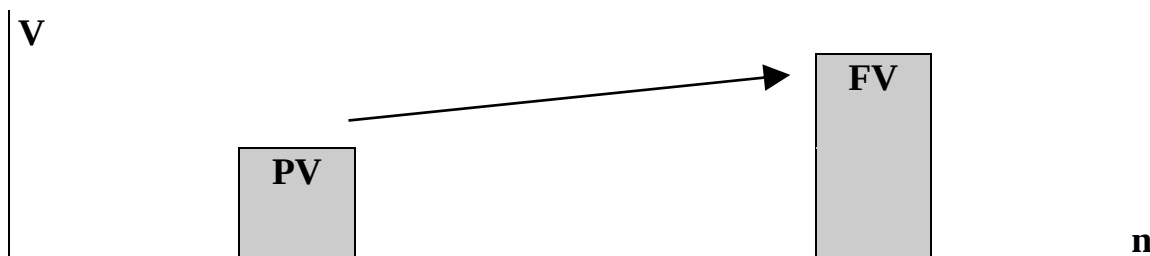


Рис. 2. Диаграмма изменения стоимости капитала

Правило 72-ух: Удвоение вложенной суммы происходит через число лет, определяемое как частное от деления числа 72 на годовую номинальную ставку процента.

Правило 72-ух применимо в диапазоне от 3 до 18 % годовых.

Задача №2. За сколько лет произойдет удвоение вашего капитала, если банк дает 15% годовых ?

Решение: $72/15 = 4,8$ года.

Вторая функция сложного процента - накопление Единицы за n периодов (фактор будущей стоимости равномерных накоплений капитала)

Будущая стоимость обычного аннуитета Единицы - $S(n, i)$

Определение. Накопление капитала за n периодов - суммарное накопление основной суммы и процентов по серии единичных депозитов или взносов в каждый интервал времени для определенного количества периодов по заданной ставке %.

Аннуитет: Серия равномерных равновеликих платежей.

Пример: Чтобы заработать себе на пенсию, вы решили откладывать в банк в конце года по 100 усл. ед. Сколько денег вы снимете со счета через 5 лет, если банк начисляет 10 % ежегодно?

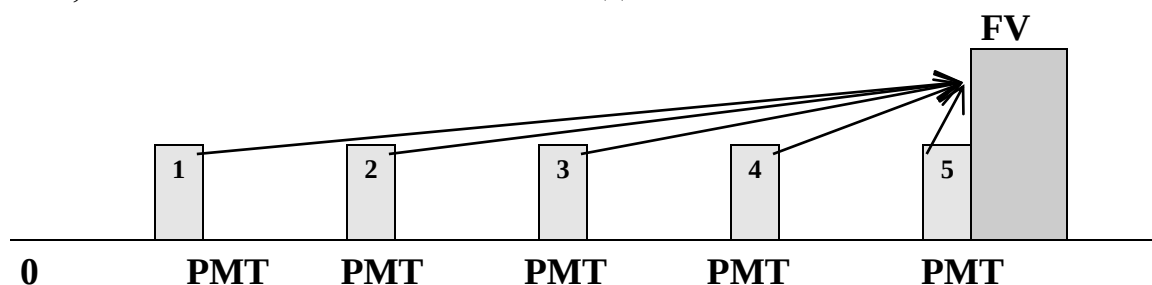


Рис. 3. Диаграмма будущей стоимости 5-летнего обычного аннуитета

Таблица 2

Год	Сумма вклада на начало года	Сумма дохода от вклада	Взнос в конце года	Сумма вклада на конец года
1	0,00	0,00	100,00	100,00
2	100,00	10,00	100,00	210,00
3	210,00	21,00	100,00	331,00
4	331,00	33,10	100,00	464,10
5	464,10	46,41	100,00	610,51

$$FV = \frac{(1+i)^n - 1}{i} PMT$$

$$S(n, i) = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Будущая стоимость авансового аннуитета Единицы - $S_a(n,i)$ (фактор авансовых накоплений капитала)

Пример: Чтобы заработать себе пенсию, вы решили откладывать в банк в начале каждого года по 1 млн. руб. в течение 5 лет под 10 % годовых. Сколько денег окажется на счете в конце 5-го года?

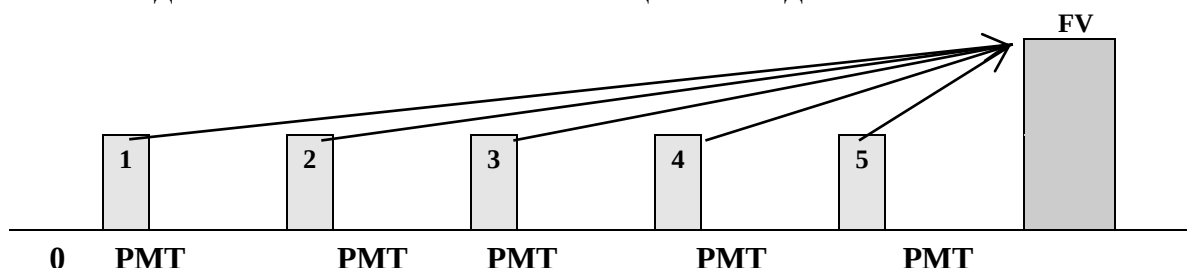


Рис. 4. Диаграмма будущей стоимости авансового 5-летнего аннуитета

Таблица 3

Год	Внос в начале года	Сумма вклада на начало года	Сумма дохода от вклада	Сумма вклада на конец года
1	100	100,00	10,00	110,00
2	100	210,00	21,00	231,00
3	100	331,00	33,10	364,10
4	100	464,10	46,41	510,51
5	100	610,51	61,05	671,56

$$FV = PMT * \left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1 \right]$$

$$S^a(n, i) = \frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1$$

Третья функция сложного процента - n -периодный Фактор Фонда Возмещения (ФФВ) капитала

Фактор Фонда Возмещения - величина платежа, который необходимо депонировать (вкладывать) в каждом периоде при заданной ставке годового процента, чтобы в последнем периоде получить Единицу.

Внос на возмещение капитала - величина платежа, который необходимо депонировать (вкладывать) в каждом периоде при заданной ставке годового процента, чтобы в последнем периоде получить требуемую сумму капитала.

Аннуитет – серия равномерных равновеликих платежей (например, выплаты по кредиту).

Аннуитет бывает двух видов:

* *обычный* (платежи в конце периода)- $SFF(n,i)$

* *авансовый* (платежи в начале периода)- $SFF^a(n,i)$

Задача № 3. Вы хотите купить загородный дом. Ориентировочная стоимость - \$70 000. Сколько необходимо ежемесячно депонировать в банк под 11% годовых из вышей заработной платы (в конце месяца), чтобы через 8 лет ваша мечта осуществилась?

Представьте, что вы взяли кредит на N лет под I -процентов годовых. По условиям кредита вы должны каждый месяц вносить какой-либо оговоренный взнос, а в конце N -го года погасить всю оставшуюся сумму. Величина этой суммы и называется *шаровой платеж*.

Если величина взноса равна проценту в денежном выражении, то величина шарового платежа равна сумме кредита.

Шаровой платеж - величина последнего платежа.

N-периодный обычный ФФВ капитала

Задача № 4: Вы взяли в долг 1 млн. \$ на 5 лет под 10% годовых, каждый год вы платите только проценты. Какую сумму вы должны депонировать в конце каждого года, чтобы накопить миллион?

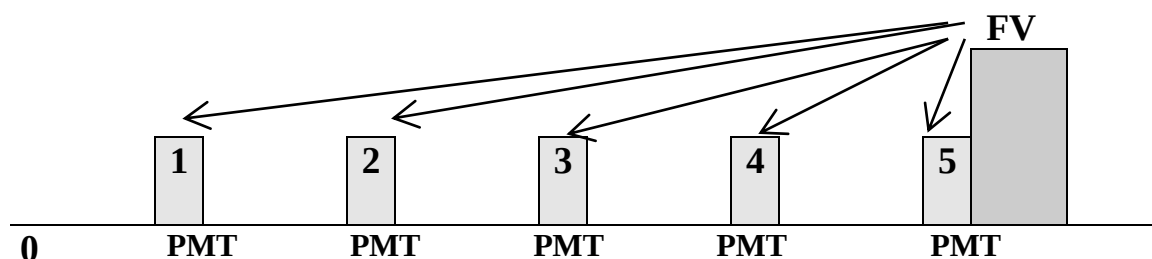


Рис. 5. Диаграмма иллюстрации фактора фонда возмещения при обычных платежах

$$PMT = \frac{FV * i}{(1 + i)^n - 1}$$

$$SFF(n, i) = \frac{1}{(1 + i)^n - 1}$$

N-периодный авансовый ФФВ Единицы

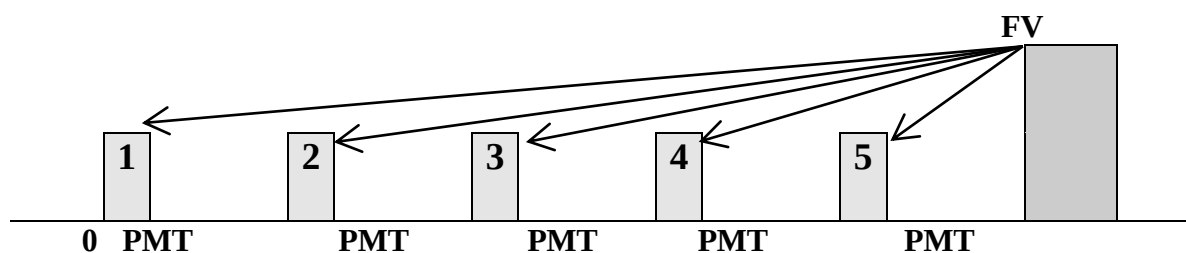


Рис. 6. Диаграмма иллюстрации фактора фонда возмещения при авансовых платежах

$$PMT = \frac{FV \cdot i}{(1+i)^{n+1} - (i+1)}$$

$$SFF^a(n, i) = \frac{i}{(1+i)^{n+1} - (i+1)}$$

Четвертая функция сложного процента - текущая стоимость будущей Единицы (фактор текущей стоимости будущего капитала - фактор реверсии)

Определение. Четвертая функция - текущая стоимость будущей Единицы которая будет получена в будущем через определенное количество временных периодов при дисконтировании по заданной процентной ставке.

Процесс пересчета будущей стоимости капитала в настоящую носит название *дисконтирования* (от английского *discont* - уменьшать); ставка, по которой происходит дисконтирование - *ставка дисконта* (коэффициент).

Задача № 5. Какова текущая стоимость 1 000 долларов, полученных в конце пятого года при 10% годовых, при годовом начислении процента?

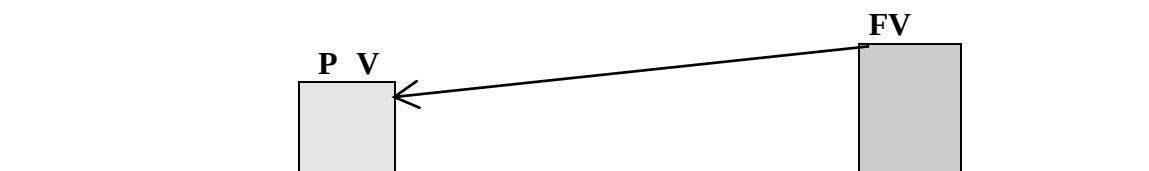


Рис. 7. Графическое изображение условия задачи

$$PV = FV / (1+i)^n$$

$$PV = 1 / (1+i)^n$$

Таблица 4

Год	Действие	Сумма (долл.)
конец 5-го года		1000,00
начало 5-го года	$= 1\,000 / (1+0,1)$	909,09
начало 4-го года	$= 909,09 / (1+0,1)$	826,45
начало 3-го года	$= 826,45 / (1+0,1)$	751,31
начало 2-го года	$= 751,31 / (1+0,1)$	683,01
начало 1-го года	$= 683,01 / (1+0,1)$	620,92

Ответ: для годового начисления - 620,92 долл.

Пятая функция сложного процента - текущая стоимость n -периодного аннуитета Единицы (фактор текущей стоимости аннуитета платежей/взносов)

Определение. Пятая функция - позволяет определить *текущую* стоимость серии *будущих* выплат одной денежной единицы в каждый период времени в течение определенного количества периодов при дисконтировании по определенной процентной ставке (норме дисконтирования).

Текущая стоимость обычного аннуитета $-a(n,i)$

Задача № 6. У вас есть право получать с недвижимости в течение 5 лет в конце каждого года 1 млн. руб. чистой прибыли в виде рентного дохода. Сколько стоит это право сегодня, при условии, что норма прибыли (ставка дисконтирования) - 10% ?

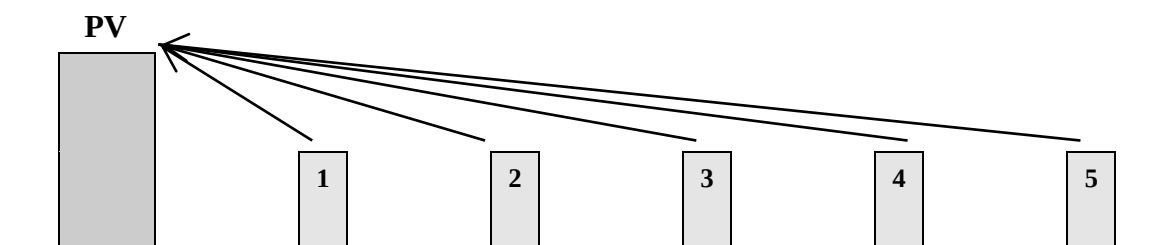


Рис. 8. Графическое изображение задачи

Год	Текущая стоимость
1	$\frac{1}{(1+0.1)^1} = 0.909$
2	$\frac{1}{(1+0.1)^2} = 0.826$
3	$\frac{1}{(1+0.1)^3} = 0.751$
4	$\frac{1}{(1+0.1)^4} = 0.683$
5	$\frac{1}{(1+0.1)^5} = 0.621$
Сумма = 3.790 млн.руб	

$$PV = PMT * \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

$$a(n, i) = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

Текущая стоимость авансового аннуитета Единицы - $a(n, i)$

Пример: У вас есть право получать с недвижимости в течение 5 лет каждый год в *начале* каждого года 1 млн. руб. чистой прибыли в виде рентного дохода. Сколько стоит это право сегодня (ставка дисконта - 10 %) ?

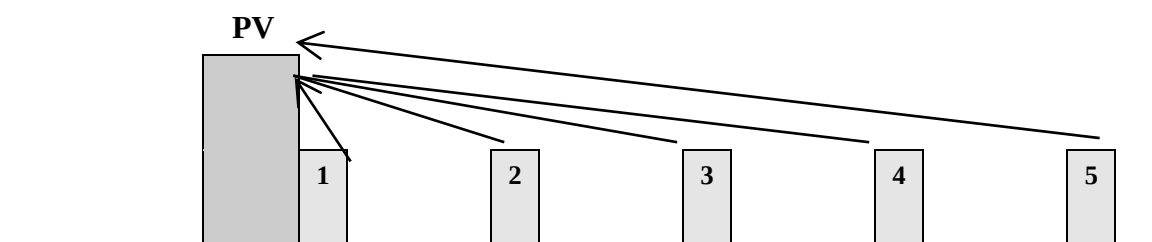


Рис. 9. Графическое изображение условия задачи

$$PV = \frac{PMT}{(1 + i)^k}$$



$$PV = \frac{PMT}{(1 + i)^{k-1}}$$

Год	Текущая стоимость
1	$\frac{1}{(1+0.1)^0} = 1.000$
2	$\frac{1}{(1+0.1)^1} = 0.909$
3	$\frac{1}{(1+0.1)^2} = 0.826$
4	$\frac{1}{(1+0.1)^3} = 0.751$
5	$\frac{1}{(1+0.1)^4} = 0.683$
Сумма = 4.170 млн.руб	

$$PV = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{PMT}{(1+i)^{k-1}}$$

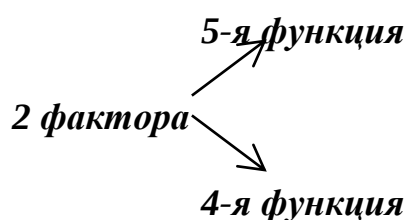
$$PV = PMT \left[\frac{1 - (1+i)^{-(n-1)}}{i} + 1 \right]$$

$$a^a(n, i) = \frac{1 - (1+i)^{-(n-1)}}{i} + 1$$

Использование двух факторов

Доход от использования недвижимости часто состоит из 2-х частей:

- > периодических платежей от использования недвижимости;
- > разового поступления от продажи (*реверсия*).



Задача № 7. Предположим, что при норме прибыли 12% годовых в течение 10 лет недвижимость должна приносить ежемесячный доход в размере \$500, после чего она будет продана за \$40 000 (в примерах не учитывается инфляционный процесс). Сколько можно заплатить за недвижимость сегодня ?

Внутренняя норма рентабельности

Определение: Внутренняя норма рентабельности (прибыли) - годовая номинальная ставка процента, которая дает нулевую текущую стоимость.

Обозначение - *IRR*

Нулевая текущая стоимость потоков доходов означает равенство доходов и расходов, приведенных к нулевому моменту времени.

Задача № 8. Вы, являясь инвестором, вложили в какое-то дело 400 тыс. долларов (например, купили недвижимость). Каждый месяц вы получаете доход в 5 тыс. долларов в виде арендной платы и через 10 лет продаете недвижимость за 500 тыс. долларов. Какова внутренняя нормарентабельности?

Риск и ставка дисконтирования

Под риском понимается нестабильность и неопределенность, связанные с инвестициями. Риск описывает вероятность того, что доходы, получаемые от инвестиций, могут быть *больше* или *меньше* ожидаемых.

Задача № 9. Собственник в течение 5 лет будет иметь в конце года арендные платежи по 2 млн. руб. Устанавливает для них норму дисконтирования – 12% годовых.

На следующие 5 лет планирует повышение арендной платы до 2,2 млн. руб. в год. Для этих более отдаленных по времени и, следовательно, более рискованных платежей он устанавливает норму дисконтирования 14% годовых.

В конце 10-го года планирует продать недвижимость за 15 млн. руб. И для этой сделки устанавливает еще более высокую норму дисконтирования 16% годовых, учитывая ее низкую вероятность.

Какова цена этой недвижимости сегодня?

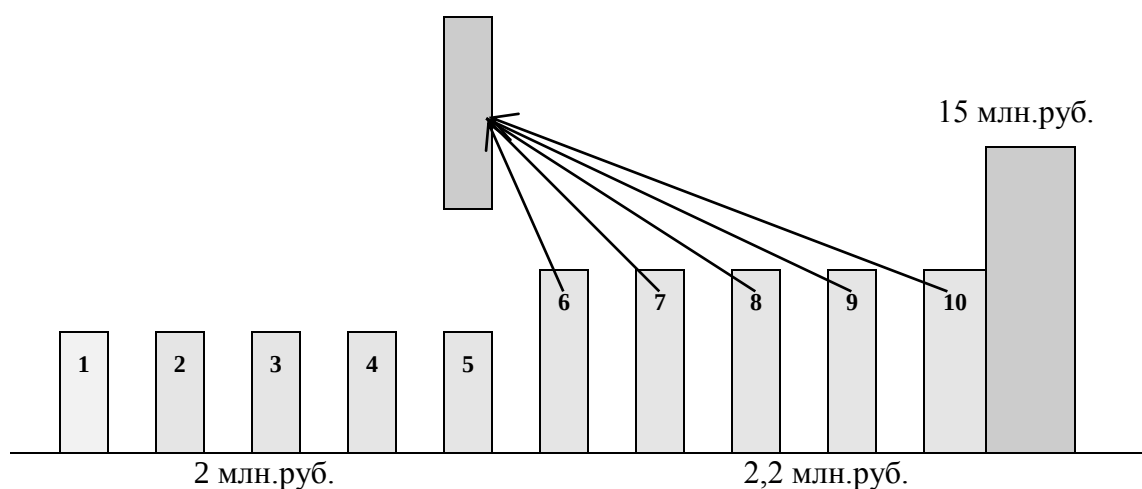


Рис. 10. Графическое изображение условия задачи

Шестая функция сложного процента - взнос на амортизацию Единицы (фактор взноса на амортизацию капитала)

Определение: Величина необходимых авансовых или обычных платежей (взносов), которая *оплатит* проценты и обеспечит полное погашение и возврат инвестиции в одну денежную единицу в течение определенного количества временных периодов, определяется процентной ставкой.

Обычный взнос на амортизацию

$$PMT = \frac{PV * i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

$$PMT = \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}} = \frac{1}{a(n, i)}$$

Авансовый взнос на амортизацию

$$PMT = \frac{PV \cdot i}{(i+1) - (1+i)^{-(n-1)}} = \frac{PV}{a^a(n,i)}$$

$$PMT = \frac{i}{(i+1) - (1+i)^{-(n-1)}} = \frac{1}{a^a(n,i)}$$

Таблица 5

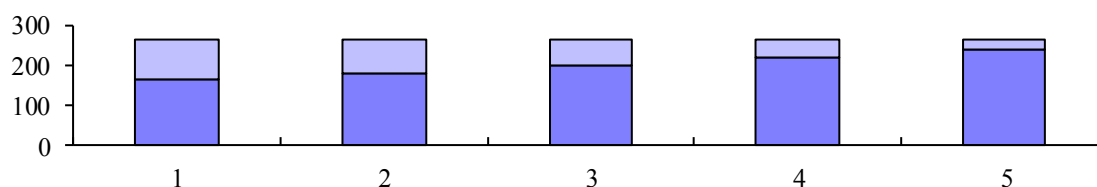
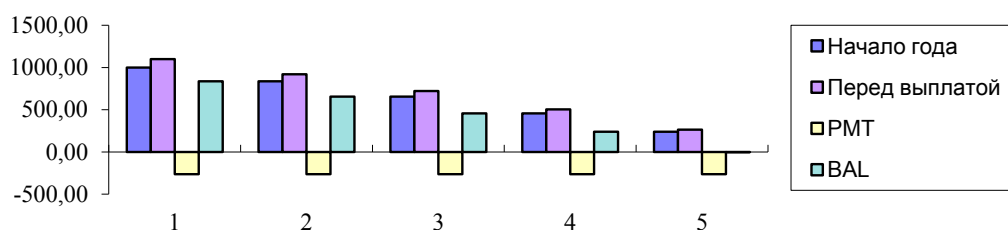
Год	Остаток долга на начало года	Сумма % в деньгах INT	Долг на 31 декабря	Взнос	Погашение основной суммы PRN	Остаток на конец года Bal
1	1000,00	100,00	1100,00	263,80	163,80	836,20
2	836,20	83,62	919,82	263,80	180,18	656,02
3	656,02	65,60	721,62	263,80	198,20	457,82
4	457,82	45,78	503,60	263,80	218,02	239,80
5	239,80	23,98	263,78	263,80	239,82	-0,02

Основные термины амортизационного процесса:

Bal (от англ. *balance*) -остаток основной суммы долга по кредиту.

PRN (от англ. *principal* основной) - платеж по основной сумме.

INT (от англ. *interest*) - платеж по процентам.



Утверждение: n-периодный взнос на амортизацию Единицы равен сумме n-периодного ФФВ и ставки процента.

$$1/a(n,i) = SFF(n,i) + i$$

Сводная таблица шести функций сложного процента

1	$FV = PV(1+i)^n$
2	$FV = PMT \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] = PMT * S(n, i)$
2a	$FV = PMT * \left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1 \right] = PMT * S^a(n, i)$
3	$PMT = \frac{FV * i}{(1+i)^n - 1} = FV * \frac{1}{S(n, i)} = FV * SFF(n, i)$
3a	$PMT = \frac{FV * i}{(1+i)^{n+1} - (1+i)} = FV * \frac{1}{S^a(n, i)} = FV * SFF^a(n, i)$
4	$PV = FV / (1+i)^n$
5	$PV = PMT \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] = PMT * a(n, i)$
5a	$PV = PMT \left[\frac{1 - (1+i)^{-(n+1)}}{i} + 1 \right] = PMT * a^a(n, i)$
6	$PMT = \frac{PV * i}{1 - (1+i)^{-n}} = PV * \frac{1}{a(n, i)}$
6a	$PMT = \frac{PV * i}{(1+i) - (1+i)^{-(n+1)}} = PV * \frac{1}{a^a(n, i)}$

Задачи для самостоятельного решения

1. До какой величины возрастет первоначальный вклад в 1 200 руб. за 3 года по ставке 82% годовых?

Варианты ответа: А) 1 200 Б) 3 200 В) 7 234 Г) 8 560.

2. В связи с дефицитом бюджета заработная плата в 500 000 рублей будет выплачена работнику с опозданием на 2 месяца. Какова ее текущая стоимость при 5%-й ежемесячной ставке?

Варианты ответа: А) 0 Б) 453 515 В) 551 250 Г) 422 513.

3. Инвестор полагает, что через четыре года сможет продать застройщику земельный массив площадью 100 гектар по цене \$ 10 000 за гектар. Если не брать в расчет издержки по владению и продаже, то какая цена, оплаченная сегодня, позволит инвестору получить накапливаемый ежегодный доход в 12 %?

Варианты ответа: А) 620 260 Б) 620 620 В) 653 518 Г) 635 518.

4. Г-н Петров только что купил квартиру, заплатив за нее \$ 18 000. Он предполагает, что можно сдать эту квартиру в аренду на 10 лет за \$ 2 000 в год. Арендный платеж должен вноситься в конце каждого года. Он также считает, что сможет в конце 10-го года продать недвижимость за \$ 40 000. Какую цену следовало заплатить г-ну Петрову за недвижимость, чтобы получить отдачу в 15 %?

Варианты ответа: А) 19 925 Б) 9 887 В) 18 000 Г) 18 635.

5. Каков размер ежегодного платежа по ипотечному кредиту в \$ 100 000 при ставке 12 %, ежегодных выплатах и 25-летнем сроке погашения?

Варианты ответа: А) \$ 12 693 Б) \$ 10 000 В) \$ 12 750 Г) \$ 13 751.

6. Г-жа Иванова откладывает деньги к выходу на пенсию через 10 лет. Она только что внесла 500 000 рублей на счет в пенсионном фонде, который ежегодно будет начислять 50 % . Она собирается откладывать такую же сумму в начале каждого года до самого выхода на пенсию в конце 10-го года. Какую сумму она рассчитывает получить к моменту выхода на пенсию?

Варианты ответа: А) 84 997 559 Б) 1 597 286 178

В) 100 000 000 Г) 56 665 040.

7. Какова текущая стоимость чистого дохода в \$ 10 000, получаемого в начале каждого года на протяжении 40 лет и дисконтируемого по ставке 10 %?

Варианты ответа: А) 10 000 Б) 68 536 В) 97 791 Г) 107 570.

8. Чтобы накопить на покупку новой квартиры, потенциальный покупатель может откладывать ежемесячно (в конце месяца) на определенный счет 500 долларов под 6 % годовых. Какую квартиру он сможет оплатить через 5 лет?

Варианты ответа: А) 20 000 Б) 25 000 В) 26 000 Г) 30 000.

Библиографический список

1. Саркисов А.С. Финансовая математика. Теория процентов. – М.: Ленанд, 2014. – 272 с.
2. Тебекин А.В. Методы принятия управленческих решений: учебник для вузов. – М.: Юрайт, 2016. – 432 с.
3. Чуйко А.С., Шершнев В.Г. Финансовая математика: учебное пособие. – М.: Инфра-М, 2016. – 160 с.
4. Якубова Д.Н., Бакулина А.А., Багинова О.М., Королев И.В. Основы оценки стоимости имущества. – М.: КноРус, 2016. – 272 с.

Оглавление

Введение.....	3
Основные понятия.....	3
Первая функция сложного процента – аккумулялированная (accumulate-накапливать) сумма Единицы (фактор накопления капитала)	4
Вторая функция сложного процента – накопление Единицы за n периодов (фактор будущей стоимости равномерных накоплений капитала)	5
Третья функция сложного процента – n-периодный Фактор Фонда Возмещения (ФФВ) капитала	6
Четвертая функция сложного процента – текущая стоимость будущей Единицы (фактор текущей стоимости будущего капитала – фактор реверсии).....	8
Пятая функция сложного процента – текущая стоимость n-периодного аннуитета Единицы (фактор текущей стоимости аннуитета платежей/взносов).....	9
Шестая функция сложного процента – взнос на амортизацию Единицы (фактор взноса на амортизацию капитала).....	12
Сводная таблица шести функций сложного процента.....	14
Задачи для самостоятельного решения.....	15
Библиографический список.....	17

Учебное издание

Елена Анатольевна Колесникович

Финансовая математика в оценке собственности

Учебно-методическое пособие

Редактор и корректор В.А. Басова

Техн. редактор Л.Я. Титова

Тем.план 2017 г., поз.38

Подп. к печати 28.06.17. Формат 60x84/16. Бумага тип. №1.

Печать офсетная. Объем 1,25 печ. л., 1,25 уч.-изд.л.

Тираж 100 экз. Изд. №38. Цена «С». Заказ

Ризограф Высшей школы технологии и энергетики СПбГУПТД,
198095, СПб., ул. Ивана Черных, 4.