

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»

---

**ВЫСШАЯ ШКОЛА ТЕХНОЛОГИИ И ЭНЕРГЕТИКИ**

**Кафедра физики**

# **Ф И З И К А**

**Ч.П. КОЛЕБАНИЯ. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА**

**Индивидуальные задания  
для расчетных работ студентов**

*Учебно-методическое пособие  
для бакалавров всех направлений*

**Санкт-Петербург  
2018**

УДК 53 (075.8)  
ББК 22.3я7  
Ф 503

ФИЗИКА. Ч. II. Колебания. Молекулярная физика. Индивидуальные задания для расчетных работ студентов: учебно-методическое пособие/ сост.: Е.А. Яшкевич, М.Н. Полянский.

Пособие содержит индивидуальные задания по разделам «Колебания» и «Молекулярная физика». Предназначено для студентов бакалавриата всех направлений очной формы обучения.

Рецензент: профессор кафедры физики ВШТЭ СПбГУПТД,  
канд. физ.-мат. наук А.Л. Ашкалунин.

Подготовлено и рекомендовано к печати кафедрой физики ВШТЭ СПбГУПТД (протокол №3 от 16.11.2018 г.).

Утверждено к изданию методической комиссией института энергетики и автоматизации ВШТЭ СПбГУПТД (протокол ).

©Высшая школа технологии и энергетики  
СПбГУПТД, 2018

## Предисловие

Задание выполняется в отдельной тетради, каждая задача начинается с новой страницы. На обложке тетради пишется фамилия студента, номер группы и номер варианта. Студент выполняет по одной задаче из каждой темы. Вторая цифра варианта обозначает номер задачи, а первая цифра – номер варианта условия задачи в таблице. Условие задачи переписывается в том варианте, в котором его следует решать. Если наименование величин не указано, то они даны в системе СИ.

Все необходимые графики и чертежи выполняются точно в выбранном масштабе. Решение должно быть полным. Сначала задача решается в общем виде.

При защите задания студент должен уметь объяснить решение любой задачи, знать и понимать физические законы и физические величины, которыми он пользовался.

## ТЕМА 1. КИНЕМАТИКА КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Гармоническими колебаниями называется такое движение, при котором координата (смещение) меняется со временем по закону синуса или косинуса:  $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$  или  $x(= A\cos(\omega t + \varphi_0))$ .

Здесь  $x$  – смещение тела от положения равновесия,  $A$  – амплитуда колебаний, т.е. наибольшее отклонение тела от положения равновесия;

$\varphi = \omega t + \varphi_0$  – фаза колебаний,  $\varphi_0$  – начальная фаза колебаний,  $\omega$  – циклическая частота. Значение  $x$  в произвольный момент времени определяется значением фазы колебаний.

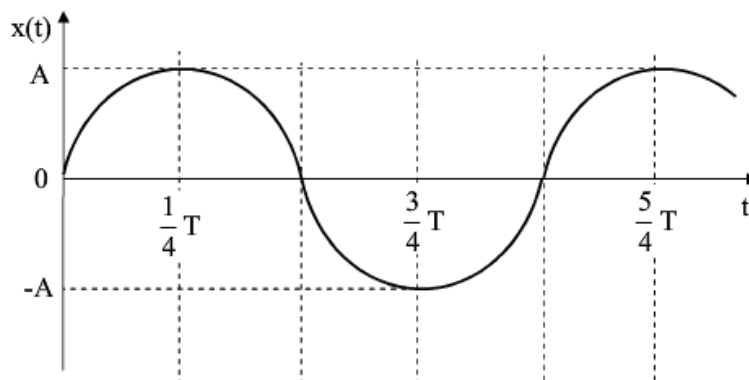


Рис. 1. Зависимость координаты от времени при гармонических колебаниях

Время, за которое совершается одно колебание, называется периодом  $T$ . Число полных колебаний за единицу времени называют частотой колебаний  $\nu$ . Период и частота связаны соотношением:

$$T = \frac{1}{\nu}.$$

Циклическая частота – число полных колебаний за  $2\pi$  секунд:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

Дифференцируя  $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$  по времени, можно найти скорость  $v$ , а дифференцируя скорость по времени, – ускорение  $a$  при гармонических колебаниях (рис. 2).

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0), \quad a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0).$$

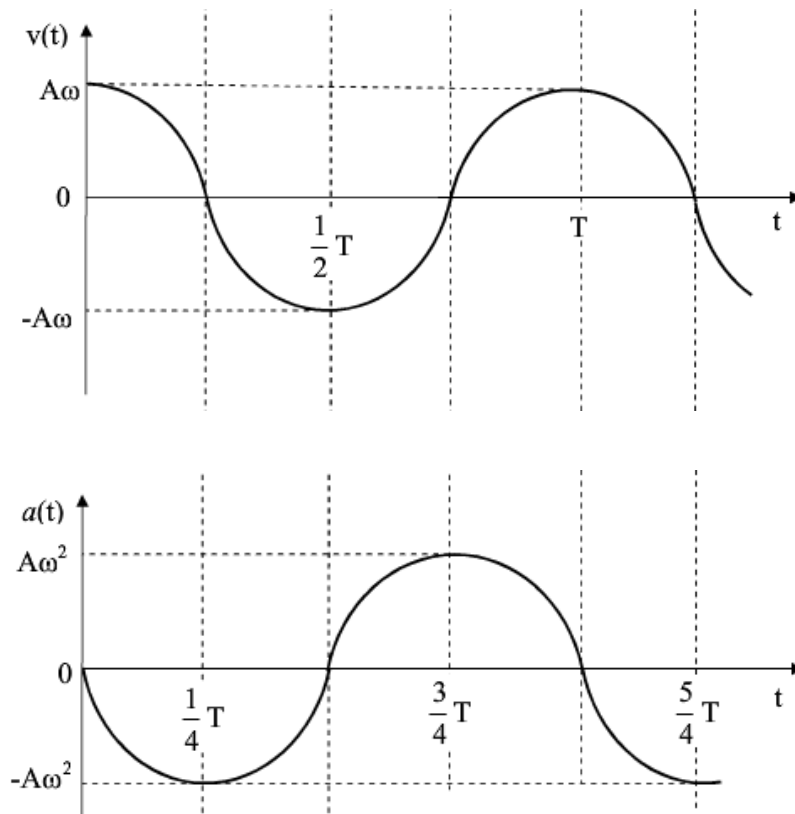


Рис. 2. Зависимость от времени скорости и ускорения

Удобно изображать гармонические колебания с помощью *векторной диаграммы* (рис. 3). При этом длина вектора равна амплитуде колебаний  $A$ , а угол с осью  $ox$  равен начальной фазе  $\alpha$ . Если вращать этот вектор с угловой скоростью  $\omega$ , то его проекция на ось  $X$  будет совершать гармонические колебания с параметрами  $A$ ,  $\omega$ ,  $\alpha$ .

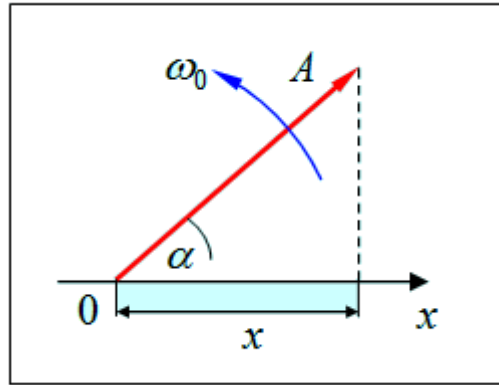


Рис. 3. Векторная диаграмма

Под сложением колебаний понимают нахождение уравнения результирующих колебаний системы в тех случаях, когда эта система одновременно участвует в нескольких колебательных процессах. Различают два предельных случая: сложение колебаний одинакового направления и сложение взаимно перпендикулярных колебаний.

### Сложение двух одинаково направленных гармонических колебаний

Пусть материальная точка одновременно участвует в двух гармонических колебаниях с одинаковым периодом и циклической частотой, но с различными начальными фазами и амплитудами:

$$x_1 = A_1 \cos \varphi_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{01}),$$

$$x_2 = A_2 \cos \varphi_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{02}).$$

Сложение колебаний можно произвести, воспользовавшись методом диаграмм (рис. 4). На векторной диаграмме суммарное колебание изображается вектором, равным сумме векторов, изображающих колебания  $x_1$  и  $x_2$ . Амплитуду и начальную фазу результирующего колебания можно найти, применив тригонометрические соотношения и теорему косинусов:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1),$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{A_1 \sin \varphi_{01} + A_2 \sin \varphi_{02}}{A_1 \cos \varphi_{01} + A_2 \cos \varphi_{02}}.$$

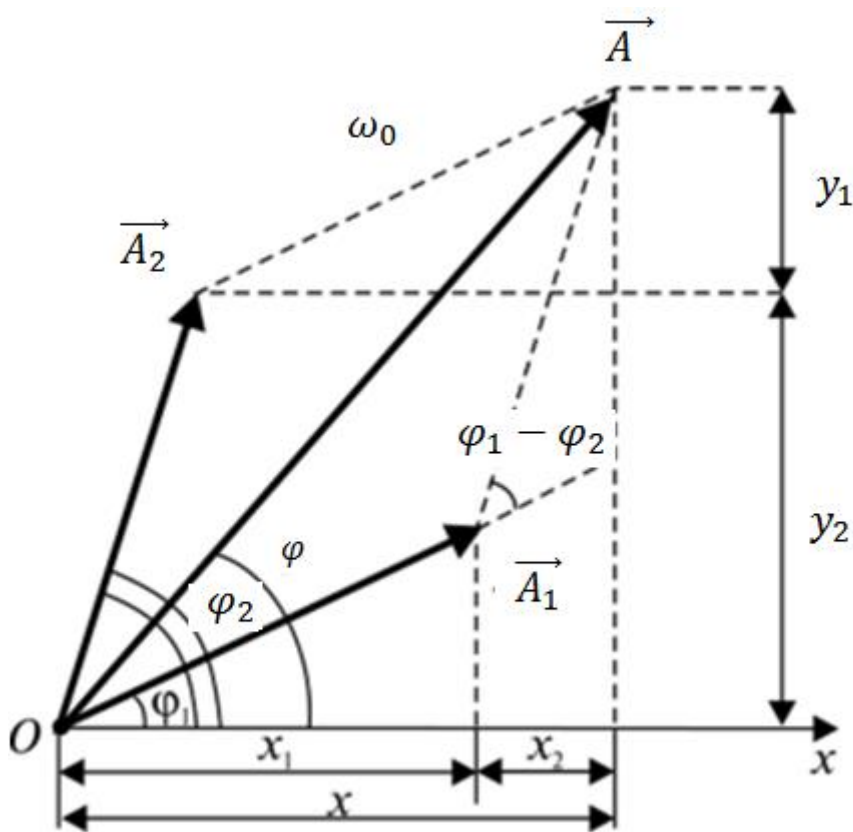


Рис. 4. Векторная диаграмма. Сложение двух колебаний

### Сложение взаимно перпендикулярных колебаний одинаковой частоты

Пусть точка одновременно колеблется во взаимно перпендикулярных направлениях таким образом, что координаты точки меняются со временем по закону  $x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$  и  $y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ . В общем случае траектория не замкнута. Если частоты колебаний относятся как целые числа  $\omega_1/\omega_2 = n_1/n_2$ , то точка описывает замкнутую траекторию. Эти замкнутые траектории называются фигурами Лиссажу. При равных частотах фигуры Лиссажу – эллипс, оси которого зависят от амплитуд и разности фаз колебаний. В частных случаях эллипс вырождается в отрезок прямой линии. Так как  $-A_1 \leq x \leq A_1$ , а  $-A_2 \leq y \leq A_2$ , то фигуры Лиссажу всегда вписаны в прямоугольник, ограниченный прямыми  $x = \pm A_1$  и  $y = \pm A_2$  (рис. 5).

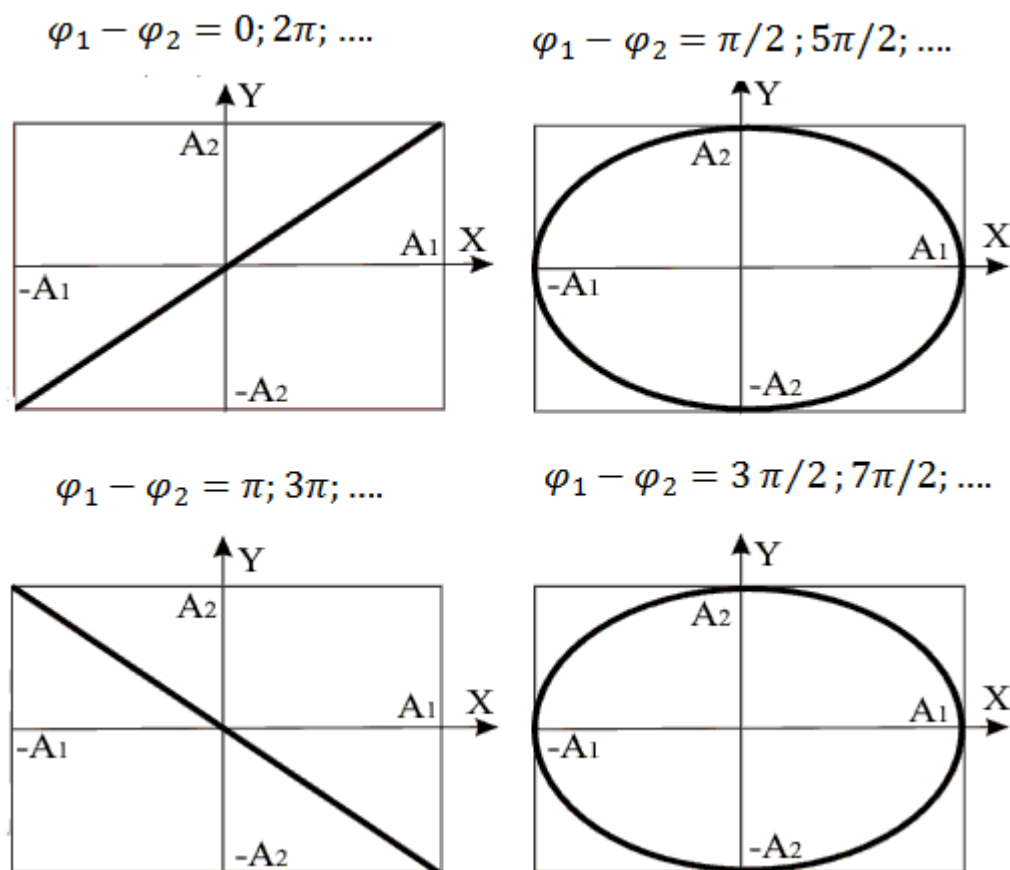


Рис. 5. Фигуры Лиссажу

### ***Задание 1.1. Построение графиков колебаний***

Построить графики смещений двух гармонических колебаний  $x_1 = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ ,  $x_2 = B \cos(\omega t + \psi_0)$ . Обе кривые  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  строятся на одном графике. Здесь же построить график суммарного колебания  $x = x_1 + x_2$ . По графику  $x(t)$  определить амплитуду  $C$  и начальную фазу суммарного колебания. Графики строятся на листе миллиметровки  $200 \times 290$  мм. Время откладывается в долях периода на оси абсцисс от  $-0,5T$  до  $1,5T$ . Масштаб по оси времени: один период – 12 см. Масштаб по оси ординат: 1м – 5см.

Данные берутся из табл. 3. Первая цифра варианта означает номер столбца, вторая – номер строки.

Для построения графиков следует сначала заполнить табл. 1. Точки по оси времени берутся через  $1/24$  периода.

Таблица 1

$t/T$	$\varphi$	$\cos \varphi$	$x_1$	$\psi$	$\cos \psi$	$x_2$	$x=x_1+x_2$
-12/24							
-11/24							
-10/24							
...							
...							

$$\varphi = 2\pi t/T + \varphi_0 = 360^\circ t/T + \varphi_0$$

$$\psi = 360^\circ t/T + \psi_0$$

### Задание 1.2. Векторное сложение колебаний

Построить векторные диаграммы колебаний  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  из задания 1.1 и по ним построить вектор, изображающий суммарное колебание. По построенному вектору определить амплитуду  $C$  и начальную фазу  $\alpha_0$  суммарного колебания.

Рассчитать амплитуду  $C$  и фазу  $\alpha_0$  суммарного колебания по формулам сложения колебаний. Все результаты занести в табл. 2. Для построения векторной диаграммы провести окружности с радиусами от 1 до 10 см через 1 см. На средней окружности отметить углы через  $15^\circ$ .

Масштабы по амплитуде такие же, как в задании 1.1: 1м – 5 см.

Таблица 2

Метод	$C, м$	$\alpha_0$
Графический		
Векторная диаграмма		
Аналитический		

### Задание 1.3. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Построить траекторию движения точки, полученную сложением колебаний  $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$  и  $y = B \cos(\omega t + \psi_0)$ . Данные те же, что в задании 1.1. Траектория строится на листе миллиметровки 200х290. Масштабы по осям, как в задании 1.1: 1м – 5см. Для моментов времени  $t=0, 1/24T, 2/24T, \dots, T$  наносятся точки с



координатами  $x=x_1$  и  $y=x_2$ , где  $x_1$  и  $x_2$  берутся из табл. 1. Точки нумеруются 0, 1, 2, ..., 24. Точка 24 должна совпасть с точкой 0. По точкам проводится кривая и указывается направление движения. На графике следует построить прямоугольник, образованный прямыми  $x=\pm A$  и  $y=\pm B$ .

Таблица 3

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	A $\varphi_0$ B $\psi_0$	1,5 $30^0$ 0,6 $90^0$	0,8 $0^0$ 0,7 $30^0$	1,2 $15^0$ 0,9 $45^0$	1,4 $-15^0$ 1,1 $105^0$	0,6 $-30^0$ 0,8 $0^0$	0,7 $45^0$ 1,2 $15^0$	0,9 $60^0$ 1,0 $-75^0$	1,1 $-90^0$ 1,6 $-60^0$	0,8 $180^0$ 1,4 $60^0$
1	1,2 $180^0$ 1,5 $30^0$	1,0 $75^0$ 0,8 $75^0$	1,6 $90^0$ 0,6 $-90^0$	1,4 $105^0$ 0,9 $-45^0$	1,5 $45^0$ 1,3 $-45^0$	0,8 $-45^0$ 1,2 $120^0$	0,6 $120^0$ 1,6 $-30^0$	0,9 $135^0$ 1,5 $-15^0$	1,3 $150^0$ 0,9 $90^0$	1,6 $-75^0$ 0,7 $75^0$
2	1,2 $-90^0$ 1,0 $0^0$	1,5 $-30^0$ 0,8 $0^0$	1,8 $135^0$ 0,5 $45^0$	1,4 $150^0$ 0,7 $-90^0$	0,8 $90^0$ 0,9 $-60^0$	2,0 $90^0$ 0,8 $-90^0$	1,7 $-60^0$ 1,2 $0^0$	0,8 $-135^0$ 1,0 $105^0$	0,7 $-75^0$ 1,6 $-30^0$	1,2 $-90^0$ 1,4 $0^0$
3	0,6 $-75^0$ 0,9 $-45^0$	1,1 $150^0$ 0,7 $180^0$	1,0 $135^0$ 0,5 $150^0$	1,5 $-120^0$ 0,8 $30^0$	1,4 $150^0$ 1,0 $-30^0$	0,9 $165^0$ 0,7 $-45^0$	1,3 $105^0$ 0,9 $60^0$	1,6 $90^0$ 1,0 $180^0$	0,8 $75^0$ 1,6 $0^0$	1,2 $180^0$ 1,2 $30^0$
4	1,7 $60^0$ 1,3 $-60^0$	1,3 $-45$ 0,9 $15^0$	1,5 $45$ 0,6 $105^0$	1,1 $-30^0$ 0,8 $-60^0$	0,6 $15^0$ 1,5 $60^0$	0,9 $-15^0$ 1,4 $45^0$	2,0 $30^0$ 0,6 $150^0$	0,8 $0^0$ 0,7 $-30^0$	1,2 $-60^0$ 0,9 $30^0$	0,7 $180^0$ 1,1 $180^0$
5	0,8 $-75^0$ 1,1 $180^0$	0,6 $105^0$ 0,9 $105^0$	0,9 $-15^0$ 0,7 $15^0$	1,3 $-45^0$ 0,6 $-60^0$	1,6 $0^0$ 1,4 $120^0$	1,2 $0^0$ 0,8 $0^0$	1,5 $15^0$ 0,6 $30^0$	1,8 $60^0$ 0,9 $120^0$	1,4 $45^0$ 1,3 $-45^0$	0,8 $-120^0$ 0,8 $0^0$
6	1,0 $135^0$ 1,6 $-15^0$	1,5 $120^0$ 1,0 $30^0$	0,8 $135^0$ 1,5 $45^0$	1,2 $-75^0$ 0,9 $75^0$	1,4 $150^0$ 0,9 $75^0$	0,6 $180^0$ 0,9 $75^0$	0,7 $105^0$ 0,9 $135^0$	0,9 $90^0$ 0,9 $75^0$	1,1 $150^0$ 0,9 $75^0$	0,8 $135^0$ 0,9 $75^0$
7	1,2 $120^0$ 1,4 $0^0$	1,0 $-45^0$ 1,6 $45^0$	1,6 $15^0$ 1,2 $105^0$	1,4 $-30^0$ 0,8 $60^0$	1,5 $-60^0$ 1,1 $90^0$	1,6 $60^0$ 1,4 $90^0$	1,0 $-90^0$ 1,6 $0^0$	1,2 $45^0$ 1,0 $-15^0$	0,8 $15^0$ 1,2 $0^0$	1,1 $75^0$ 0,8 $45^0$

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	0,8	0,7	0,6	1,4	1,2	0,8	1,5	1,0	0,8	1,4
	90°	-15°	-30°	120°	-45°	-90°	75°	30°	-60°	-75°
	1,1	0,9	0,7	0,6	1,4	0,9	0,7	0,5	0,8	1,0
	30°	-45°	30°	90°	60°	-60°	-15°	0°	-30°	15°
9	1,8	1,5	1,2	1,6	1,3	0,9	0,6	0,8	1,5	1,4
	15°	105°	45°	-105°	180°	150°	-120°	135°	-150°	-120°
	0,7	0,9	1,5	1,3	0,9	0,6	0,8	1,6	1,0	1,2
	-165°	-45°	90	45°	90°	120°	180°	-45°	-60°	30°

## ТЕМА 2. ДИНАМИКА КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим колебания, совершающиеся под действием упругой (квазиупругой) силы  $F_{\text{упр}} = -kx$ . Примером такой системы служит пружинный маятник – груз массы  $m$ , подвешенный на упругой пружине жесткостью  $k$ . По второму закону Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{упр}}, \quad (1)$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \quad (2)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (3)$$

Выражение (3) является дифференциальным уравнением гармонических колебаний, которые совершаются под действием квазиупругой силы. Решение данного уравнения записывается в виде  $x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$ , где циклическая частота колебаний  $\omega = \sqrt{k/m}$  и период  $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ .

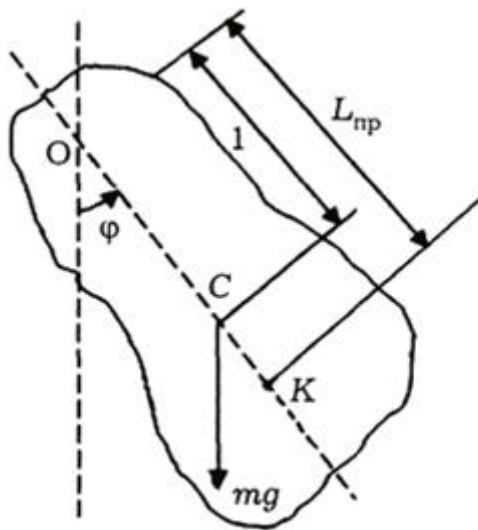


Рис. 6. Физический маятник

Физический маятник – твердое тело, которое может вращаться под действием силы тяжести вокруг неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через центр тяжести тела. На рис. 6 изображен физический маятник, центр тяжести которого

находится в точке С, а точка О называется точкой подвеса маятника. При отклонении маятника на угол  $\varphi$  сила тяжести создает момент, численно равный  $mglsin\varphi$  и стремящийся вернуть маятник в положение равновесия. Если  $I$  – момент инерции маятника относительно оси вращения, то в соответствии с основным законом динамики вращательного движения, уравнение движения физического маятника:

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mglsin\varphi. \quad (4)$$

При малых колебаниях маятника  $sin\varphi \approx \varphi$ , и можно считать, что уравнение движения маятника:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgl}{I} \varphi = 0. \quad (5)$$

В отсутствие трения, малые колебания физического маятника являются гармоническими, а циклическая частота и период колебаний определяются формулами:

$$\omega = \sqrt{mgl/I} \quad \text{и} \quad T = 2\pi\sqrt{I/(mgl)}. \quad (6)$$

Приведенной длиной физического маятника называется длина математического маятника, имеющего такой же период колебаний, что и данный физический маятник:

$$L_{\text{пр}} = \frac{I}{ml}. \quad (7)$$

Математический маятник – материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити и совершающая колебания в вертикальной плоскости под действием силы тяжести. Циклическая частота и период колебаний математического маятника длиной  $l$  определяются формулами:

$$\omega = \sqrt{g/l} \quad \text{и} \quad T = 2\pi\sqrt{l/g}. \quad (8)$$

Кинетическая энергия материальной точки, совершающей прямолинейные гармонические колебания,

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)}{2}. \quad (9)$$

Потенциальная энергия материальной точки, совершающей прямолинейные гармонические колебания под действием квазиупругой силы,

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)}{2}. \quad (10)$$

Полная механическая энергия материальной точки не изменяется при отсутствии сил сопротивления и складывается из потенциальной и кинетической энергии точки в данный момент времени:

$$E = E_k + E_p = E_k^{\max} = E_p^{\max} = \frac{m v_{\max}^2}{2} = \frac{k x_{\max}^2}{2}. \quad (11)$$

Свободные колебания реальных систем всегда затухают из-за трения, сопротивления окружающей среды и т.д. Рассмотрим свободные колебания, которые совершаются под действием упругой (квазиупругой) силы и силы сопротивления среды. По второму закону Ньютона

$$m \vec{a} = \vec{F}_{\text{упр}} + \vec{F}_{\text{сопр}}, \quad (12)$$

$$F_{\text{упр}} = -kx \text{ и } F_{\text{сопр}} = -r v, \quad (13)$$

где  $k$  – коэффициент квазиупругой силы,  $r$  – коэффициент сопротивления,  $x$ ,  $v$  – смещение и скорость колеблющейся точки. Подставляя (13) в выражение (12), получим  $ma = -kx - rv$ , или в дифференциальной форме:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0. \quad (14)$$

Уравнение (14) называется дифференциальным уравнением свободных затухающих колебаний. Здесь  $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ , где  $\omega_0$  – круговая, или циклическая, частота незатухающих колебаний;  $\frac{r}{2m} = \beta$  – коэффициент затухания. Решение данного уравнения записывается в виде:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_3 t + \varphi_0), \quad (15)$$

где  $\omega_3 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  – частота затухающих колебаний,  $A = A_0 e^{-\beta t}$  – амплитуда затухающих колебаний. Чем больше коэффициент затухания, тем быстрее со временем уменьшается амплитуда затухающих колебаний (рис. 7).

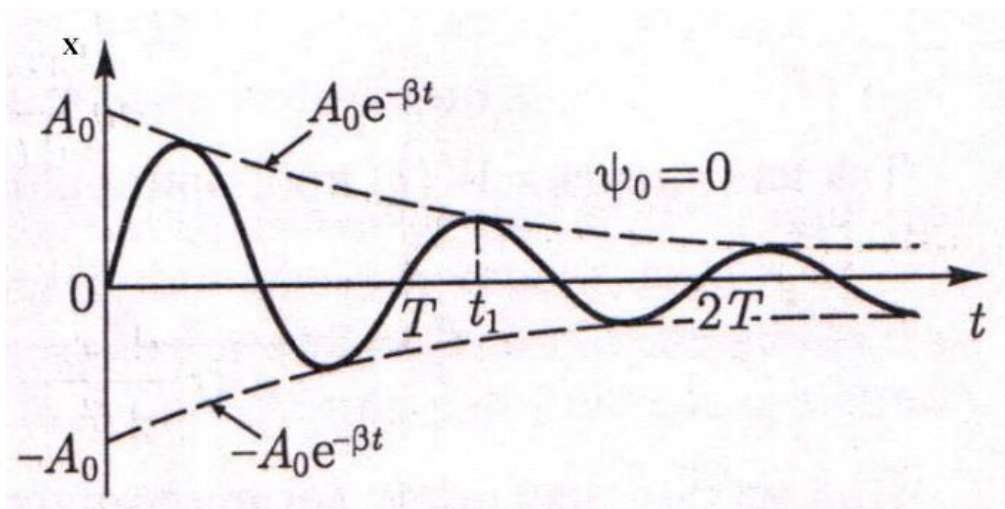


Рис. 7. Зависимость координаты от времени при затухающих колебаниях

Логарифмическим декрементом затухания называется безразмерная величина, равная натуральному логарифму отношения значений амплитуды затухающих колебаний в моменты времени  $t$  и  $t+T$ :

$$\delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \beta T. \quad (16)$$

## Задачи

**2.1.** Зависимость координаты от времени материальной точки массой  $m$ :  $x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$ . В момент времени  $t$  возвращающая сила, потенциальная, кинетическая и полная энергия точки:  $F$ ,  $E_p$ ,  $E_k$  и  $E$ . Максимальная возвращающая сила –  $F_m$ , период колебаний –  $T$ . Значения энергии даны в мкДж, силы – в мН.

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$A$ , см	2	-	4,5	5	10	-	5	2	-	5
$\omega$	$\pi/6$	$\pi$	$\pi$	2	$\pi/8$	$\pi$	$\pi/5$	$\pi/2$	-	$\pi/2$
$t$	-	-	0,25	-	-	-	0,1	-	-	-
$\varphi_0$	$\pi/8$	-	0	0	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/4$
$m$ , г	5	10	25	-	16	-	10	-	-	2

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$E$	-	100	-	-	-	30	-	-	30	-
$F$	-	-	-	5	-	-	-	-	-	9,9
$E_p$	-	-	-	0,1	-	-	-	7,6	0,75	9,9
$F_m$	-	-	-	-	-	1,5	-	1,48	1,5	-
Найти	$F_m, E$	$A, F_m$	$F, E_p, E_K$	$t, E_K$	$F_m, E$	$A, T$	$F_m, E_k$	$t, k, m$	$t, A, \omega$	$x, E, t$

**2.2.** Гирька массой  $m$ , подвешенная на пружине, колеблется вертикально с периодом  $T$ ; коэффициент упругости пружины –  $k$ ; циклическая частота колебаний –  $\omega$ ; полная энергия колеблющейся гирьки –  $E$ ; амплитуда колебаний –  $A$ ; максимальная возвращающая сила –  $F_m$ .

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$m$	0,2	-	0,15	0,2	0,4	0,25	0,12	0,5	-	0,1
$T$	0,4	0,1	0,01	-	2,0	-	-	0,3	2	-
$k$	-	80	-	200	-	-	100	-	-	-
$E$	0,02	-	-	-	0,03	0,02	0,02	-	-	0,01
$A, \text{ см}$	-	4	0,8	-	-	1,4	-	3,0	2,5	-
$F_m$	-	-	-	3,0	-	-	-	-	2	0,5
Найти	$k, A$	$E, m$	$E, k$	$E, T$	$A, \omega$	$k, \omega$	$T, A$	$k, E$	$m, E$	$T, A$

**2.3.** Материальная точка массой  $m$  совершает гармонические колебания. В некоторый момент времени  $t$  возвращающая сила, кинетическая, потенциальная и полная энергия точки –  $F, E_k, E_p$  и  $E$ , смещение и скорость –  $x$  и  $v$ . Период колебаний –  $T$ , жесткость пружины –  $k$ . Написать уравнение этих колебаний.

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$t$	1,2	0,7	2,3	1,6	3,2	0,8	0,3	1,4	2,8	1,5
$m$	0,4	-	0,8	-	1,4	-	0,2	-	1,2	0,6
$T$	-	2,0	-	0,5	1,0	-	-	-	4,0	-
$k$	16	-	-	-	-	-	10	-	-	-

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$F$	-	-	8,0	-	-	-	-	6,0	0,4	-
$E$	-	0,25	-	-	0,4	-	0,2	0,25	-	0,2
$E_k$	-	0,15	-	-	-	0,3	-	-	0,15	0,14
$E_p$	-	-	0,4	-	-	0,5	-	-	-	-
$x$	0,08	-	-	0,05	0,1	0,12	0,06	0,05	-	0,14
$v$	0,50	-	1,4	0,4	-	1,0	-	0,8	-	-

**2.4.** Подвешенная к пружине чашка весов с гирями колеблется в вертикальном направлении с периодом колебаний  $T_1$ . После того как на чашку весов положили добавочную гирю, период колебаний увеличился до  $T_2$ . Пружина удлинилась при этом на  $\Delta x$ . Масса чашек с гирями –  $m_1$  и  $m_2$ . Жесткость пружины –  $k$ .

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T_1$	0,5	0,4	-	0,4	-	1	0,7	-	0,5	-
$T_2$	0,6	-	1	-	-	1,3	-	6,28	-	-
$\Delta x$	-	0,05	0,04	0,05	0,02	-	-	-	-	0,05
$m_1$	-	-	-	-	0,12	-	0,32	4	0,25	-
$m_2$	-	-	-	-	0,16	-	0,57	9	0,4	0,25
$k$	-	-	-	-	-	40	-	-	-	9,8
Найти	$\Delta x$	$T_2$	$T_1$	$T_2$	$T_1, T_2$	$m_1, \Delta x$	$\Delta x, T_2$	$T_1, k$	$\Delta x$	$T_1, T_2$

**2.5.** Тело массой  $m$  совершает затухающие колебания. В некоторый момент времени смещение, скорость и ускорение тела –  $x$ ,  $v$  и  $a$ , упругая сила, сила сопротивления и полная сила –  $F_y$ ,  $F_c$  и  $F$ .  $k$  – коэффициент жесткости пружины,  $r$  – коэффициент сопротивления,  $\omega_3$ ,  $T_3$  – частота и период затухающих колебаний.

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$m$	0,2	0,3	0,25	-	0,4	-	-	1,5	0,1	0,4
$a$	-	0,8	-	-	2,5	-2	-	2	-	3
$k$	80	20	-	30	12	20	50	20	-	10
$x, \text{см}$	-5	4	6	-	5	3	-4	-12	5	-8

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$v$	1,8	-	-	2,0	-	1,2	2,0	-2,0	8	-0,2
$r$	0,5	-	-	0,4	-	0,25	0,3	-	-	-
$\omega_3$	-	-	4	-	-	-	-	-	0,6	-
$\beta$	-	-	1,7	-	0,5	-	-	-	0,8	-
$F$	-	-	-	1,2	-	-	-	-	-	-
Найти	$a$	$F_c$	$F_y$	$x$	$v$	$m$	$F$	$\beta$	$a$	$T_3$

**2.6.** Найти приведенную длину физического маятника и период его колебаний. Ось проходит перпендикулярно плоскости тела. Если ось проходит вне тела, то тело подвешено на невесомой нити. Тела – шар, диск, обруч, стержень.

№	Тело	$R, l$	Место нахождения оси колебаний
0	диск	2	край диска,
1	обруч	5	точка обруча,
2	стерж.	4	конец стержня,
3	диск	3	середина радиуса,
4	стерж.	6	точка, удаленная на $1/6 l$ от конца стержня,
5	шар	2	точка, удаленная от поверхности шара на $2R$ ,
6	диск	2	точка на расстоянии $1/3 R$ от края диска,
7	стерж.	8	точка на расстоянии $2 m$ от конца стержня,
8	шар	3	точка, удаленная от центра шара на $4R$ ,
9	стерж.	5	точка на расстоянии $3 m$ от ближнего конца

**2.7.** Тело массой  $m$  совершает затухающие колебания  $x = 0,2e^{-6t} \cos 10t$ . В некоторый момент времени  $t$  смещение –  $x$ , кинетическая, потенциальная и полная энергия тела –  $E_k, E_p, E$ ; силы упругая, сопротивления и суммарная –  $F_y, F_c, F$ .  $k$  – коэффициент жесткости,  $r$  – коэффициент сопротивления.

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$t$	0,1	0,12	0,05	0,01	0,08	0,1	-	-	0,1	0,05
$m$	0,5	0,5	-	-	-	-	0,3	-	-	-



№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$k$	-	-	100	-	-	100	-	100	-	-
$r$	-	-	-	3	6	-	-	-	-	-
$F_y$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-2
$F_c$	-	-	-	-	-	-	-5	-	2	-
$F$	-	-	-	-	-	-	15	-	-	-
Найти	$F_y$	$F_c$	$E_k$	$E_{\text{п}}$	$E$	$F$	$x$	$r$	$m$	$F_c$

**2.8.** Математический маятник массой  $m$  и длиной  $l$  совершает гармонические колебания. В некоторый момент времени смещение от положения равновесия  $x$ , скорость  $v$ , тангенциальное ускорение  $a$ , возвращающая сила  $F$  (даны абсолютные величины); кинетическая, потенциальная и полная энергия  $E_k$ ,  $E_{\text{п}}$ ,  $E$ . Период и амплитуда колебаний маятника  $T$  и  $A$ . Энергия дана в мДж.

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$l$	2,0	5,0	-	3,0	-	-	-	4,0	2,5	2,0
$m$	-	0,4	5,0	-	-	-	0,5	0,6	2	-
$v$	-	-	-	-	-	1,4	-	-	-	0,7
$E_k$	-	-	-	-	-	0,6	-	-	-	2,0
$E_{\text{п}}$	-	-	-	-	50	-	12	-	-	-
$E$	-	64	-	-	-	-	-	80	-	-
$F$	3,0	-	-	-	4	0,6	-	-	-	2,5
$x$	0,15	0,03	0,07	0,2	-	0,03	0,1	-	0,15	-
$T$	-	-	3,14	-	-	-	-	-	-	-
Найти	$m$	$v$	$E_{\text{п}}$	$a$	$x$	$\omega$	$l$	$A$	$F$	$E_{\text{п}}$

**2.9.** Тело массой  $m$ , закрепленное на пружине жесткостью  $k$ , совершает колебания, описываемые одним из уравнений:

- 1)  $x = 0,07 \cos(6t + 0,52)$ ;      2)  $x = 0,03 \cos(3t + 0,8)$ ;
- 3)  $x = 0,05 \sin(8t + 0,31)$ ;      4)  $x = 0,12 \sin(5t + 0,4)$ ;
- 5)  $x = 0,06 \sin(4t + 0,7)$ .

Найти потенциальную и кинетическую энергию в момент времени  $t$ .

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>уравн.</i>	1	3	2	4	5	2	3	1	5	4
<i>k</i>	-	20	-	15	25	30	-	40	-	-
<i>m</i>	0,2	-	0,5	-	-	-	0,3	-	0,4	0,6
<i>t</i>	0,3	0,2	0,5	1,2	0,7	0,4	0,8	0,6	0,7	0,4

**2.10.** Тело массой  $m$  подвешено к пружине жесткостью  $k$  и совершает колебания с амплитудой  $A$ . Для некоторого момента времени  $t$  –  $x$  и  $v$  – смещение и скорость тела;  $E$ ,  $E_p$ ,  $E_k$  – полная, потенциальная и кинетическая энергия тела.  $T$  – период колебаний.  $F$  – сила, действующая на тело в этот момент времени.  $F_m$ ,  $v_m$  – максимальные значения силы и скорости.

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$A$	0,04	-	-	0,1	-	-	-	0,04	-	0,06
$k$	980	-	600	-	-	400	-	-	-	-
$E$	-	6	-	-	-	-	-	-	-	-
$E_p$	-	-	-	4	4	-	-	3	-	-
$E_k$	-	-	-	6	8	-	-	-	-	-
$x$	0,03	-	0,1	-	-	-	0,08	-	0,05	0,04
$v$	-	1,4	2	-	-	2	2	2	3	-
$m$	-	2	2	0,5	-	3	1,5	2	0,6	-
$F$	-	-	-	-	100	-	100	-	80	-
$F_m$	-	-	-	-	-	80	-	-	-	150
$T$	-	0,1	-	-	-	-	-	0,15	-	0,2
Найти	$E_k$	$x$	$A$	$T$	$F_m$	$E_p$	$E$	$m$	$v_m$	$v$

### ТЕМА 3. ИДЕАЛЬНЫЙ ГАЗ

Идеальным называется газ, молекулы которого имеют пренебрежимо малый собственный объем и взаимодействуют друг с другом по закону абсолютно упругого удара. Уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева-Клапейрона):

$$PV = \frac{M}{\mu} RT,$$

где  $P$  – давление газа,  $V$  – объем,  $T$  – абсолютная температура,  $M$  – масса газа,  $\mu$  – молярная масса газа,  $R=8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$  – универсальная газовая постоянная,  $\nu=M/\mu$  – количество вещества (число молей).

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории имеет вид:

$$P = \frac{1}{3} m n \overline{v^2},$$

где  $m$  – масса молекулы газа,  $n$  – концентрация молекул (число молекул в единице объема),  $\overline{v^2}$  – средний квадрат скоростей молекул. Средняя квадратичная скорость молекул:

$$v_{KB} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}},$$

где  $k=R/N_A$  – постоянная Больцмана,  $N_A$  – число Авогадро (число молекул в одном моле вещества).

$N_A=6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ ,  $k=1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$ .

Из уравнения состояния идеального газа следует  $P=nkT$ .

Плотность вещества  $\rho=M/V=mn$ .

### Задачи

3.1. Газ, масса которого  $M$ , занимает при температуре  $T$  и давлении  $P$  объем  $V$ . В сосуде содержится  $N$  молекул газа. Масса одной молекулы –  $m$ .

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
газ	O <sub>2</sub>	H <sub>2</sub>	-	CO <sub>2</sub>	-	-	-	азот	H <sub>2</sub>	-
$M$	0,5	0,2	0,1	-	-	0,1	0,1	-	-	0,44
$m \cdot 10^{26}$	-	-	-	-	4,65	-	5,31	-	-	7,3
$P$ , МПа	0,5	0,5	0,1	0,23	0,2	1,0	0,15	-	0,2	-
$V$ , л	-	50	75	10	2	-	100	75	-	140
$T$ °C	17	-	16	0	7	27	-	17	27	0
$N \cdot 10^{-25}$	-	-	-	-	-	3,01	-	0,5	0,3	-
Найти	$V$ , $N$	$N$ , $T$	газ, $m$	$M$ , $N$	газ, $M$	газ, $V$	$T$ , $N$	$M$ , $P$	$m$ , $V$	газ, $P$

**3.2.** Плотность газа при температуре  $T$  и давлении  $P$  равна  $\rho$ ,  $n$  – концентрация молекул газа,  $m$  – масса одной молекулы газа.

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
газ	O <sub>2</sub>	H <sub>2</sub>	-	-	CO <sub>2</sub>	-	-	-	азот	-
$P$ , МПа	2,4	0,50	1,5	0,5	0,1	0,1	1,0	-	0,3	0,3
$T$ °C	28	10	88	28	15	16	-	5	20	20
$\rho$	-	-	14	0,8	-	1,83	-	-	-	3,45
$m \cdot 10^{26}$	-	-	-	-	-	-	5,31	0,33	-	-
$n \cdot 10^{-25}$	-	-	-	-	-	-	23	5,2	-	-
Найти	$\rho$ , $m$	$m$ , $n$	газ, $m$	газ, $m$	$\rho$ , $n$	газ, $m$	$T$ , $\rho$	$\rho$ , $P$	$\rho$ , $n$	газ, $m$

**3.3.** В сосуде объемом  $V$ , находится  $N$  молекул газа при температуре  $T$  и давлении  $P$ . Масса газа  $M$ , его плотность  $\rho$ , масса одной молекулы газа  $m$ .

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
газ	азот	-	азот	O <sub>2</sub>	-	O <sub>2</sub>	H <sub>2</sub>	-	H <sub>2</sub>	CH <sub>4</sub>
$P$ , МПа	0,5	0,25	-	0,1	0,2	-	0,3	0,18	-	0,2
$V$ , л	20	-	30	20	-	200	15	-	250	25

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{\circ}C$	18	27	30	10	20	15	20	25	17	13
$\rho$	-	3,2	-	-	0,33	-	-	3,2	-	-
$M$	-	-	-	-	-	-	-	4,1	-	-
$N \cdot 10^{-24}$	-	-	5	-	-	8,0	-	-	0,4	-
Найти	$\rho,$ $N$	газ	$M,$ $P$	$\rho,$ $N$	газ, $N$	$\rho,$ $P$	$N,$ $\rho$	газ, $V$	$\rho,$ $P$	$N,$ $\rho$

**3.4.** В камере шины емкостью  $V$  содержится воздух массой  $M_1$  при температуре  $T_1$  и давлении  $P_1$ . После подкачки воздуха давление –  $P_2$ , и температура повысилась на  $\Delta T$ . При этом в камеру введена масса воздуха  $\Delta M$ , число молекул воздуха –  $\Delta N$ . Молярная масса воздуха 29 г/моль.

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$M_1, \text{Г}$	26	-	80	16	45	60	14	-	25	-
$\Delta M, \text{Г}$	-	-	5	-	-	10	3	12	-	-
$P_1, \text{атм}$	-	2,0	2,5	1,3	1,5	1,3	1,8	1,1	2,6	2,2
$P_2, \text{атм}$	1,4	-	-	-	1,7	-	2,4	-	-	2,8
$T_1^{\circ}C$	30	27	2	-	-	-	7	5	17	-3
$\Delta T,^{\circ}C$	15	-	-	30	-	20	-	25	37	40
$\Delta N \cdot 10^{-22}$	-	8	-	4	10	3	-	-	18	-
$V, \text{л}$	22	6	-	8	20	40	8	45	-	7
Найти	$P_1$ $\Delta M$	$M_1$ $\Delta M$	$P_2 V$	$P_2$ $\Delta M$	$\Delta T$ $T_1$	$T_1$ $P_2$	$\Delta N$ $T_1$	$P_2$ $\Delta N$	$V$ $P_2$	$M_1$ $\Delta M$

**3.5.** В баллоне объема  $V$  находился газ при температуре  $T_1$  и давлении  $P_1$ . Когда из баллона взяли некоторое количество газа, давление понизилось до  $P_2$ , а температура – до  $T_2$ . Масса, число молей и число молекул взятого из баллона газа –  $\Delta M$ ,  $\Delta \nu$  и  $\Delta N$ .

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
газ	-	Ar	O <sub>2</sub>	H <sub>2</sub>	CH <sub>4</sub>	-	He	H <sub>2</sub>	H <sub>2</sub>	азот
$V, \text{л}$	15	20	40	25	16	20	11	-	20	10

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P_1$ , атм	-	7	5	6,5	10	5	9	5	-	8
$P_2$ , атм	4	3	3	2,5	-	4	-	3	2	5
$T_1$ °C	30	127	30	-	30	27	42	57	37	77
$T_2$ °C	26	17	-	-23	2	-3	2	7	2	-
$\Delta M$ , г	-	-	-	-	40	1,8	10	8,4	-	50
$\Delta \nu$	-	-	-	4	-	-	-	-	-	
$\Delta N \cdot 10^{-23}$	5	-	12	-	-	-	-	-	8	-
Найти	$P_1$ $\Delta \nu$	$\Delta M$ $\Delta N$	$T_2 \Delta$ $\nu$	$T_1$ $\Delta M$	$P_2 \Delta$ $N$	газ, $\Delta N$	$P_2 \Delta$ $N$	$V$ $\Delta \nu$	$P_1 \Delta$ $M$	$T_2$ , $\Delta N$

**3.6.** В колбе емкостью  $V$  содержится газ, средняя квадратичная скорость молекул которого –  $\nu_{KB}$ . Вследствие утечки из колбы  $\Delta N$  молекул давление газа в колбе понизилось на  $\Delta P$ .

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
газ	O <sub>2</sub>	азот	-	CO <sub>2</sub>	He	H <sub>2</sub> O	азот	-	H <sub>2</sub>	-
$V$ , л	10	25	10	30	20	-	5	16	15	-
$T$ °C	27	-	312	-	17	-	7	-	-	33
$\Delta N \cdot 10^{-22}$	10	-	-	5	-	2	20	9	10	12
$\Delta P$ , кПа	-	25	81	-	20	4	-	25	20	30
$\nu_{KB}$	-	600	900	450	-	700	-	500	-	522
Найти	$\Delta P$ $\nu_{KB}$	$\Delta N$ $T$	газ $\Delta N$	$T$ $\Delta P$	$\Delta N$ $\nu_{KB}$	$V$ $T$	$\Delta P$ $\nu_{KB}$	газ $T$	$T$ $\nu_{KB}$	газ $V$

**3.7.** В сосуде объемом  $V$  содержится  $\nu$  молей газа с общей массой  $M$ . Концентрация молекул –  $n$ , общее число молекул газа в сосуде –  $N$ . Масса молекулы –  $m$ . Температура газа –  $T$ , давление –  $P$ .

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
газ	H <sub>2</sub>	O <sub>2</sub>	-	азот	-	-	-	NH <sub>3</sub>	He	-
$\nu$	3	1,6	-	-	-	-	1,5	-	-	2
№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

$M$	-	-	0,1	0,2	-	-	-	0,5	-	-
$N \cdot 10^{-23}$	-	-	-	-	9	-	-	-	20	-
$n \cdot 10^{-26}$	-	1,2	-	-	1,5	6	0,6	-	-	-
$P, \text{МПа}$	0,5	-	0,2	0,15	-	-	-	0,3	0,4	0,3
$V, \text{л}$	-	-	-	-	-	10	-	-	-	12
$T^{\circ}\text{C}$	17	27	0	827	17	27	20	7	-33	-
$m \cdot 10^{26}$	-	-	4,65	-	-	-	7,3	-	-	-
Найти	$V$ $n$	$V$ $P$	газ $n, V$	$V$ $n$	$P$ $V$	$\nu$ $P$	$M$ $P$	$N$ $n$	$m$ $V$	$T$ $N$

**3.8.** В сосуде объемом  $V$  под поршнем площадью  $S$  находится газ при температуре  $T$  и давлении  $P$ . Сила, с которой газ действует на поршень,  $F$ . Число молекул газа  $N$ , число молей  $\nu$ .

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$F$	-	200	150	-	450	30	120	-	150	-
$S, \text{см}^2$	20	10	30	15	-	60	-	12	-	20
$N \cdot 10^{-23}$	2	-	-	-	3	-	12	0,6	-	-
$\nu$	-	-	2,5	-	-	0,5	-	-	-	0,2
$V, \text{л}$	-	0,3	-	2	8	6	10	1,0	30	2
$T$	290	273	400	283	290	-	273	-	300	900
$P, \text{кПа}$	100	-	-	133	-	-	-	336	500	-
Найти	$V$ $F$	$N P$	$V$ $P$	$F N$	$P$ $S$	$P$ $T$	$P$ $S$	$T$ $F$	$N$ $S$	$P F$

**3.9.** Газ при температуре  $T$  и давлении  $P$  имеет плотность  $\rho$ . Масса моля –  $\mu$ , средняя квадратичная скорость молекул –  $U_{KB}$ .

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
газ	-	$\text{H}_2$	-	$\text{O}_2$	-	азот	-	-	-	$\text{O}_2$
$P, \text{кПа}$	250	-	40	-	50	70	90	65	-	40
№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

$T\text{ }^{\circ}\text{C}$	28	-	241	-	47	-	-42	94	-24	-
$\rho$	0,2	0,1	0,3	0,3	-	-	1,5	-	0,7	0,3
$v_{KB}$	-	800	-	630	706	450	-	456	440	-
Найти	газ $v_{KB}$	$P$ $T$	газ $v_{KB}$	$P$ $T$	$\rho$ $\mu$	$\rho$ $T$	газ $v_{KB}$	газ $\rho$	$P$ $\mu$	$v_{KB}$ $T$

**3.10.** В сосуде объемом  $V$  находится газ при температуре  $T$  и давлении  $P$ . Плотность газа –  $\rho$ , концентрация молекул –  $n$ , средняя квадратичная скорость его молекул –  $v_{KB}$ . Сосуд содержит  $N$  молекул газа. Масса одной молекулы газа –  $m$ .

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
газ	O <sub>2</sub>	H <sub>2</sub>	азот	Ar	-	CH <sub>4</sub>	-	азот	O <sub>2</sub>	H <sub>2</sub>
$N \cdot 10^{-22}$	-	30	5	12	29	42	30	42	36	-
$V$ , л	2,5	-	6	25	20	11	9,3	30	11	8
$v_{KB}$	400	920	-	600	400	800	811	500	-	600
$P$ , кПа	10	100	60	-	41	-	47	-	90	70
Найти	$N$ , $P$	$V$ $n$	$m$ , $v_{KB}$	$n$ $\rho$	газ $T$	$P$ $\rho$	газ $\rho$	$m$ $P$	$v_{KB}$ $T$	$N$ $T$

## ТЕМА 4. ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ

Внутренняя энергия тела – это суммарная кинетическая энергия хаотического движения молекул и потенциальная энергия их взаимодействия. Для идеального газа потенциальной энергией взаимодействия молекул можно пренебречь.

Внутренняя энергия является функцией состояния системы. Это означает, что значение внутренней энергии не зависит от процессов, в ходе которых система перешла в данное состояние. Изменение внутренней энергии всегда равно разности значений энергии в этих состояниях.



Для определения численного значения внутренней энергии вводится понятие числа степеней свободы. Число независимых координат, полностью определяющих положение системы в пространстве, называется числом степеней свободы.

Молекулу одноатомного газа можно рассматривать как материальную точку. Положение точки в пространстве характеризуется тремя координатами. Эти координаты называются поступательными степенями свободы. Поэтому одноатомная молекула обладает тремя степенями свободы. Молекула двухатомного газа имеет пять степеней свободы – три поступательные и две вращательные. Молекула трехатомного и многоатомного газа имеет шесть степеней свободы – три поступательные и три вращательные (рис. 8).

Средняя внутренняя энергия, приходящаяся на одну молекулу,

$$\overline{\varepsilon} = \frac{i}{2} kT, \quad (1)$$

где  $i$  – число степеней свободы молекулы.

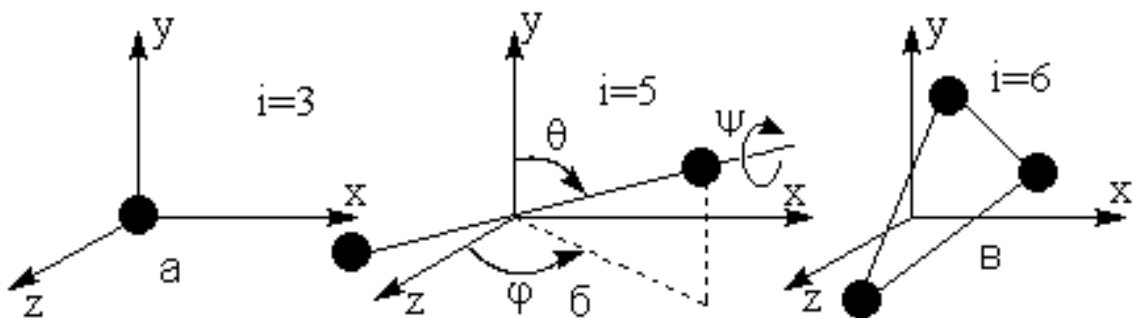


Рис. 8. Степени свободы одноатомной, двухатомной и трехатомной молекул

Внутренняя энергия идеального газа равна суммарной энергии хаотического движения молекул:

$$U = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i = N \overline{\varepsilon}, \quad (2)$$

где  $N$  – число молекул, а  $\overline{\varepsilon}$  – средняя кинетическая энергия движения молекулы.

Подставив формулу (1) в выражение (2), получим формулу для вычисления внутренней энергии идеального газа:

$$U = \frac{i}{2} NkT = \frac{i}{2} \frac{M}{\mu} N_A kT = \frac{i}{2} \frac{M}{\mu} RT . \quad (3)$$

Внутренняя энергия идеального газа зависит только от его температуры.

### **Задание**

Определить внутреннюю энергию смеси газов, содержащей  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ ,  $\nu_3$  молей одноатомного, двухатомного и многоатомного газа. Соответствующее число молекул –  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$ . Найдите также энергию вращательного движения всех молекул газа.  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$  – средние значения энергии молекул одноатомного, двухатомного и многоатомного газа. Энергия молекул дана в  $10^{-21}$  Дж. Число молекул дано в  $10^{23}$ .

Номер задачи указывает номер данных из табл. 1, номер условия – номер данных из табл. 2.

Таблица 1

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\nu_1$	-	1,5	-	1,2	0,5	-	-	-	-	0,5
$\nu_2$	0,5	1	5	-	-	-	2	-	5	0,3
$\nu_3$	0,2	1,5	-	1	-	4	3	-	3	0,2
$N_1$	2,0	-	0	-	-	5,0	12	3,0	3,0	-
$N_2$	-	-	-	4,0	2,0	3,0	-	4,0	-	-
$N_3$	-	-	15	-	4,0	-	-	2,0	-	-

Таблица 2

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\varepsilon_1$	-	-	6,0	-	-	9,0	-		-	-
$\varepsilon_2$	8,0	-	-	6,0	-	-	10	-	12	-
$\varepsilon_3$	-	10	-	-	6,0	-	-	9,0	-	12

## **ТЕМА 5. ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ**

Количество энергии, переданной от тела к телу посредством теплопередачи, называется количеством теплоты  $Q$ .

Первое начало термодинамики: количество теплоты, сообщенное системе, идет на приращение внутренней энергии системы и работу системы против внешних сил

$$Q = U_2 - U_1 + A. \quad (1)$$

Для бесконечно малых изменений параметров системы уравнение (1) можно заменить на дифференциальное

$$\delta Q = dU + \delta A, \quad (2)$$

где  $dU$  является полным дифференциалом, т.е. его изменение зависит от начального и конечного состояний системы и не зависит от пути, по которому совершается переход.  $\delta Q$  и  $\delta A$  зависят от пути перехода системы от одного состояния к другому и не являются полными дифференциалами.

Работа газа при изобарном процессе

$$A = \int \delta A = \int_{V_1}^{V_2} P dV. \quad (3)$$

Работа газа при изотермическом процессе

$$A = \frac{M}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (4)$$

Теплоемкостью тела называется физическая величина, численно равная количеству теплоты, переданной телу для изменения его температуры на 1 Кельвин:

$$C = \frac{\delta Q}{dT}. \quad (5)$$

Удельная теплоемкость – теплоемкость тела, отнесенная к 1 кг, т.е. количество теплоты, необходимое для нагревания 1 кг вещества на 1 Кельвин:

$$c = \frac{\delta Q}{mdT}. \quad (6)$$

Молярная теплоемкость – теплоемкость одного моля вещества, т.е. количество теплоты, необходимое для нагревания 1 моля вещества на 1 Кельвин:

$$C = \frac{\delta Q}{v dT} . \quad (7)$$

Теплоемкость зависит от условий, при которых нагревается тело. Обычно нагрев проводится при постоянном объеме или при постоянном давлении. Молярная теплоемкость идеального газа при постоянном объеме и при постоянном давлении равны соответственно:

$$C_V = \left( \frac{\delta Q}{dT} \right)_V = \frac{dU}{dT} = \frac{i}{2} R , \quad (8)$$

$$C_P = \left( \frac{\delta Q}{dT} \right)_P = \frac{dU + \delta A}{dT} = \frac{i}{2} R + R = \frac{i+2}{2} R . \quad (9)$$

$$\text{Уравнение Роберта Майера: } C_P - C_V = R . \quad (10)$$

Адиабатическим называется процесс, протекающий без теплообмена с окружающей средой. При адиабатическом процессе  $\delta Q = 0$  и работа газа совершается за счет убыли внутренней энергии  $A = -dU$ . При адиабатическом процессе параметры состояния газа связаны уравнением Пуассона:

$$PV^\gamma = const , \quad (11)$$

где  $\gamma$  – показатель адиабаты (коэффициент Пуассона)

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{i+2}{i} . \quad (12)$$

## ***Задачи***

**5.1.** Газ массой  $M$  расширяется (нагревается) от объема  $V_1$  до  $V_2$ , при этом давление изменяется от  $P_1$  до  $P_2$ , а температура изменяется от  $T_1$  до  $T_2$ . При расширении газ получает количество тепла  $Q$ , совершает работу  $A$ , его внутренняя энергия изменяется на  $\Delta U$ .

Обозначение процесса расширения (нагрева) газа: изохорный – V, изобарный – P, изотермический – T, адиабатный – A.

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
газ	CO <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>	O <sub>2</sub>	He	N <sub>2</sub>	H <sub>2</sub>	-	H <sub>2</sub>	CH <sub>4</sub>	H <sub>2</sub>
процесс	V	T	A	P	V	T	A	V	P	A
$M$ , г	220	7	20	50	-	10	-	-	-	4
$V_1$	-	0,01	-	-	-	0,1	2,0	0,1	-	0,2
$V_2$	-	0,02	-	-	-	-	0,2	-	-	-
$P_1$ , атм.	6	-	2	-	1,5	2,4	0,5	4	-	-
$P_2$ , атм.	8	-	-	-	-	0,8	10,7	7	-	-
$T_1$	288	-	-	300	260	-	280	300	-	320
$T_2$	-	-	800	350	310	-	-	-	-	400
$\Delta U$	-	-	300	-	320	-	-	-	-	-
$A$	-	800	-	-	-	-	-	-	180	-
Найти	$Q$ $\Delta U$	$T_1 \Delta$ $U$	$T_1$ $P_2$	$A$ $Q$	$M$ $V_1$	$A$	$\gamma$ $T_2$	$Q$ $T_2$	$Q$ $\Delta U$	$A$ $V_2$

**5.2.** Газ массой  $M$  расширяется из состояния  $P_1$ ,  $V_1$ ,  $T_1$  до состояния  $P_2$ ,  $V_2$ ,  $T_2$ , получая при этом количество тепла  $Q$  и совершая работу  $A$ . Удельная теплоемкость газа –  $c$ .

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
газ	O <sub>2</sub>	CH <sub>4</sub>	CO <sub>2</sub>	CO	O <sub>2</sub>	Ne	H <sub>2</sub>	He	N <sub>2</sub>	Ar
$M$ , г	4	-	-	2	8	-	0,5	2	-	-
$P_1$ , кПа	-	100	-	180	-	180	200	-	-	-
$V_1$ , л	-	2	-	1,5	-	2	1,5	-	4	4
$T_1$	300	-	300	-	300	-	-	300	400	-
$P_2$ , кПа	-	130	160	-	160	-	-	-	100	120
$V_2$ , л	-	-	2,5	-	5	5	-	-	6	8
$T_2$	400	-	-	430	-	-	-	350	300	-
$A$	200	100	280	-	400	200	80	-		300
$Q$	-	400	600	500	-	500	800	500	100	800
Найти	$c$	$V_2$	$M$	$A$	$Q$	$P_2$	$T_2$	$A$	$A$	$P_1$

**5.3.** При изменении состояния газа от  $P_1, V_1, T_1$  до  $P_2, V_2, T_2$ , его внутренняя энергия изменяется на  $\Delta U$ , газ совершает работу  $A$  и получает количество тепла  $Q$ . Масса газа –  $M$ . Обозначения процессов: Р – изобарный, V – изохорный, Т – изотермический, А – адиабатный. Давление дано в МПа; работа, энергия и количество тепла – в МДж.

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
процесс	V	P	A	T	T	P	V	A	-	P
газ	O <sub>2</sub>	CO <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>	H <sub>2</sub>	-	-	CH <sub>4</sub>	He	O <sub>2</sub>	-
$M$	-	-	-	0,8	-	1	8	-	-	-
$P_1$	0,15	0,12	0,2	-	0,3	-	-	0,3	0,1	0,25
$V_1$	2	1,5	1	6	3	-	-	2	3	5
$T_1$	-	-	-	-	-	300	293	-	-	-
$P_2$	-	-	-	-	0,15	-	-	0,6	0,13	-
$V_2$	-	2,2	4	24	-	-	-	-	4	7
$T_2$	-	-	-	-	-	150	-	-	-	-
$A$	-	-	-	2,1	-	0,62	-	-	0,15	-
$Q$	0,25	-	-	-	-	-	0,4	-	-	1,6
Найти	$P_2$	$Q$	$A$	$Q, T$	$V_2, A$	$\Delta U, \text{газ}$	$T_2$	$V_2, A$	$Q$	$\Delta U$

**5.4.** Теплоемкости смеси газов при постоянном объеме и при постоянном давлении  $C_V$  и  $C_P$  (даны в Дж/К). Смесь газов нагревается от состояния  $P_1, V_1, T_1$  до температуры  $T_2$  при одном из процессов: V – изохорный, Р – изобарный, А – адиабатный, либо каком-то другом процессе.

Конечное давление и объем –  $P_2, V_2$ . Изменение внутренней энергии газа –  $\Delta U$ , совершенная работа –  $A$ , полученное количество тепла –  $Q$ . Показатель адиабаты –  $\gamma$ ,  $\Delta T = T_2 - T_1$ .

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
процесс	P	-	A	V	A	P	-	V	P	-
$C_V$	-	20	-	36	25	20	-	-	20	10
$C_P$	30	-	40	54	34	27	45	-	30	14

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\gamma$	-	-	-	-	-	-	1,5	1,4	-	-
$P_1, \text{атм}$	1,2	-	2,0	1,3	-	1,4	-	1,2	1,0	0,8
$V_1, \text{л}$	20	-	24	30	22	20	-	10	20	2,5
$T_1, ^\circ\text{C}$	-	-	-	-	27	-	-	-	-	-
$P_2, \text{атм}$	-	-	1,0	1,8	-	-	-	-	1,5	1,0
$V_2, \text{л}$	24	-	38	-	11	25	-	-	-	4,0
$Q, \text{Дж}$	-	300	-	-	-	-	-	600	-	640
$\Delta T, ^\circ\text{C}$	60	10	-	-	-	-	20	-	-	-
Найти	$C_V$	$A$	$C_V$	$\Delta U$	$A$	$Q$	$\Delta U$	$P_2$	$A$	$A$

**5.5.** Газ массой  $M$  нагревают при постоянном давлении  $P$  от температуры  $T_1$  до  $T_2$ . При этом его объем увеличился от  $V_1$  до  $V_2$ , газ получил количество тепла  $Q$  и совершил работу  $A$ . Его внутренняя энергия увеличилась на  $\Delta U$ .

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
газ	He	азот	O <sub>2</sub>	CH <sub>4</sub>	CO	CO <sub>2</sub>	Cl <sub>2</sub>	NH <sub>3</sub>	H <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>
$M, \text{г}$	7	-	-	-	32	-	-	34	4	-
$P, \text{атм}$	-	1,0	0,8	-	-	1,5	0,8	-	-	1,2
$V_1$	-	0,2	0,1	-	0,02	0,4	0,2	-	-	-
$V_2$	-	0,3	0,3	-	0,03	-	-	$2V_1$	-	1,5
$T_1, ^\circ\text{C}$	40	-	-	-	10	7	10	27	0	17
$T_2, ^\circ\text{C}$	80	-	-	-	-	77	90	-	-	87
$Q$	-	-	-	30	-	-	-	-	50	-
$A$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Найти	$A$ $Q$	$A$ $Q$	$\Delta U$ $A$	$A$ $\Delta U$	$\Delta U$ $Q$	$\Delta U$ $Q$	$\Delta U$ $Q$	$A$ $Q$	$T_2$ $A$	$A$ $Q$

**5.6.** Газ массой  $M$  совершает процесс I из состояния  $P_1, V_1, T_1$  до состояния  $P_2, V_2, T_2$ , а затем процесс II – до состояния  $P_3, V_3, T_3$ . Построить график процесса. Обозначения процессов: P – изобарный, V – изохорный, T – изотермический, A – адиабатный. Определить

полное изменение внутренней энергии газа  $\Delta U$ , совершенную им работу  $A$  и переданное ему тепло  $Q$ .

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
газ	O <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>	H <sub>2</sub>	He	N <sub>2</sub>	He	O <sub>2</sub>	CO <sub>2</sub>	H <sub>2</sub>	NH <sub>3</sub>
I	P	T	A	T	P	T	V	V	P	P
II	V	V	T	V	V	P	P	A	A	T
$M$ , г	20	14	3	16	30	5	32	-	-	-
$P_1$ , атм	1,2	2,0	-	8	2,4	3	1,0	0,8	1,2	1,5
$V_1$ , л	10	-	11	-	15	-	-	12	-	5
$T_1$ , °C	-	17	300	30	-	12	17	-	7	-
$P_2$ , атм	-	-	-	2	-	1,5	-	2,4	-	-
$V_2$	30	-	33	-	24	-	-	-	30	10
$T_2$ , °C	-	-	-	-	-	-	87	-	97	-
$P_3$ , атм	2,0	$P_1$	-	-	-	-	-	1,0	-	-
$V_3$ , л	-	-	8	-	-	-	12	-	-	5
$T_3$ , °C	-	77	-	82	117	67	-	200	27	-

**5.7.** При нагревании некоторого количества газа при постоянном давлении затрачивается  $Q_p$  количества теплоты, а при постоянном объеме –  $Q_v$ . Число степеней свободы газа –  $i$ , масса газа –  $M$ , количество газа –  $\nu$  молей, молярная теплоемкость газа при постоянном объеме –  $C_v$ , при постоянном давлении –  $C_p$ . Работа, совершаемая при нагревании газа при постоянном давлении –  $A$ .

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
газ	-	-	-	He	-	-	CH <sub>4</sub>	-	N <sub>2</sub>	-
$M$ , г	-	-	3	8	-	-	-	-	7	10
$\nu$	0,5	2	-	-	0,4	-	-	-	-	-
$\gamma$	-	1,33	1,4	-	-	-	-	1,5	-	-
$Q_v$	-	-	187	-	100	84	-	-	-	208
$Q_p$	100	-	-	-	155	-	-	120	-	291
$A$	40	-	-	110	-	42	80	-	-	-
$\Delta T$	-	20	6	-	-	7	-	5	10	32



№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Найти	$Q_V$ $\Delta T$	$Q_V$ $A$	газ $Q_P$	$Q_P$ $Q_V$	$\Delta T$ $i$	$C_P$ $C_V$	$M$ $Q_V$	$A$ $\nu$	$Q_P$ , $Q_V$	газ $\nu$

**5.8.** Газ массой  $M$  расширяется (нагревается) из состояния  $P_1, V_1, T_1$  до состояния  $P_2, V_2, T_2$ . При этом газу передано количество тепла –  $Q$ , его внутренняя энергия изменилась на  $\Delta U$ , и газом совершена работа  $A$ . Удельная и молярная теплоемкости –  $c$ ,  $C$ .

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
газ	Ar	CO <sub>2</sub>	O <sub>2</sub>	CO	O <sub>2</sub>	CH <sub>4</sub>	NH <sub>3</sub>	N <sub>2</sub>	H <sub>2</sub>	He
$c$	-	-	-	-	500	800	-	-	-	-
$C$	-	12	-	-	-	-	-	12	-	22
$M$ , г	-	11	8	8	-	4	4	7	-	2
$V_1$ , л	3	-	4	3	2	4	-	-	3	-
$V_2$ , л	4	8	-	5	3	5	6	-	7	12
$P_1$ , атм	1,2	1,0	1,2	0,8	1,0	1,2	1,0	-	0,8	1,2
$P_2$ , атм	2,0	1,5	1,4	1,2	1,5	1,6	2,0	2,0	1,4	1,5
$T_1$	300	290	-	-	300	-	280	200	-	300
$Q$	-	-	400	-	-	-	-	800	-	-
$A$	200	-	100	250	-	-	100	300	400	-
Найти	$C$	$A$	$V_2$	$c$	$A$	$A$	$c$	$V_2$	$Q$	$A$

**5.9.** Газ массой  $M$  переходит из состояния  $P_1, V_1, T_1$  в состояние  $P_2, V_2, T_2$ . При этом газ совершает работу  $A$ , получает количество тепла –  $Q$ , и его внутренняя энергия изменяется на  $\Delta U$ . Процесс является: изотермическим – Т, изохорическим – V, изобарическим – P, адиабатическим – А.

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
газ	O <sub>2</sub>	H <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>	CO	NH <sub>3</sub>	H <sub>2</sub> O	-	He	H <sub>2</sub>	CO <sub>2</sub>
процесс	A	P	T	P	A	-	T	V	A	P
$M$ , г	20	-	8	8	-	6	-	-	-	-
$\Delta U$	-	750	-	-	-	-	-	-	-	-

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\Delta T$	-	20	-	50	-	-	-	-	40	-
$V_1$ , л	10	20	-	2	1	20	30	15	-	-
$V_2$ , л	-	22	10	10	3	35	-	-	-	-
$A$	600	-	-	-	-	-	800	-	500	180
$P_1$ , атм	1,2	-	2,5	-	-	1,2	0,8	1,1	-	-
$P_2$ , атм	-	-	0,5	-	0,2	1,6	-	1,7	-	-
Найти	$\Delta T$ $P_2$	$A$ $P_1$	$A$ $V_1$	$T_1$ , $A$	$A$ $P_1$	$\Delta U$	$P_2 V_2$	$\Delta U$	$M$	$\Delta U$

**5.10.** Смесь двух газов нагревается при постоянном давлении из состояния  $P, V_1, T_1$  до состояния  $P, V_2, T_2$ . При этом газ совершает работу  $A$  и получает количество тепла –  $Q$ . Удельные теплоемкости смеси при постоянном объеме и давлении –  $c_v, c_p$ , а молярные –  $C_v, C_p$ . Масса газов  $M_1, M_2$ .

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
газ 1	N <sub>2</sub>	H <sub>2</sub>	-	-	Ne	He	-	CO <sub>2</sub>	-	He
газ 2	He	NH <sub>3</sub>	-	CO <sub>2</sub>	O <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>	-	O <sub>2</sub>	-	CO <sub>2</sub>
$M_1$ , г	14	2	10	12	-	3	5	-	-	3
$M_2$ , г	4	-	20	11	-	7	7	-	-	11
$C_v$	-	18	-	-	14,5	-	-	-	-	-
$C_p$	-	-	-	-	-	-	-	-	27	-
№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$c_v$	-	-	650	-	-	-	670	601	-	-
$c_p$	-	-	900	-	-	-	-	820	-	-
$P$ , атм	1,2	-	-	-	0,8	1,0	-	1,1	1,0	-
$V_1$ , л	20	-	-	-	15	5	-	20	20	-
$T_1$ , °C	-	12	20	25	27	-	7	17	-	5
$T_2$ , °C	-	50	80	77	-	-	67	-	-	40
$V_2$ , л	30	-	-	-	20	8	-	47	30	-

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$Q$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$A$	-	-	-	270	-	-	259	-	-	-
Найти	$Q$ $C_V$	$A$ $M_2$	$C_V$ $A$	газ1 $Q$	$A$ $Q$	$Q$ $A$	$c_p$ $Q$	$A$ $Q$	$A$ $Q$	$C_p$ $A$

## ТЕМА 6. ЦИКЛИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Процесс, в результате которого система возвращается в исходное состояние, называется круговым процессом (циклом). На  $PV$ -диаграмме такой процесс изображается замкнутой кривой. Цикл называется прямым, если он проходится по часовой стрелке. В этом случае расширение газа идет при более высокой температуре, чем сжатие. По прямому циклу работают тепловые машины.

КПД тепловой машины

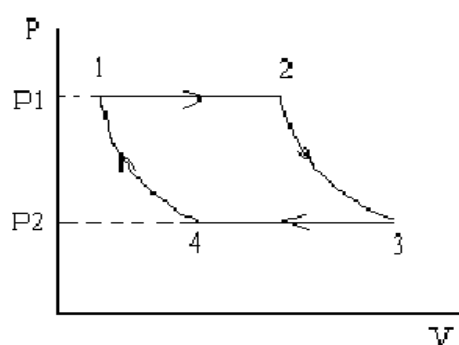
$$\eta = \frac{A}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}.$$

Здесь  $A$  – работа, совершаемая за цикл. На  $PV$ -диаграмме работа газа численно равна площади, ограниченной циклом.  $Q_1$  – количество тепла, полученное при нагревании, а  $Q_2$  – количество тепла, отданное при охлаждении.

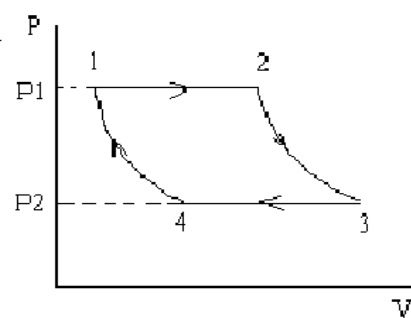
### Задание

Найти КПД цикла, совершаемого идеальным газом. Номер цикла совпадает с номером задачи. Номер условия обозначает номер строки из таблицы, в которой даны значения/и название газа, являющегося рабочим веществом цикла.

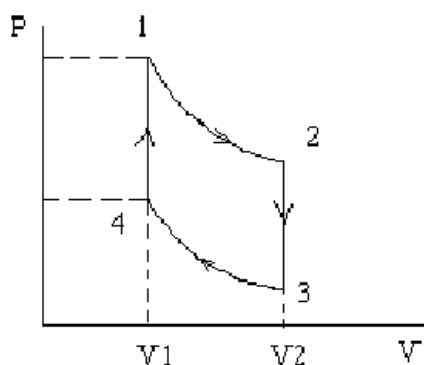
№	газ	n
0	кислород	4,0
1	водород	1,5
2	азот	2,0
3	гелий	2,5
4	кислород	1,8
5	метан	2,6
6	аргон	2,8
7	аммиак	3,0
8	неон	2,2
9	углекислый газ	2,0



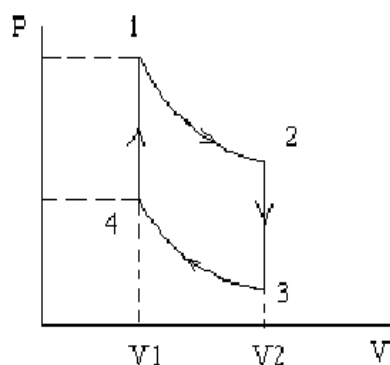
№1.  $(2 \rightarrow 3), (4 \rightarrow 1)$  – адиабаты  
 $P_1 = n \cdot P_2$



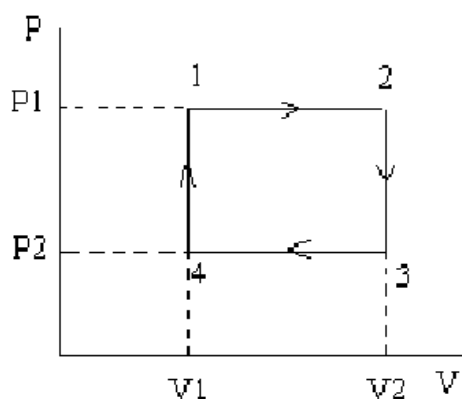
№2.  $(2 \rightarrow 3), (4 \rightarrow 1)$  – изотермы  
 $T_1 = 300\text{K}; T_2 = 600\text{K}$   
 $P_1 = n \cdot P_2$



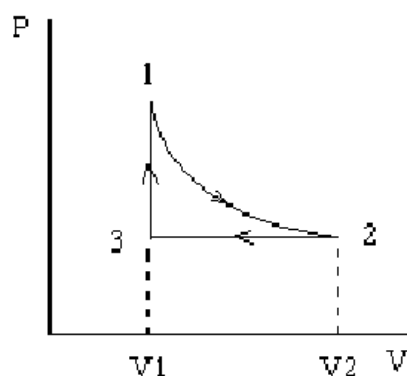
№ 3.  $(1 \rightarrow 2), (3 \rightarrow 4)$  – адиабаты  
 $V_2 = n \cdot V_1$



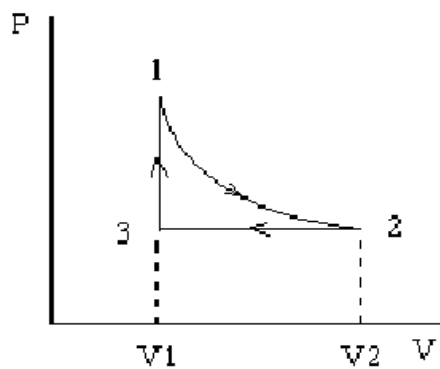
№ 4.  $(1 \rightarrow 2), (3 \rightarrow 4)$  – изотермы  
 $T_1 = 600\text{K}; T_3 = 300\text{K}$   
 $V_2 = n \cdot V_1$



№ 5.  $P_1 = n \cdot P_4$   
 $V_2 = n \cdot V_1$



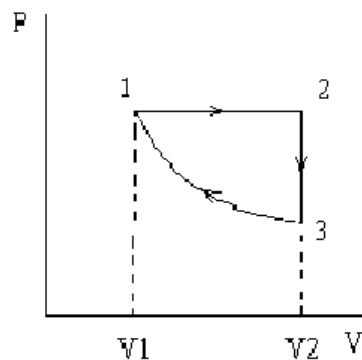
№ 6.  $(1 \rightarrow 2)$  – адиабата  
 $V_2 = n \cdot V_1$



№7.  $(1 \rightarrow 2)$  – изотерма

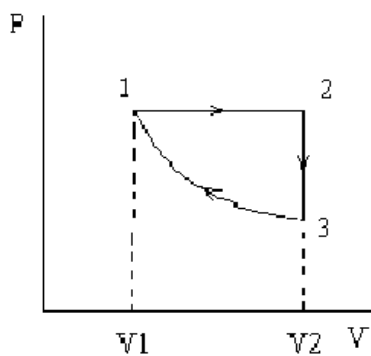
$$T_1 = 600\text{K}$$

$$V_2 = n \cdot V_1$$



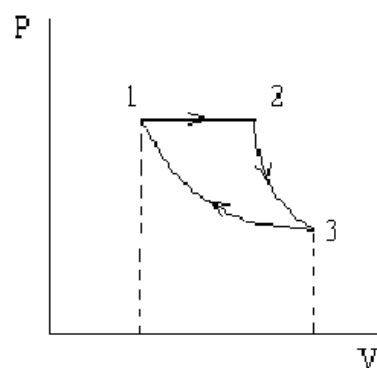
№8.  $(3 \rightarrow 1)$  – адиабата

$$V_2 = n \cdot V_1$$



№9.  $(3 \rightarrow 1)$  – изотерма

$$V_2 = n \cdot V_1$$



№10.  $(2 \rightarrow 3)$  – адиабата,

$(3 \rightarrow 1)$  – изотерма

$$T_2 = n \cdot T_1$$

## *Библиографический список*

1. Савельев И.В. Курс общей физики. В 3 т. Т.1. Механика и молекулярная физика. – М.: Наука, 1988.
2. Зисман Г.А., Тодес О.М. Курс общей физики. В 3 т. Т.1. Механика и молекулярная физика. – Киев, 1990.

## *Содержание*

Предисловие.....	3
Тема 1. Кинематика колебательного движения.....	
Тема 2. Динамика колебательного движения.....	10
Тема 3. Идеальный газ.....	19
Тема 4. Внутренняя энергия .....	24
Тема 5. Первое начало термодинамики.....	27
Тема 6. Циклические процессы.....	35
Библиографический список.....	39

Учебное издание

*Екатерина Александровна Яшкевич  
Михаил Николаевич Полянский*

# **Ф И З И К А**

## **Ч.П. КОЛЕБАНИЯ. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА**

**Индивидуальные задания  
для расчетных работ студентов**

*Учебно-методическое пособие  
для бакалавров всех направлений*

Редактор и корректор В.А. Басова  
Техн. редактор Л.Я. Титова

Темплан 2018 г., поз.97

---

Подп. к печати 20.11.2018 г.  
Печать офсетная.  
Тираж 300 экз.

Формат 60×84/16.  
Объем 2,25 печ. л.;  
Изд. №97. Цена

Бумага тип № 1.  
2,25 уч.-изд. л.  
«С». Заказ №

---

Ризограф Высшей школы технологии и энергетики Санкт-Петербургского государственного университета промышленных технологий и дизайна, 198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4