М. Ю. Дёмина, К. А. Крюков
М. Н. Кульбицкая, Е. А. Яшкевич

ФИЗИКА

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2023

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна»
Высшая школа технологии и энергетики

М. Ю. Дёмина, К. А. Крюков
М. Н. Кульбицкая, Е. А. Яшкевич

ФИЗИКА

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Учебное пособие

Утверждено Редакционно-издательским советом ВШТЭ СПбГУПТД

Санкт-Петербург
2023

УДК 53 (075)
ББК 22.3
Ф 503

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор Высшей школы фундаментальных физических исследований
Е. В. Орленко;
кандидат химических наук, доцент кафедры физики Высшей школы технологии и энергетики Санкт-Петербургского государственного университета промышленных технологий и дизайна
О. Ю. Деркачева

Дёмина, М. Ю.
Ф 503 Физика. Колебания и волны: учеб. пособие / М. Ю. Дёмина, К. А. Крюков, М. Н. Кульбицкая, Е. А. Яшкевич. — СПб.: ВШТЭ СПбГУПТД, 2023. — 49 с.

ISBN 978-5-91646-328-6

Учебное пособие соответствует программам и учебным планам дисциплины «Физика» для студентов, обучающихся по направлениям подготовки: 01.00.00 «Математика и механика», 13.00.00 «Электро- и теплоэнергетика», 15.00.00 «Машиностроение», 18.00.00 «Химические технологии», 20.00.00 «Техносферная безопасность и природообустройство» и 29.00.00 «Технологии легкой промышленности».

В учебном пособии кратко изложен основной теоретический материал по теме «Колебания и волны». В каждом разделе приведены примеры решения задач, которые могут быть полезны в качестве дополнительного материала при проведении практических занятий по физике, а также для самостоятельной работы студентов при подготовке к занятиям, зачету или экзамену по физике. Для проверки навыков решения задач дополнительно предложены задачи для самостоятельного решения.

Пособие предназначено для подготовки бакалавров очной и заочной форм обучения.

УДК 53 (075)
ББК 22.3

ISBN 978-5-91646-328-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое учебное пособие содержит примеры решения задач по одной из тем общего курса физики «Колебания и волны». В начале каждого раздела кратко изложен основной теоретический материал и дается сводка основных формул. Формулы приведены с подробными пояснениями, объясняется физический смысл входящих в них величин. После теоретического материала рассмотрены примеры решения задач. Каждая задача решена в общем виде (т.е. в буквенных обозначениях) так, чтобы искомая величина была выражена через заданные величины. Заданные величины выражены в системе СИ. Результаты расчетов записаны согласно правилам действий с приближенными величинами. Приведенные примеры решения задач ориентированы на оказание дополнительной помощи студентам при решении задач расчетно-графических и контрольных работ, а также при самостоятельной подготовке к занятиям, зачету или экзамену по физике. Для проверки навыков решения задач дополнительно предложены задачи для самостоятельного решения.

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Колебательными или **периодическими** называются движения или процессы, которые повторяются во времени.

Колебания называются **свободными** или **собственными**, если они совершаются за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешних воздействий на колебательную систему.

Свободные гармонические колебания

Частным случаем периодического движения служит колебательное движение, которое представляет собой перемещение материальной точки относительно среднего положения.

Гармонические колебания – это колебания, при которых смещение материальной точки от положения равновесия изменяется по закону синуса или косинуса (рис. 1):

$$x = A sin(\omega_0 t + \varphi_0) \text{ или } x = A cos(\omega_0 t + \varphi_0), \tag{1.1}$$

где A – амплитуда колебаний, т. е. максимальное отклонение от положения равновесия, $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$ – фаза колебаний, φ_0 – начальная фаза колебаний, ω_0 – круговая или циклическая частота, показывающая, сколько периодов колебаний T укладывается в интервале 2π, она равна

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \tag{1.2}$$

и связана с частотой соотношением

$$\omega_0 = 2\pi \nu, \tag{1.3}$$

где частота

$$\nu = \frac{1}{T} \tag{1.4}$$

показывает, сколько колебаний совершает материальная точка за один период.

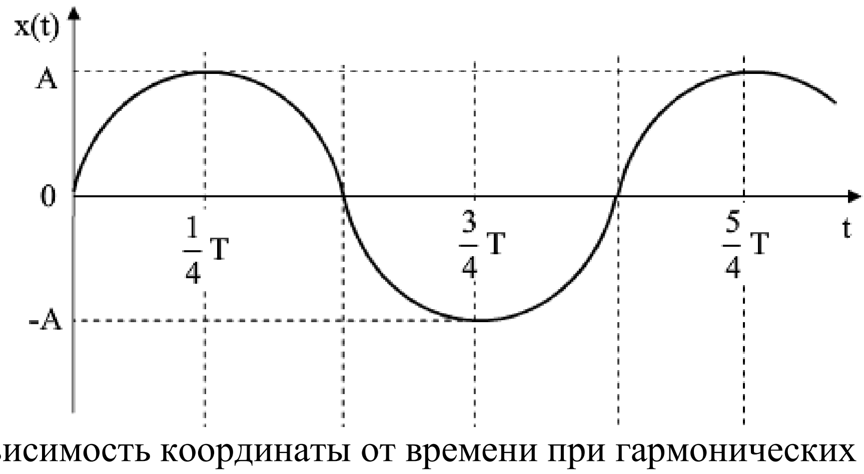

Рис. 1. Зависимость координаты от времени при гармонических колебаниях

Скорость точки, совершающей гармоническое колебание, равна

$$\text{v} = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \, sin(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0 \, cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right), \tag{1.5}$$

где $\text{v}_0 = A\omega_0$ – амплитуда скорости (рис. 2):

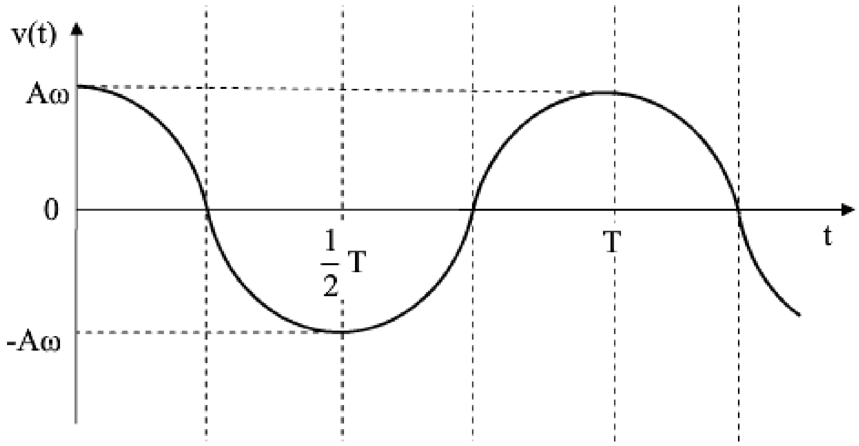

Рис. 2. Зависимость скорости от времени при гармонических колебаниях

Ускорение материальной точки, совершающей гармоническое колебание, равно

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) = A\omega_0^2 cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi\right). \quad (1.6)$$

где $a_0 = A\omega_0^2$ – амплитуда скорости.

Ускорение пропорционально смещению и всегда направлено в сторону положения равновесия (на это указывает знак минус в формуле 1.6) (рис. 3):

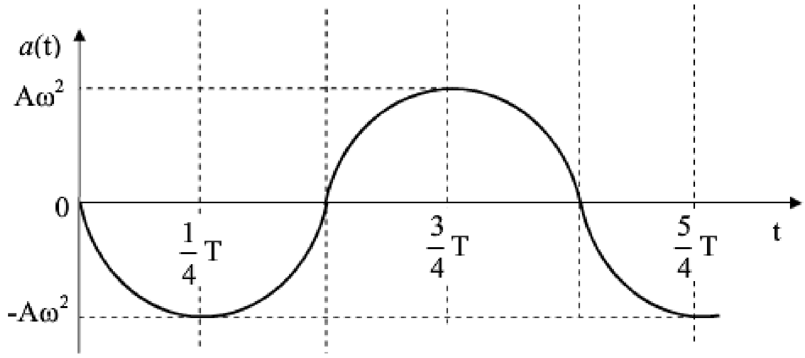

Рис. 3. Зависимость ускорения от времени при гармонических колебаниях

Сила, действующая на колеблющуюся точку массой m, согласно второму закону Ньютона, равна

$$F = ma = -m\omega_0^2 x = -kx, \quad (1.7)$$

где $k = m\omega_0^2$ называется коэффициентом жесткости.

Максимальное значение этой силы достигается при значении $cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) = 1$ и равно по абсолютному значению (модулю)

$$F_{max} = mA\omega_0^2. \quad (1.8)$$

Сила прямо пропорциональная смещению и направлена всегда к положению равновесия, ее период и фаза совпадают с периодом и фазой ускорения. Эта сила может быть упругой, т. е. вызывающей гармонические колебания, или квазиупругой (имеющей иную природу, но удовлетворяющей формуле 1.7)

Кинетическая энергия материальной точки равна

$$E_к = \frac{m\text{v}^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} sin^2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) \tag{1.9}$$

или

$$E_к = \frac{mA^2\omega_0^2}{4}\left[1 - cos\,2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right)\right]. \tag{1.10}$$

Максимальное значение кинетической энергии

$$E_{к\,max} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}. \tag{1.11}$$

Потенциальная энергия точки, колеблющейся под действием силы F, равна в произвольный момент времени

$$E_п = -\int_0^x F dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} cos^2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) \tag{1.12}$$

или

$$E_п = \frac{mA^2\omega_0^2}{4}\left[1 + cos\,2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right)\right]. \tag{1.13}$$

Максимальное значение потенциальной энергии

$$E_{п\,max} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}. \tag{1.14}$$

Сложив (1.9) и (1.12), получим выражение для полной энергии

$$E = E_к + E_п = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}. \tag{1.15}$$

Из формул (1.10) и (1.13) следует, что кинетическая и потенциальная энергии изменяются с частотой $2\omega_0$, т. е. с частотой, которая в два раза превышает частоту гармонического колебания (рис. 4).

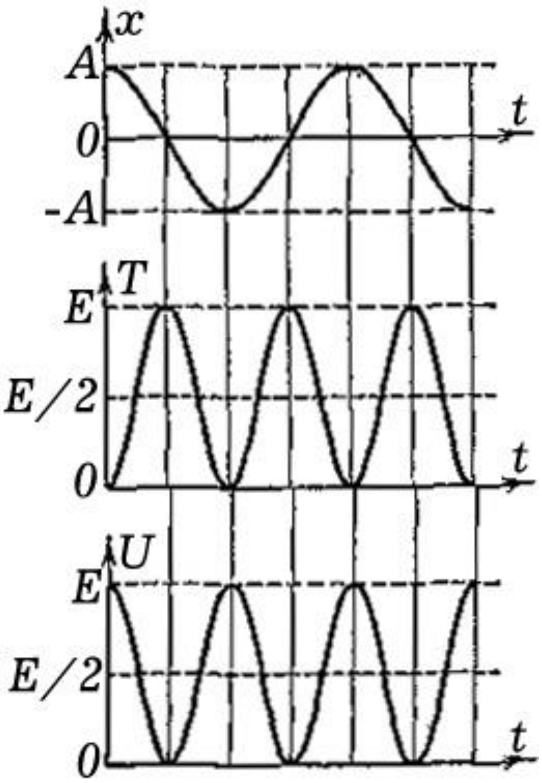

Рис. 4. Зависимость кинетической и потенциальной энергии
от времени при гармонических колебаниях

Среднее значение энергий

$$\langle E_к \rangle = \langle E_п \rangle = \frac{1}{2} E .$$

Из уравнения (1.7) следует дифференциальное уравнение гармонических колебаний

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 , \qquad (1.16)$$

решением которого является уравнение (1.7).

Гармонические колебания изображаются графически **методом вращающегося вектора амплитуды** или **методом векторных диаграмм** (рис. 5).

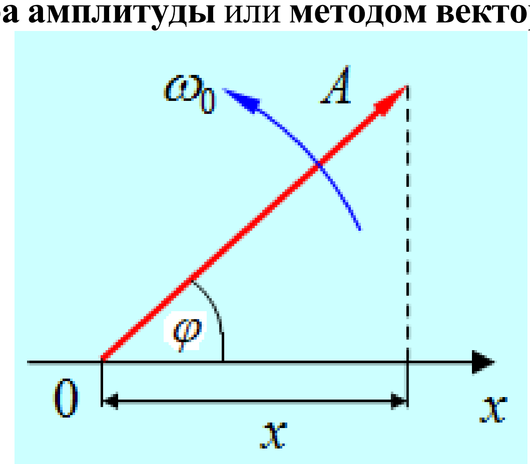

Рис. 5. Метод вращающегося вектора амплитуды

Примеры решения задач

Задача 1. Записать закон гармонического колебательного движения, если максимальное ускорение точки $a_{max} = 49{,}3 \cdot 10^{-2}$ м/с^2, период колебания $T = 2$ с и смещение точки от положения равновесия в начальный момент $t = 0$ $x_0 = 25 \cdot 10^{-3}$ м.

Дано:	СИ:
$a_{max} = 49{,}3 \cdot 10^{-2}$ м/с^2	
$T = 2$ с	
$t = 0$	
$x_0 = 25 \cdot 10^{-3}$ м	
$x(t)$ = ?	

Решение:

Уравнение колебаний точки:

$$x = A cos(\omega t + \varphi_0), \qquad (1)$$

где ω – циклическая (круговая) частота гармонических колебаний связана с периодом колебаний следующим соотношением:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ рад/с.} \qquad (2)$$

Скорость точки есть первая производная координаты по времени:

$$\text{v} = \frac{dx}{dt} = \frac{d\left(A cos(\omega t + \varphi_0)\right)}{dt} = -A\omega sin(\omega t + \varphi_0). \qquad (3)$$

Ускорение точки есть вторая производная координаты по времени или первая производная скорости по времени:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{d\left(-A\omega sin(\omega t + \varphi_0)\right)}{dt} = -A\omega^2 cos(\omega t + \varphi_0). \qquad (4)$$

Максимальное значение ускорения получим при условии:

$$cos(\omega t + \varphi_0) = \pm 1,$$

тогда по модулю:

$$a_{max} = A\omega^2 = A\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2.$$

Найдем амплитуду колебаний точки:

$$A = \frac{a_{max}T^2}{4\pi^2} = A = \frac{a_{max}T^2}{4\pi^2} = \frac{49{,}3 \cdot 10^{-2} \cdot 2^2}{4 \cdot 3{,}14^2} \approx 0{,}05 \text{ м.}$$

Амплитуда не равна начальному смещению $A \neq x_0$, поэтому начальная фаза φ_0 не равна нулю. Начальная фаза колебаний зависит от формы записи уравнения колебаний. Если использовать формулу (1), то момент времени $t = 0$:

$$x_0 = A cos(\omega \cdot 0 + \varphi_0) = A cos\varphi_0,$$

откуда

$$\varphi_0 = arccos\left(\frac{x_0}{A}\right) = arccos\left(\frac{0{,}025}{0{,}05}\right) = arccos 0{,}5 = 60^0 = \frac{\pi}{3}.$$

Подставим в уравнение (1) числовые значения амплитуды, циклической частоты и начальной фазы и запишем закон заданного гармонического колебания:

$$x = 0{,}05 cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Ответ: $x = 0{,}05cos\left(\pi t + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Задача 2. Колебания точки происходят по закону $x = Acos(\omega t + \varphi_0)$. В некоторый момент времени смещение x точки равно 5 см, ее скорость v = 20 см/с и ускорение a = – 80 см/с^2. Найти амплитуду A, циклическую частоту ω, период T колебаний и фазу φ в рассматриваемый момент времени.

Дано:	**СИ:**
$x = Acos(\omega t + \varphi_0)$	
x = 5 см	0,05 м
v = 20 см/с	0,2 м/с
a = – 80 см/с^2	– 0,8 м/с^2
A = ?	
ω = ?	
T = ?	
φ = ?	

Решение:

Запишем уравнение движения в общем виде:

$$x = Acos(\omega t + \varphi_0). \quad (1)$$

Уравнение скорости:

$$\mathrm{v} = -A\omega sin(\omega t + \varphi_0). \quad (2)$$

Уравнение ускорения:

$$a = -A\omega^2 cos(\omega t + \varphi_0). \quad (3)$$

Найдём отношение уравнения движения (1) к уравнению ускорения (3):

$$\frac{x}{a} = \frac{A \cdot cos(\omega t + \varphi_0)}{-A \cdot \omega^2 cos(\omega t + \varphi_0)} = -\frac{1}{\omega^2},$$

тогда циклическая частота равна

$$\omega = \sqrt{-\frac{a}{x}} = \sqrt{\frac{0{,}8}{0{,}05}} = 4 \text{ с}^{-1}.$$

Полная энергия колебаний равна сумме кинетической и потенциальной энергий:

$$E = E_к + E_п = E_{max},$$

или

$$\frac{m\mathrm{v}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2}. \quad (4)$$

После умножения формулы (4) на 2:

$$m\mathrm{v}^2 + kx^2 = kA^2, \quad (5)$$

где k – коэффициент квазиупругой силы, который равен

$$k = m\omega^2.$$

Подставим в (5):

$$m\mathrm{v}^2 + m\omega^2 x^2 = m\omega^2 A^2$$

или

$$\mathrm{v}^2 + \omega^2 x^2 = \omega^2 A^2. \quad (6)$$

Выразим амплитуду колебаний:

$$A = \sqrt{\frac{\mathrm{v}^2}{\omega^2} + x^2}.$$

Подставим числовые значения:

$$A=\sqrt{\frac{0{,}2^2}{4^2}+0{,}05^2}=0{,}0707 \text{ м} = 7{,}07 \text{ см}.$$

Циклическая частота связана с периодом:

$$\omega=\frac{2\pi}{T},$$

откуда период:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\cdot 3{,}14}{4}=1{,}57 \text{ с}.$$

Из уравнения движения (1)

$$cos(\omega t+\varphi_0)=cos\,\varphi=\frac{x}{A},$$

откуда фаза колебаний: $\varphi=arccos\left(\frac{x}{A}\right)$.

Подставим числовые значения:

$$\varphi=arccos\left(\frac{0{,}05}{0{,}0707}\right)=45^0=\frac{\pi}{4} \text{ рад}.$$

Ответ: ω = 4 с$^{-1}$; T = 1,57 с; A = 7,07 см; $\varphi=\frac{\pi}{4}$ рад.

Задача 3. Колебания материальной точки массой m = 0,1 г происходят согласно уравнению $x=Acos(\omega t+\varphi_0)$, где A = 5 см; ω = 20 с$^{-1}$. Определить максимальные значения возвращающей силы F_{max} и кинетической энергии $E_{к\,max}$.

Дано:	**СИ:**
$x=Acos(\omega t+\varphi_0)$	
A = 5 см	0,05 м
ω = 20 с$^{-1}$	
m = 0,1 г	10^{-4} кг
F_{max} = ?	
$E_{к\,max}$ = ?	

Решение:

Запишем уравнение движения:

$$x=0{,}05cos\,20t.$$

Уравнение скорости:

$$\text{v}=\frac{dx}{dt}=-A\omega\,sin\,\omega t,$$

$$\text{v}_{max}=A\omega. \qquad (1)$$

Уравнение ускорения:

$$a=\frac{d\text{v}}{dt}=-A\omega^2 cos\,\omega t.$$

$$a_{max}=A\omega^2.$$

По второму закону Ньютона сила равна

$$F=ma,$$

тогда

$$F=ma=-mA\omega^2 cos\,\omega t,$$

при $|cos\,\omega t|\le 1$

$$F_{max}=mA\omega^2. \qquad (2)$$

Подставляем числовые значения в уравнение:

$$F_{max} = 10^{-4} \cdot 0{,}05 \cdot 20^2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Н} = 2 \text{ мН}.$$

Найдем максимальную кинетическую энергию $E_{\kappa\,max}$:

$$E_{\kappa\,max} = \frac{m\text{v}_{max}^2}{2}. \qquad (3)$$

Подставим выражение для максимальной скорости из уравнения (1) в уравнение (3):

$$E_{\kappa\,max} = \frac{mA^2\omega^2}{2}. \qquad (4)$$

Подставляем числовые значения в уравнение (4):

$$E_{\kappa\,max} = \frac{10^{-4} \cdot 0{,}05^2 \cdot 20^2}{2} = 50 \cdot 10^{-6} \text{ Дж} = 50 \text{ мкДж}.$$

Ответ: F_{max} = 2 мН; $E_{\kappa\,max} = 50$ мкДж.

Задача 4. Материальная точка массой m = 5 г совершает гармонические колебания с частотой ν = 0,5 Гц. Амплитуда колебаний A = 3 см. Определить скорость точки в момент времени, когда смещение $x = 1{,}5$ см; максимальную силу, действующую на точку, полную энергию колеблющейся точки.

Дано:	СИ:
m = 5 г	$5 \cdot 10^{-3}$ кг
A = 3 см	0,03 м
ν = 0,5 Гц	
$x = 1{,}5$ см	0,015 см
v = ?	
F_{max} = ?	
E = ?	

Решение:

Пусть уравнение гармонического колебания имеет вид:

$$x = A cos(\omega t + \varphi). \qquad (1)$$

Формулу скорости получим, взяв первую производную по времени от смещения:

$$\text{v} = \frac{dx}{dt} = -A\omega sin(\omega t + \varphi). \qquad (2)$$

Чтобы выразить скорость через смещение, надо исключить из формул (1) и (2) время. Для этого возведем оба уравнения в квадрат, разделим первое на A^2, второе на $A^2\omega^2$ и сложим:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\text{v}^2}{A^2\omega^2} = 1, \text{ или } \frac{x^2}{A^2} + \frac{\text{v}^2}{4\pi^2\nu^2A^2} = 1. \qquad (3)$$

Решив уравнение (3) относительно v, найдем

$$\text{v} = \pm 2\pi\nu\sqrt{A^2 - x^2}.$$

Выполнив вычисления по этой формуле, получим

$$\text{v} = \pm 8{,}2 \text{ см/с} = \text{v} = \pm 0{,}082 \text{ м/с}.$$

Знак плюс соответствует направлению скорости вдоль положительного направления оси x, знак минус – направлению скорости против оси x.

Силу, действующую на точку, найдем по второму закону Ньютона:

$$F = ma, \qquad (4)$$

где a – ускорение точки, которое получим, взяв производную по времени от скорости:

$$a = \frac{d\text{v}}{dt} = -A\omega^2 cos(\omega t + \varphi), \text{ или}$$

$$a = -4\pi^2 v^2 A cos(\omega t + \varphi).$$

Подставим выражение ускорения в формулу (4):

$$F = -4\pi^2 v^2 m A cos(\omega t + \varphi).$$

Отсюда максимальное значение силы

$$F_{max} = 4\pi^2 v^2 m A.$$

Подставляем числовые значения в выражение (4):

$$F_{max} = 4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 0{,}5^2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^{-2} = 1{,}49 \cdot 10^{-3} \text{ Н} = 1{,}49 \text{ мН}.$$

Полная энергия колеблющейся точки есть сумма кинетической и потенциальной энергий, вычисленных для любого момента времени. В момент времени, когда кинетическая энергия достигает максимального значения, потенциальная энергия равна нулю. Следовательно, полную энергию можно определить как максимальную кинетическую энергию $E_{к\,max}$:

$$E = E_{к\,max} = \frac{m \mathrm{v}_{max}^2}{2}. \quad (5)$$

Максимальную скорость определим из формулы (2), положив $sin(\omega t + \varphi) = 1$:

$$\mathrm{v}_{max} = A\omega = 2\pi v A. \quad (6)$$

Подставим выражение для максимальной скорости в уравнение (5):

$$E = 2\pi^2 m v^2 A^2. \quad (7)$$

Подставляем числовые значения в уравнение (7):

$$E_{к\,max} = 2 \cdot 3{,}14^2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}5^2 \cdot 9 \cdot 10^{-4} = 22{,}1 \cdot 10^{-6} \text{ Дж} = 22{,}1 \text{ мкДж}.$$

Ответ: $\mathrm{v} = \pm 8{,}2$ см/с; F_{max} = 1,49 мН; $E = 22{,}1$ мкДж.

Задачи для самостоятельного решения

1. Точка совершает гармонические колебания. Наибольшее смещение точки равно 10 см, наибольшая скорость 20 см/с. Найти циклическую частоту колебаний и максимальное ускорение точки. Ответ: ω = 2 $с^{-1}$; a_{max} = 40 см/$с^2$.
2. Колебания материальной точки массой m = 0,1 г происходят согласно уравнению $x = A\cos(\omega t+\varphi)$, где A = 5 см; ω = 20 $с^{-1}$. Определить максимальные значения возвращающей силы F_{max} и кинетической энергии $E_{к\,max}$. Ответ: F_{max} = 2 мН; $E_{к\,max}$ = 50 мкДж.
3. Колебания материальной точки происходят согласно уравнению $x = A\cos\omega t$, где A = 8 см; $\omega = \pi/6$ $с^{-1}$. В момент, когда возвращающая сила в первый раз достигла значения – 5 мН, потенциальная энергия точки стала равной 100 мкДж. Найти этот момент времени и соответствующую ему фазу. Ответ: t = 2 с; $\omega(t) = \frac{\pi}{3}$ рад.

Гармонический осциллятор
Пружинный, физический и математический маятники

Гармоническим осциллятором называется система, совершающая колебания, описываемые уравнением вида

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{1.17}$$

Примером гармонического осциллятора являются пружинный, физический и математический маятники, колебательный контур.

Пружинный маятник – это груз массой m, подвешенный на абсолютно упругой пружине и совершающий гармонические колебания под действием упругой силы $F = -kx$, где k – коэффициент упругости или жесткость пружины.

Уравнение движения маятника:

$$m\ddot{x} = -kx$$

или

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Из уравнения (1.17) следует, что пружинный маятник совершает гармонические колебания по закону

$$x = A cos\left(\omega_0 t + \varphi\right).$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{1.18}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{1.19}$$

Потенциальная энергия пружинного маятника равна

$$E_n = \frac{kx^2}{2}.$$

Физический маятник – это твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси подвеса, не проходящей через центр масс тела (рис. 6).

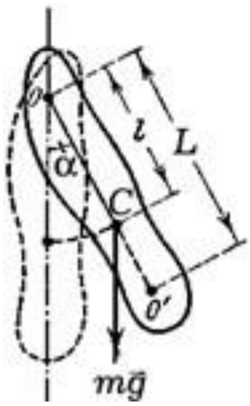

Рис. 6. Физический маятник

Основной закон вращательного движения для физического маятника

$$M = J\varepsilon = J\ddot{\alpha} = F_\tau \cdot l = -mgl\, sin\alpha \approx -mgl\alpha\,, \qquad (1.20)$$

где J – момент инерции маятника относительно оси вращения, m – масса маятника, g – ускорение свободного падения, l – расстояние от точки подвеса до центра тяжести маятника.

Уравнение (1.20) можно записать в виде

$$J\ddot{\alpha} + mgl\alpha = 0$$

или

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgl}{J}\alpha = 0$$

Принимая, что для физического маятника

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}}\,, \qquad (1.21)$$

получаем уравнение

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0\,,$$

решение которого примет вид:

$$\alpha = \alpha_0\, cos\left(\omega_0 t + \varphi\right). \qquad (1.21)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\,, \qquad (1.22)$$

где $L = \dfrac{J}{ml}$ – приведенная длина физического маятника.

Приведенная длина физического маятника – это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

Математический маятник – это идеализированная система, состоящая из материальной точки m, подвешенной на нерастяжимой невесомой нити и колеблющейся под действием силы тяжести.

Момент инерции математического маятника длиной l

$$J = ml^2, \qquad (1.23)$$

период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,. \qquad (1.24)$$

Примеры решения задач

Задача 1. Математический маятник длиной l = 2 м совершает гармонические колебания. В некоторый момент времени смещение от положения равновесия x = 0,15 м, возвращающая сила F = 3 Н. Определить массу маятника.

Дано:	СИ:	Решение:
$l = 2$ м $F = 3$ Н $x = 0{,}15$ м		
$m = ?$		

Уравнение колебания маятника запишем в виде:

$$x = A\sin\left(\omega t + \varphi_0\right), \qquad (1)$$

где ω – циклическая (круговая) частота гармонических колебаний, связанная с периодом следующим соотношением:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Период колебаний математического маятника зависит от длины маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \qquad (2)$$

следовательно, круговая частота может быть представлена формулой

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \qquad (3)$$

Скорость маятника равна первой производной смещения по времени:

$$\mathrm{v} = x' = \frac{dx}{dt} = \frac{d\left(A\sin\left(\omega t + \varphi_0\right)\right)}{dt} = A\omega\cos\left(\omega t + \varphi_0\right).$$

Ускорение маятника – вторая производная смещения по времени или первая производная скорости по времени:

$$a = x'' = \frac{d\mathrm{v}}{dt} = \frac{d\left(A\omega\cos\left(\omega t + \varphi_0\right)\right)}{dt} = -A\omega^2\sin\left(\omega t + \varphi_0\right). \qquad (4)$$

Согласно II закону Ньютона

$$F = ma = -mA\omega^2\sin\left(\omega t + \varphi_0\right), \qquad (5)$$

или с учетом формулы (1):

$$F = -m\omega^2 x. \qquad (6)$$

Заменим круговую частоту, использовав формулу (3):

$$F = -\frac{mxg}{l},$$

получим расчетную формулу для массы маятника

$$m = -\frac{Fl}{gx}. \qquad (7)$$

При подстановке численных значений знак «–» не учитываем, т.к. в условии заданы абсолютные значения величин

$$m = \frac{3\cdot 2}{10\cdot 0{,}15} = 4 \text{ кг}.$$

Задача 2. Однородный диск радиусом R = 30 см колеблется около горизонтальной оси, проходящей через одну из образующих цилиндрической поверхности диска (рис. 7). Каков период колебаний?

Дано:	СИ:	Решение:
R = 30 см	0,3 м	Период колебаний физического маятника:
T = ?		

$$T = \sqrt{\frac{J}{mgl}} = \sqrt{\frac{J}{mgR}}\,. \qquad (1)$$

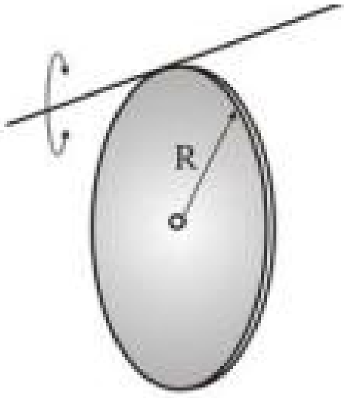

Рис. 7. Однородный диск

Момент инерции диска относительно оси, проходящей через его центр, перпендикулярно плоскости диска равен:

$$J_C = \frac{mR^2}{2}.$$

По теореме Штейнера момент инерции диска относительно оси, проходящей через одну из образующих цилиндрической поверхности:

$$J = J_C + mR^2 = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3mR^2}{2}.$$

Подставим полученную формулу в формулу (1) и получим

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2}mR^2}{mgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}}\,.$$

Подставим числовые значения:

$$T = 2\cdot 3{,}14\sqrt{\frac{3\cdot 0{,}3}{2\cdot 9{,}81}} \approx 1{,}35 \text{ с.}$$

Ответ: T = 1,35с.

Задача 3. На стержне длиной l = 30 см укреплены два одинаковых грузика: один – в середине стержня, другой – на одном из его концов (рис. 8). Стержень с грузиком колеблется около горизонтальной оси, проходящей через свободный конец стержня. Определить приведённую длину L и период T колебаний такой системы. Массой стержня пренебречь.

Дано:	**СИ:**
$l = 30$ см	0,3 м
$l_1 = l_2 = \dfrac{l}{2}$	
$m_1 = m_2 = m$	
$L = ?$	
$T = ?$	

Решение:

Из условия равенства периодов колебаний физического и математического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

представим формулу для приведенной длины L физического маятника

$$L = \frac{J}{md},$$

где J – момент инерции тела относительно оси колебаний, m – масса маятника, d – расстояние от оси колебаний до центра тяжести системы.

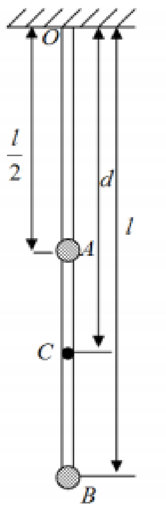

Рис. 8. Физический маятник в виде стержня с грузиками

Считая грузики материальными точками, выразим массу маятника

$$m = m_1 + m_2 = 2m$$

и момент инерции относительно точки O:

$$J = J_1 + J_2 = m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m_2 l^2 = ml^2\left(\frac{1}{4} + 1\right) = \frac{5}{4}ml^2$$

Положение центра тяжести системы относительно оси колебаний:

$$d = \frac{\sum m_i x_i}{m_i} = \frac{m_1\dfrac{l}{2} + m_2 l}{m_1 + m_2} = \frac{m\dfrac{l}{2} + ml}{m + m} = \frac{\dfrac{3}{2}ml}{2m} = \frac{3}{4}l.$$

Тогда приведённая длина:

$$L = \frac{\dfrac{5}{4}ml^2}{2m\cdot\dfrac{3}{4}l} = \frac{5l}{6} = 0{,}25\,\text{м}.$$

Период колебаний маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{5l}{6g}} = 2\cdot 3{,}14\sqrt{\frac{0{,}25}{9{,}81}} = 1\text{с}.$$

Ответ: $L = 0{,}25$ м, $T = 1$ с.

Задачи для самостоятельного решения

1. Гиря, подвешенная к пружине, колеблется по вертикали с амплитудой A = 4 см. Определить полную энергию колебаний гири, если жесткость пружины равна k = 1 кН/м. Ответ: E = 0,8 Дж.
2. Тонкий обруч, подвешенный на гвоздь, вбитый горизонтально в стену, колеблется в плоскости, параллельной стене. Радиус обруча равен 30 см. Вычислить период колебаний обруча. Ответ: T = 1, 55 с.
3. Диск радиусом 24 см колеблется около горизонтальной оси, проходящей через середину одного из радиусов перпендикулярно плоскости. Определить приведенную длину и период колебаний такого маятника. Ответ: L = 36 см; T = 1,2 с.
4. Математический маятник длиной l_1 = 40 см и физический маятник в виде тонкого прямого стержня длиной l_2 = 60 см синхронно колеблются около одной и той же горизонтальной оси. Определить расстояние a центра масс стержня от оси колебаний. Ответ: a = 10 см.

Затухающие колебания

Затухающими называются колебания, амплитуда которых из-за потерь энергии реальной колебательной системы с течением времени уменьшается.

Приближенно можно считать, что при небольших скоростях движения силы, вызывающие затухание механических колебаний, пропорциональны величине скорости. Сила сопротивления движению

$$F_c = -r\text{v}, \tag{1.25}$$

где r – коэффициент сопротивления. Знак «минус» указывает, что сила сопротивления всегда направлена в сторону, противоположную движению тела.

Второй закон Ньютона для затухающих колебаний имеет вид:

$$m\vec{a} = \vec{F}_c + \vec{F},$$

где $F = -kx$ – квазиупругая сила.

Для колебаний, совершаемых вдоль оси X, второй закон Ньютона запишем в виде:

$$m\ddot{x} = -r\dot{x} - kx. \tag{1.26}$$

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний линейной системы имеет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \tag{1.27}$$

где x – колеблющаяся величина, $\beta = \frac{r}{2m}$ – коэффициент затухания, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – собственная частота свободных затухающих колебаний той же колебательной системы при $\beta = 0$, которая называется собственной частотой колебательной системы.

Решение уравнения (1.25) имеет вид:

$$x = A_0 e^{-\beta t} cos(\omega t + \varphi), \quad (1.28)$$

где $A = A_0 e^{-\beta t}$ – амплитуда затухающих колебаний, A_0 – начальная амплитуда, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – частота затухающих колебаний. Уравнение (1.26) справедливо в случае малых затуханий $(\beta^2 << \omega_0^2)$. Зависимость (1.26) показана на рис. 9.

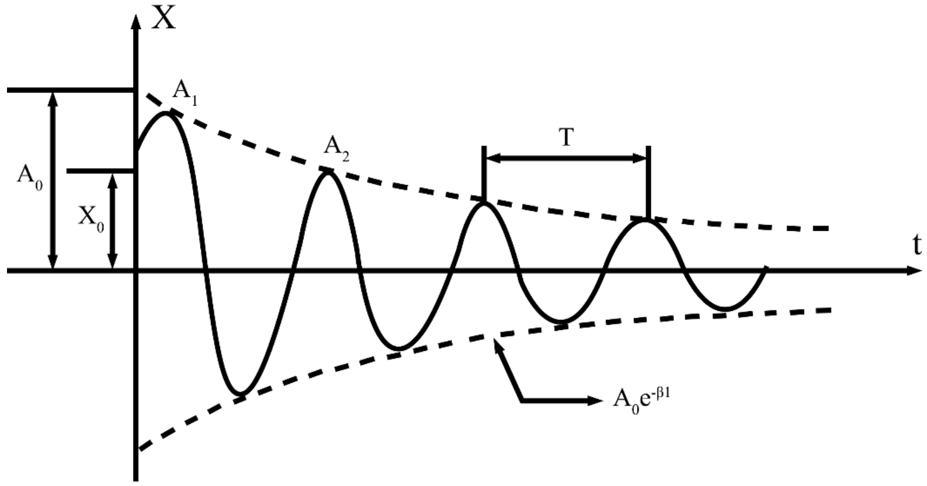

Рис. 9. Зависимость координаты точки от времени при затухающих колебаниях

Промежуток времени $\tau = 1/\delta$, в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в *e* раз, называется временем релаксации:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (1.29)$$

Декремент затухания характеризует уменьшение амплитуды затухающих колебаний:

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T},$$

логарифмический декремент затухания:

$$\delta = ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}, \quad (1.30)$$

где N_e – число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в *e* раз.

Добротность колебательной системы равна

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = \pi N_e = \frac{\pi}{\beta T_0} = \frac{\omega_0}{2\beta}, \qquad (1.31)$$

при $\beta^2 << \omega_0^2$, следует $T \approx T_0$.

При увеличении коэффициента затухания β период затухающих колебаний растет и при $\beta = \omega_0$ обращается в бесконечность, т. е. движение перестает быть периодическим. В данном случае колеблющаяся величина асимптотически приближается к нулю, когда $t \to \infty$. Процесс не будет колебательным. Он называется апериодическим.

На практике нередко возникает задача погашения колебаний в момент их возникновения (например, колебания стрелки измерительного прибора, колебания кузова автомобиля). Устройства, которые позволяют увеличить затухание колебательной системы, называются демпферами или амортизаторами.

Автоколебания – это незатухающие колебания, поддерживаемые в диссипативной системе за счет постоянного внешнего источника энергии, причем свойства этих колебаний определяются самой системой.

Примеры автоколебательных систем: часы, двигатели внутреннего сгорания и т. д.

Примеры решения задач

Задача 1. Гиря массой m = 0,5 кг подвешена к пружине, жесткость которой k = 32 Н/м, и совершает затухающие колебания. Определить их период T в двух случаях: 1) за время, в течение которого произошло n_1 = 88 колебаний, амплитуда уменьшилась в N_1 = 2 раза; 2) за время двух колебаний ($n_2 = 2$) амплитуда уменьшилась в N_2 = 20 раз.

Дано:	СИ:
m = 0,5 кг	
k = 32 Н/м	
$n_1 = 88, n_2 = 2$	
N_1 = 2, N_2 = 20	
T_1 = ?, T_2 = ?	

Решение:

Сопротивление среды уменьшает частоту свободных колебаний и соответственно увеличивает период колебаний. Период затухающих колебаний определяется по соотношению

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \qquad (1)$$

Циклическую частоту собственных колебаний определим по формуле

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{32}{0,5}} = 8 \text{ с}^{-1}.$$

Коэффициент затухания равен

$$\beta = \frac{\delta}{T}, \qquad (2)$$

где δ – логарифмический декремент затухания. Для того, чтобы найти величину δ, обратимся к уравнению затухающих колебаний

$$x = A_0 e^{-\beta t} cos\left(\omega t + \varphi\right).$$

Уменьшающуюся со временем амплитуду выразим как

$$A = A_0 e^{-\beta t} = A_0 e^{-\frac{\delta t}{T}}.$$

Пользуясь введенными в условии задачи обозначениями, можно записать следующие формулы:

$$\frac{A_0}{A} = N\,,\ \frac{t}{T} = n.$$

Тогда

$$\frac{A_0}{A} = e^{\frac{\delta t}{T}} = e^{\delta n} = N\,,$$

отсюда, логарифмируя, определяем δ:

$$\delta = \frac{ln\,N}{n}.$$

Подставив численные значения N и n для двух случаев, получим:

$$\delta_1 = \frac{ln\,2}{88} = 0{,}0079\,,\ \delta_2 = \frac{ln\,2}{2} = 1{,}5.$$

Запишем формулу (1) для периода колебаний с учетом выражения (2) для δ:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\delta^2}{T^2}}}. \qquad (3)$$

Преобразуем (3), выразив период колебаний:

$$T = \frac{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}{\omega_0}. \qquad (4)$$

Приступая к вычислениям периода, заметим, что в первом случае в числителе формулы (4) δ_1^2 много меньше $4\pi^2$, поэтому, сохраняя достаточную точность вычислений, можно пренебречь слагаемым δ_1^2, тогда расчеты выполним по формуле:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{8} = 0{,}78\ \text{с}.$$

Во втором случае величину δ_2^2 отбросить нельзя. Производим вычисления:

$$T_2 = \frac{\sqrt{4\pi^2 + 1{,}5^2}}{\omega_0} = 0{,}81\ \text{с}.$$

Ответ: $T_1 = 0{,}78$ с; $T_2 = 0{,}81$ с.

Задача 2. Период затухающих колебаний $T = 4$ с. Логарифмический декремент затухания равен $\delta = 1{,}6$, начальная фаза колебаний 0. При $t = \frac{T}{4}$ смещение точки равно $x = 4{,}5$ см. Написать уравнение этого колебания.

Дано:	**СИ:**
$T = 4$ с	
$\delta = 1,6$	
$x = 4,5$ см	0,045 м
$t = \dfrac{T}{4} = 1$ с	
$x(t) = ?$	

Решение:

Определим круговую частоту затухающих колебаний:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\ \text{с}^{-1},$$

коэффициент затухания:

$$\beta = \frac{\delta}{T} = \frac{1,6}{4} = 0,4.$$

В уравнение затухающих колебаний

$$x = A_0 e^{-\beta t} \sin \omega t$$

подставим значения величин:

$$4,5 = A_0 e^{-0,4} \sin \frac{\pi}{2}. \qquad (1)$$

Из уравнения (1) следует, что $A_0 = 4,5 e^{0,4} = 6,7$ см.
Запишем уравнение колебания:

$$x = 6,7 e^{-0,4t} \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right)\ (\text{см}).$$

Ответ: $x = 6,7 e^{-0,4t} \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right)$ (см).

Задача 3. Тело массой m = 0,5 кг совершает затухающие колебания. В некоторый момент времени смещение равно x = 5 см , скорость равна v = – 2 м/с и ускорение тела равно a = 1 м/с^2. Определить коэффициент затухания β, собственную частоту ω_0 и период T затухающих колебаний, если коэффициент жесткости пружины равен $k = 20$ Н/м.

Дано:	**СИ:**
$m = 0,5$ кг	
$k = 20$ Н/м	
$x = 5$ см	0,05 м
v = – 2 м/с	
a = 1 м/с^2	
$\beta = ?$	
$\omega_0 = ?$	
$T = ?$	

Решение:

Второй закон Ньютона для затухающих колебаний имеет вид

$$m\vec{a} = \vec{F}_c + \vec{F}_y, \qquad (1)$$

где $F_y = -kx$, $F_c = -r\text{v}$, тогда в скалярной форме уравнение запишем так:

$$ma = F_c + F_y$$

или

$$ma = -r\text{v} - kx. \qquad (2)$$

Разделим уравнение на массу тела *m:*

$$a = -\frac{r}{m}\text{v} - \frac{k}{m}x, \qquad (3)$$

обозначим коэффициент затухания $\beta = \dfrac{r}{2m}$, тогда уравнение (3) примет вид:

$$a = -2\beta\text{v} - \frac{k}{m}x.$$

Следовательно, коэффициент затухания:

$$\beta = -\frac{a + \frac{k}{m}x}{2v}. \tag{4}$$

Собственная частота колебаний $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, частота затухающих колебаний $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, период затухающих колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$.

Подставим численные значения и произведем вычисления:

$$\beta = -\frac{a + \frac{k}{m}x}{2v} = -\frac{1 + \frac{20}{0,5}\cdot 0,05}{2\cdot(-2)} = 0,75 \text{ с}^{-1},$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20}{0,5}} = 6,3 \text{ с}^{-1},$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{6,3^2 - 0,75^2} = 5,7 \text{ с}^{-1},$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\cdot 3,14}{5,7} = 1,1 \text{ с}.$$

Ответ: $\beta = 0,75$ с$^{-1}$; $\omega_0 = 6,3$ с$^{-1}$; $\omega = 5,7$ с$^{-1}$; $T = 1,1$ с.

Задача 4. Тело массой m = 100 г, прикрепленное к упругой пружине, совершает затухающие колебания $x = e^{-8t}\cos 6t$ (м). Определить для момента времени t = 1 с силу упругости, силу сопротивления, потенциальную, кинетическую, полную механическую энергию.

Дано:	СИ:
m = 100 г	0,1 кг
$x = e^{-8t}\cos 6t$	
$t = 1$ с	
$x(t)$ = ?	

Решение:

Из сравнения уравнения затухающих колебаний, записанного в общем виде $x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0)$, и уравнения, заданного в условии данной задачи $x = e^{-8t}\cos 6t$, следует, что начальная амплитуда $A_0 = 1$ м; коэффициент затухания $\beta = 8$ с$^{-1}$; круговая частота затухающих колебаний $\omega = 6$ с$^{-1}$; начальная фаза $\varphi_0 = 0$.

Найдем собственную частоту колебаний ω_0 через коэффициент затухания β и частоту затухающих колебаний ω:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \beta^2} = \sqrt{36 + 64} = 10 \text{ с}^{-1}.$$

Определим коэффициент жесткости пружины:

$$k = m\omega_0^2 = 0,1\cdot 100 = 10 \text{ Н/м}.$$

Найдем силу упругости в момент времени $t = 1$ с:

$$F_y = -kx = -ke^{-\beta t}\cos\omega t = -10\cdot e^{-8}\cdot\cos 6 = -0,0032 \text{ Н}.$$

Для определения силы сопротивления выразим коэффициент сопротивления через коэффициент затухания:

$$r = 2m\beta = 2 \cdot 0{,}1 \cdot 8 = 1{,}6 \text{ кг/с}.$$

Скорость найдем как производную смещения тела:

$$\text{v} = x' = \left(A_0 e^{-\beta t} \cos \omega t \right)' = -A_0 \beta e^{-\beta t} \cos \omega t - A_0 \omega e^{-\beta t} \sin \omega t =$$

$$= -A_0 e^{-\beta t} \left(\beta \cos \omega t + \omega \sin \omega t \right)$$

В момент времени $t = 1$ с

$\text{v} = -A_0 e^{-\beta t} \left(\beta \cos \omega t + \omega \sin \omega t \right) = -e^{-8} \left(8 \cos 6 + 6 \sin 6 \right) = -0{,}002 = -2 \cdot 10^{-3}$ м/с,

сила сопротивления $F_c = -r\text{v} = 1{,}6 \cdot 0{,}002 = 0{,}0032$ Н.

Кинетическая энергия $E_к = \dfrac{m\text{v}^2}{2} = \dfrac{0{,}1 \cdot \left(2 \cdot 10^{-3} \right)^2}{2} = 0{,}2 \cdot 10^{-6}$ Дж,

потенциальная энергия $E_п = \dfrac{kx^2}{2} = \dfrac{k\left(e^{-8t} \cos 6t \right)^2}{2} = \dfrac{10\left(e^{-8} \cos 6 \right)^2}{2} = 0{,}52 \cdot 10^{-6}$ Дж,

полная энергия $E = E_к + E_п = \left(0{,}2 + 0{,}52 \right) \cdot 10^{-6} = 0{,}72 \cdot 10^{-6}$ Дж.

Ответ: $F_у = -3{,}2$ мН; $F_c = 3{,}2$ мН; $E_к = 0{,}2$ мкДж; $E_п = 0{,}52$ мкДж; $E = 0{,}72$ мкДж.

Задачи для самостоятельного решения

1. Логарифмический декремент затухания математического маятника δ = 0,2. Во сколько раз уменьшится амплитуда колебаний за одно полное колебание маятника? Ответ: 1,22.
2. Найти логарифмический декремент затухания δ математического маятника, если за время t = 1 мин амплитуда колебаний уменьшилась в 2 раза. Длина маятника l = 1 м. Ответ: 0,023.
3. Математический маятник длиной l = 24,7 см совершает затухающие колебания. Через какое время t энергия колебаний маятника уменьшится в 9,4 раза? Задачу решить при значении логарифмического декремента затухания δ = 0,01. Ответ: 120 с.
4. Амплитуда затухающих колебаний математического маятника за время t = 1 мин уменьшилась вдвое. Во сколько раз уменьшится амплитуда за время t = 3 мин? Ответ: в 8 раз.
5. Период затухающих колебаний 1 с, логарифмический декремент затухания δ = 0,3, начальная фаза равна нулю. Смещение точки при t = 2T составляет 5 см. Записать уравнение движения этого колебания. Ответ: $x = 9{,}1 e^{-0{,}3t} \cos 2\pi t$.

Вынужденные колебания

Колебания, возникающие под действием внешней периодически изменяющейся силы $F = F_0 cos(\omega t + \varphi)$, называются вынужденными колебаниями.

Уравнение вынужденных колебаний можно свести к линейному неоднородному дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 cos\,\omega t. \quad (1.32)$$

Решение уравнения (1.31) будет иметь вид:

$$x = x_1(t) + x_2(t). \quad (1.33)$$

Первое слагаемое соответствует свободным затухающим колебаниям:

$$x_1(t) = A_0 e^{-\beta t} cos(\omega_1 t + \varphi_0), \quad (1.34)$$

где $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

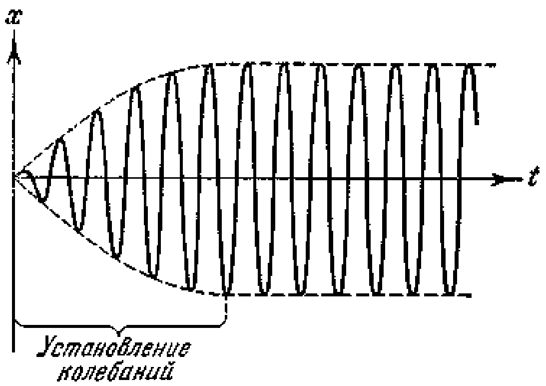

Рис. 10. Зависимость смещения точки от времени
при вынужденных колебаниях

Слагаемое $x_1(t)$ в уравнении (1.32) играет существенную роль только в начальной стадии процесса при установлении колебаний (рис. 10). Через некоторое время после начала колебаний свободные колебания прекращаются $x \approx x_2(t)$,

$$x = A cos(\omega t + \varphi), \quad (1.35)$$

где амплитуда вынужденных колебаний

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \quad (1.36)$$

фаза вынужденных колебаний

$$\varphi = arctg\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (1.37)$$

Зависимость амплитуды A вынужденных колебаний от ω имеет максимум. Частота, при которой амплитуда достигает максимума, называется резонансной частотой

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}\,. \qquad (1.38)$$

Если β^2 много меньше ω_0^2, то $\omega_{рез} \to \omega_0$.

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающих сил к частоте $\omega_{рез}$ называется **резонансом**.

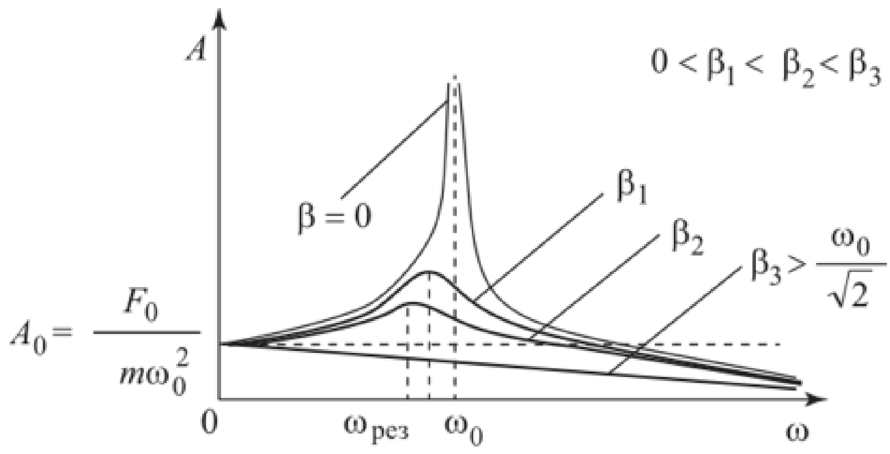

Рис. 11. Резонансные кривые

Резонансная амплитуда будет равна:

$$A_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}\,. \qquad (1.39)$$

При β^2 много меньше ω_0^2:

$$A_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\omega_0}\,.$$

Из выражения

$$tg\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \qquad (1.40)$$

следует, что если затухание в системе отсутствует ($\beta = 0$), то только в этом случае колебания и вынуждающая сила имеют одинаковые фазы; во всех других случаях $\varphi = 0$.

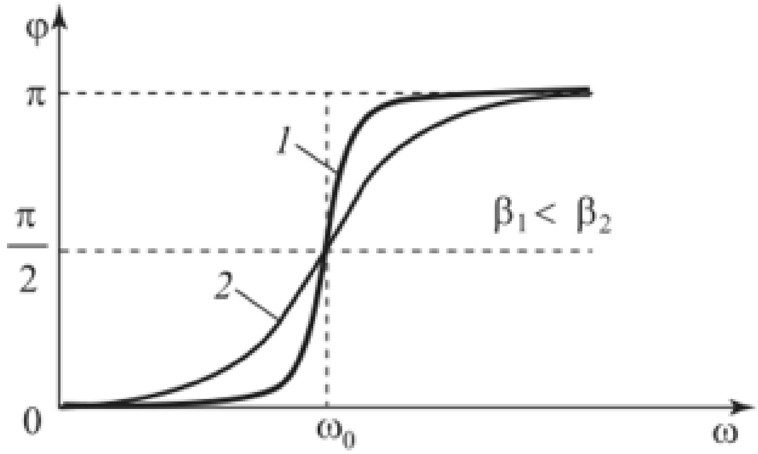

Рис. 12. Фазовые резонансные кривые

Зависимость $\varphi = 0$ от ω при разных коэффициентах β графически представлена на рис. 12, из которого следует, что при изменении ω изменяется и сдвиг фаз φ. Из формулы (1.36) вытекает, что при $\omega = 0$ $\varphi = 0$, а при $\omega = \omega_0$, независимо от значения коэффициента затухания β, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, т. е. сила опережает по фазе колебания на $\dfrac{\pi}{2}$. При дальнейшем увеличении ω сдвиг фаз возрастает и при ω много большем, чем ω_0, $\varphi = \pi$, т. е. фаза колебаний почти противоположна фазе внешней силы.

Примеры решения задач

Задача 1. Шар массой $m = 17{,}1$ т и радиусом $R = 80$ см, служащий для слома домов, подвешен на тросе длиной $b = 3{,}6$ м. Верхний конец троса закреплен, масса троса пренебрежимо мала по сравнению с массой шара. Шар раскачивают в вертикальной плоскости, приложив вынуждающую силу, момент которой относительно оси вращения меняется по закону: $M_z = M_0 cos(\omega t)$. По какому закону будет изменяться угол отклонения троса от положения равновесия, если частота и амплитуда момента вынуждающей силы соответственно равны $\omega = 7{,}3$ $с^{-1}$ и 200 кН·м? Коэффициент затухания равен $\beta = 5{,}4\,с^{-1}$. Найти полную энергию колебаний системы.

Дано:	**СИ:**
$m = 17{,}1$ т	$1{,}71 \cdot 10^4$ кг
$R = 80$ см	0,8 м
$b = 3{,}6$ м	
$M_z = M_0 cos(\omega t)$	

Решение:
По условию задачи массой троса можно пренебречь, а шар – считать физическим маятником, ось колебаний которого находится на расстоянии

$$l = R + b \qquad (1)$$

$\omega = 7{,}3$ с$^{-1}$

$M_0 = 2 \cdot 10^5$ Н·м

$\beta = 5{,}4$ с$^{-1}$

$\theta(t)$ = ?

W = ?

от центра шара, поэтому обобщенной координатой удобно выбрать угол отклонения троса от равновесного (вертикального) положения θ (рис. 13) и записать закон установившихся вынужденных колебаний шара для этого угла:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi), \qquad (2)$$

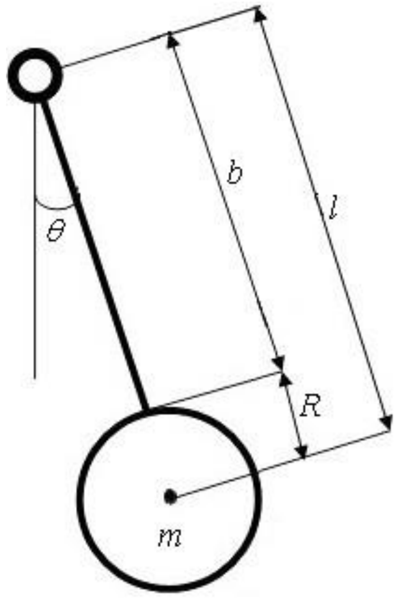

Рис. 13. Физический маятник в виде шара, подвешенного на тросе

где, с учетом того, что обобщенной вынуждающей силой является момент силы $M_z = M_0 cos(\omega t)$ а обобщенной массой – момент инерции шара относительно оси колебаний I, выражение (1.35) для амплитуды имеет вид:

$$\theta_0 = \frac{M_0}{I} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}. \qquad (3)$$

Разность фаз φ между углом и вынуждающей силой вычисляется по формуле (1.36):

$$\varphi = arctg\left\{\frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\right\}. \qquad (4)$$

Момент инерции шара относительно оси колебаний определяется с помощью теоремы Гюйгенса – Штейнера:

$$I = I_C + ml^2 = \frac{2mR^2}{5} + m(R+b)^2 = m\left[0{,}4R^2 + (R+b)^2\right]. \qquad (5)$$

Собственная частота колебаний шара как физического маятника:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}} = \sqrt{\frac{mg(R+b)}{m\left[0{,}4R^2 + (R+b)^2\right]}} == \sqrt{\frac{g(R+b)}{\left[0{,}4R^2 + (R+b)^2\right]}}. \qquad (6)$$

Подставляя равенства (5) и (6) в формулы (3) и (4), получим расчетные выражения для параметров вынужденных колебаний:

$$\theta_0=\frac{M_0}{m\left[0{,}4R^2+\left(R+b\right)^2\right]}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{g(R+b)}{\left[0{,}4R^2+\left(R+b\right)^2\right]}-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}};\qquad(7)$$

$$\varphi=arctg\left\{\frac{2\beta\omega}{\omega^2-\frac{g\left(R+b\right)}{\left[0{,}4R^2+\left(R+b\right)^2\right]}}\right\}.\qquad(8)$$

Подставляем в соотношения (7) и (8) числовые значения:

$$\theta_0=\frac{2\cdot10^5}{17{,}1\cdot10^3\left[0{,}4\cdot0{,}8^2+\left(0{,}8+3{,}6\right)^2\right]}\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{9{,}8\cdot(0{,}8+3{,}6)}{\left[0{,}4\cdot0{,}8^2+\left(0{,}8+3{,}6\right)^2\right]}-7{,}3^2\right)^2+4\cdot5{,}4^2\cdot7{,}3^2}}=0{,}063\ \text{рад}\qquad(9)$$

$$\varphi=arctg\left\{\frac{2\cdot5{,}4\cdot7{,}3}{7{,}3^2-\frac{9{,}8\cdot\left(0{,}8+3{,}6\right)}{\left[0{,}4\cdot0{,}8^2+\left(0{,}8+3{,}6\right)^2\right]}}\right\}=57^0=0{,}98\ \text{рад}.$$

Следовательно, закон изменения угла отклонения троса от положения равновесия имеет вид:

$$\theta\left(t\right)=0{,}063\cos\left(7{,}3t+0{,}98\right).\qquad(10)$$

Полная энергия колебаний маятника вычисляется с учетом численного значения амплитуды (9) по формуле:

$$W=\frac{mgl\theta_m{}^2}{2}=\frac{mg\left(R+b\right)\theta_m{}^2}{2},\qquad(11)$$

подставим числовые значения:

$$W=\frac{1{,}71\cdot10^4\cdot9{,}8\left(0{,}8+3{,}6\right)0{,}063^2}{2}=1463\ \text{Дж}.$$

Ответ: $\theta\left(t\right)=\theta_0\cos\left(\omega t+\varphi\right)$ где $\theta_0=0{,}063$ рад; $\omega=7{,}3$ с$^{-1}$; $\varphi=57^0$ °; $W=1{,}46\cdot10^3$ Дж.

Задача 2. При какой частоте колебаний гармонической вынуждающей силы амплитуда колебаний груза массой 420 г на пружине жесткостью 20 Н/м принимает максимальное значение? Найти это значение, если амплитуда колебаний силы равна 8,5 Н, а коэффициент затухания колебаний груза равен 4,3 $с^{-1}$.

Дано:	**СИ:**
$m = 0{,}42$ кг	
$k = 20$ Н/м	
$F_0 = 8{,}5$ Н	
$\beta = 4{,}3$ $с^{-1}$	
$\theta(t) = ?$	
$W = ?$	

Решение: Собственная частота колебаний груза:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \qquad (1)$$

Максимальное значение амплитуды вынужденных колебаний $A_{рез}$ наблюдается при резонансе и определяется по формуле (1.38):

$$A_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{F_0}{2m\beta\sqrt{\frac{k}{m} - \beta^2}}. \qquad (2)$$

Резонансная частота определяется по формуле (1.37):

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - 2\beta^2}. \qquad (3)$$

Подставив в выражения (2) и (3) данные задачи, получим:

$$\omega_{рез} = \sqrt{\frac{20}{0{,}42} - 2\cdot 4{,}3^2} = 3{,}26 \text{ с}^{-1};$$

$$A_{рез} = \frac{8{,}5}{2\cdot 0{,}42\cdot 5}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{20}{0{,}42} - 5^2}} = 0{,}15 \text{ м.}$$

Ответ: $\omega_{рез} = 3{,}26$ $с^{-1}$; $A_{рез} = 0{,}15$ м.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Пружинный маятник (жесткость пружины равна k = 10 Н/м, масса груза равна m = 100 г) совершает вынужденные колебания в вязкой среде с коэффициентом сопротивления r = 0,02 кг/с. Определить коэффициент затухания β и резонансную амплитуду $A_{рез}$, если амплитудное значение вынуждающей силы F_0 = 10 мН. Ответ: β = 0,1 $с^{-1}$; $A_{рез}$ = 5 см.

Задача 2. Тело совершает вынужденные колебания в среде с коэффициентом сопротивления r = 1 г/с. Считая затухание малым, определить амплитудное значение вынуждающей силы F_0, если резонансная амплитуда $A_{рез}$ = 0,5 см и частота собственных колебаний равна ν_0 = 10 Гц. Ответ: F_0 = 0,314 мН.

Задача 3. Амплитуды вынужденных гармонических колебаний при частоте ν_1 = 400 Гц и ν_2 = 600 Гц равны между собой. Определить резонансную частоту $\nu_{рез}$. Затуханием пренебречь. Ответ: $\nu_{рез}$ = 510 Гц.

Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты. Биения

Примером сложения колебаний одного направления являются колебания шарика на пружине в качающемся на рельсах вагоне. Сложим гармонические колебания одного направления и одинаковой частоты, воспользовавшись методом вращающегося вектора амплитуды (методом векторных диаграмм) (рис. 14)

$$\begin{cases} x_1 = A_1 cos\left(\omega_0 t + \varphi_1\right) \\ x_2 = A_2 cos\left(\omega_0 t + \varphi_2\right) \end{cases}.$$

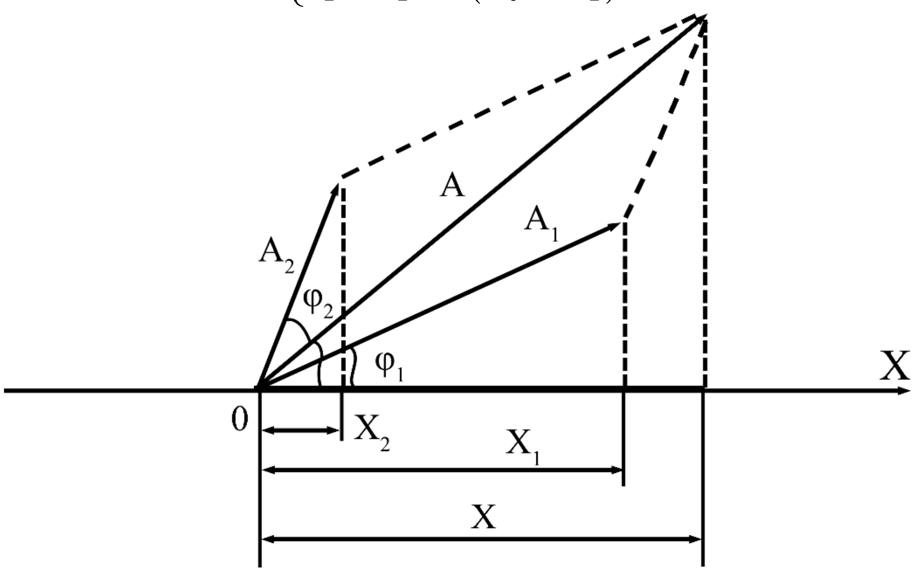

Рис. 14. Метод векторных диаграмм

Уравнение результирующих колебаний будет иметь вид:

$$x = x_1 + x_2 = Acos\left(\omega_0 t + \varphi\right). \qquad (1.41)$$

В выражении (1.40) амплитуда A и начальная фаза φ, соответственно, задаются соотношениями:

$$\begin{cases} A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 cos\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) \\ tg\varphi = \dfrac{A_1 sin\varphi_1 + A_2 sin\varphi_2}{A_1 cos\varphi_1 + A_2 cos\varphi_2} \end{cases}. \qquad (1.42)$$

Таким образом, результирующие колебания будут совершаться в том же направлении, и их амплитуда будет зависеть от разности фаз $\Delta\varphi = \left(\varphi_2 - \varphi_1\right)$:

1. $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2m\pi \quad \left(m = 0, 1, 2, ...\right)$, тогда $A = A_1 + A_2$, т. е. колебания усиливаются.
2. $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pm\left(2m+1\right)\pi \quad \left(m = 0, 1, 2, ...\right)$, тогда $A = \left|A_1 - A_2\right|$, т. е. колебания ослабляются.

Для практики особый интерес представляет случай, когда два складываемых гармоничных колебания одинакового направления мало отличаются по частоте.

Периодические изменения амплитуды колебаний, возникающие при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами, называются **биениями.**

Пусть амплитуды складываемых колебаний равны A, а частоты равны ω и $\omega + \Delta\omega$, причем $\Delta\omega$ много меньше, чем ω. Начало отсчета выберем так, чтобы начальные фазы обоих колебаний были равны нулю

$$\begin{cases} x_1 = A cos\,\omega t \\ x_2 = A cos(\omega + \Delta\omega)t \end{cases}.$$

Складывая эти колебания, и учитывая, что $\frac{\Delta\omega}{2}$ много меньше, чем ω, найдем

$$x = \left(2A cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right) cos\,\omega t. \qquad (1.43)$$

Результирующее колебание x можно рассматривать как гармоническое с частотой ω, а амплитуда, $A_б$ которого изменяется по следующему периодическому закону (рис. 15):

$$A_б = \left|2A cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right|. \qquad (1.44)$$

Частота изменения $A_б$ в два раза больше частоты изменения косинуса, (так как берётся по модулю), т. е. частота биений равна разности частот складываемых колебаний $\omega_б = \Delta\omega$.

Период биений $T_б = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$.

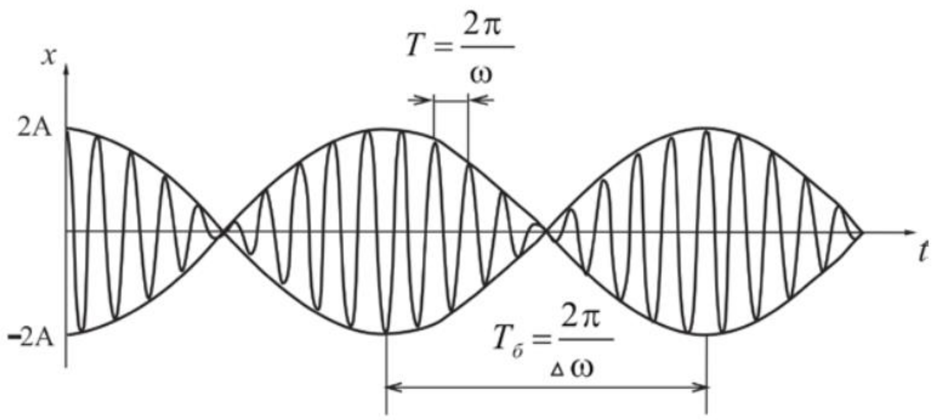

Рис. 15. Сложение двух гармонических колебаний с близкими частотами (биения)

Любые сложные периодические колебания $s = f(t)$ можно представить в виде:

$$s = f(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 cos(\omega_0 t + \varphi_1) + A_2 cos(2\omega_0 t + \varphi_2) + \ ... \ + A_n cos(n\omega_0 t + \varphi_n).$$

Такое представление сложных колебаний получило название **разложение Фурье**.

Члены разложения, определяющие гармонические колебания с частотами $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, ...$ называются первой (основной), второй, третьей и т.д. гармониками сложного периодического колебания.

Примеры решения задач

Задача 1. Построить векторную диаграмму в начальный момент времени при сложении двух гармонических колебаний одинаковой частоты и одного направления. Найти графически и аналитически амплитуду и начальную фазу результирующего колебания. Записать закон результирующего колебания. Законы складываемых колебаний имеют вид: $x_1(t) = A_1 cos(\omega_0 t + \varphi_1)$, $x_2(t) = A_2 sin(\omega_0 t + \varphi_2)$ где $A_1 = 8$ см; $A_2 = 4$ см; $\omega_0 = \pi$ с$^{-1}$; $\varphi_1 = \pi/2$ $\varphi_2 = \pi/2$.

Дано:	СИ:
$x_1(t) = A_1 cos(\omega_0 t + \varphi_1)$	
$x_2(t) = A_2 sin(\omega_0 t + \varphi_2)$	
$A_1 = 8$ см	
$A_2 = 4$ см	
$\omega_0 = \pi$ с$^{-1}$	
$\varphi_1 = \pi/2$	
$\varphi_2 = \pi/2$	
$x(t) = ?$	
$A = ?$	
$\varphi_0 = ?$	

Решение:

Чтобы найти амплитуду и начальную фазу результирующего колебания, можно воспользоваться формулами (1.42), предварительно заменив по формуле приведения $sin\ \alpha = cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$ синусоидальную зависимость $x_2(t)$ косинусоидальной:

$$x_2(t) = A_2 sin(\omega_0 t + \varphi_2) = A_2 cos(\omega_0 t + \varphi_2'), \tag{1}$$

где

$$\varphi_2' = \varphi_2 - \frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

Тогда

$$\begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 cos(\varphi_2' - \varphi_1)} \\ tg\varphi_0 = \dfrac{A_1 sin\varphi_1 + A_2 sin\varphi_2'}{A_1 cos\varphi_1 + A_2 cos\varphi_2'} \end{cases}. \tag{3}$$

Подставляя в равенства (3) численные данные и учитывая формулу (2), получим:

$$A = \sqrt{64 + 16 + 2 \cdot 8 \cdot 4 cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 8{,}9 \text{ см};$$

$$tg\varphi_0 = \frac{8sin\frac{\pi}{2} + 4sin0}{8cos\frac{\pi}{2} + 4cos0} = 2,$$

отсюда $\varphi_0 = 63^0 = 1{,}1$ рад.

Следовательно, закон результирующего колебания имеет вид: $x(t) = A_1 cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ где $A = 8{,}9$ см; $\omega_0 = \pi$ с$^{-1}$; $\varphi_0 = 1{,}1$ рад.

Начертим векторную диаграмму сложения колебаний в начальный момент времени (рис. 16). Для этого сопоставим колебанию $x_1(t)$ вектор $\vec{A}_1$ длиной A_1, который направим под углом $\varphi_1 = \pi/2$ к горизонтальной оси X , т. е. вертикально вверх; колебанию $x_2(t)$ сопоставим вектор $\vec{A}_2$ длиной A_2, который направим под углом $\varphi_2' = 0$ к горизонтальной оси X , т. е. отложим его в направлении оси (рис. 16). Результирующее колебание будет описываться вектором $\vec{A}$ длиной $A,$ полученным по правилу параллелограмма сложением векторов $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$. Угол, образованный вектором $\vec{A}$ и осью $X,$ равен начальной фазе результирующего колебания φ_0.

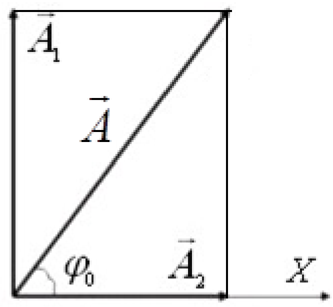

Рис. 16. Векторная диаграмма сложения двух гармонических колебаний одинаковой частоты и одного направления

Ответ: $x(t) = A_1 cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ где $A = 8{,}9$ см; $\omega_0 = \pi$ с$^{-1}$; $\varphi_0 = 1{,}1$ рад.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Два одинаково направленных гармонических колебания одного периода с амплитудами A_1 = 10 см и A_2 = 6 см складываются в одно колебание с амплитудой A = 14 см. Найти разность фаз $\Delta\varphi$ складываемых колебаний. Ответ: $\Delta\varphi = \pi/3$ рад.

Задача 2. Точка участвует в двух одинаково направленных колебаниях: $x_1 = A_1 sin\omega t$ и $x_2 = A_2 cos\omega t$, где A_1 = 1 см; A_2 = 2 см; ω =1 с$^{-1}$. Определить амплитуду результирующего колебания A, его частоту ν и начальную фазу φ. Найти уравнение этого движения $x(t)$. Ответ: A = 2,24 см; ν = 0,159 Гц; $\varphi = 0{,}353\pi$ рад; $x(t) = Acos(\omega t + \varphi)$, где ω =1 с$^{-1}$.

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Рассмотрим результаты сложения двух гармонических колебаний одинаковой частоты ω_0, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях.

$$\begin{cases} x = A\cos\omega_0 t \\ y = B\cos(\omega_0 t + \varphi) \end{cases}. \qquad (1.45)$$

Уравнение траектории результирующего колебания находим путем исключения переменной t:

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2x\cdot y}{A\cdot B}\cos\varphi + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\varphi. \qquad (1.46)$$

Уравнение (1.46) представляет собой уравнение эллипса, оси которого ориентированы относительно координатных осей x и y произвольно. Если траектория результирующего колебания имеет форму эллипса, то такие колебания называются эллиптическими поляризованными. Ориентация осей эллипса и его размеры зависят от A, B и φ.

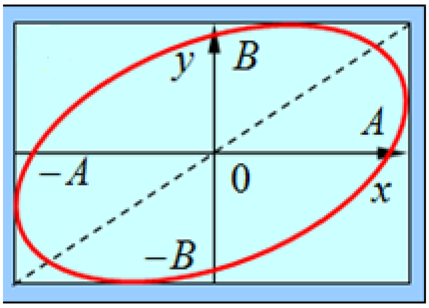

Рис. 17. Сложение двух гармонических колебаний одинаковой частоты, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях

Рассмотрим некоторые частные случаи, которые представляют физический интерес:

1) $\varphi = m\pi \quad (m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$. В данном случае эллипс вырождается в отрезок прямой:

$$y = \pm\left(\frac{B}{A}\right)x, \qquad (1.47)$$

где знак плюс соответствует нулю и четным значениям m; минус – нечетным значениям m. Результирующие колебания являются гармоническими с частотой ω_0, амплитудой $\sqrt{A^2 + B^2}$, которые совершаются вдоль прямой, составляющей с осью x угол $\varphi = arctg\left(\frac{B}{A}\cos m\pi\right)$. Эти колебания называются **линейно поляризованными колебаниями** (рис. 18 (1)).

2) $\varphi = (2m+1)\dfrac{\pi}{2}$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. В данном случае уравнение (1.46) примет вид:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1. \tag{1.48}$$

Это уравнение эллипса, оси которого совпадают с осями координат, а полуоси равны соответствующим амплитудам (рис. 18 (2)). Кроме того, если $A = B$, то эллипс вырождается в окружность. Такие колебания называются **циркулярно поляризованными колебаниями** или колебаниями, поляризованными по кругу.

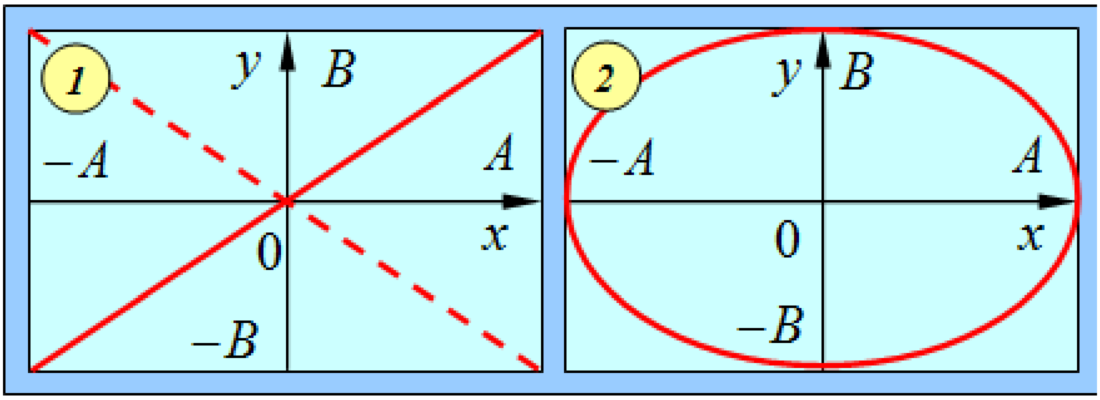

Рис. 18. Линейно (1) и эллиптически (2) поляризованные колебания

Если частоты взаимно перпендикулярных колебаний не одинаковы, то замкнутая траектория результирующего колебания довольно сложна. Замкнутые траектории, прочерченные точкой, совершающей одновременно два взаимно перпендикулярных колебания, называются фигурами Лиссажу. Форма этих кривых зависит от соотношения амплитуд, частот и разности фаз складываемых колебаний. На рис. 19 показана такая фигура для отношения частот 1:2 и разности фаз $\pi/2$. Уравнения колебаний имеют вид:

$$\begin{cases} x = A\cos\omega_0 t \\ y = B\cos\left(2\omega_0 t + \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}. \tag{1.49}$$

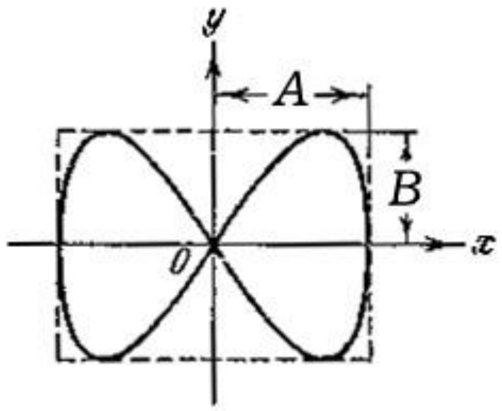

Рис. 19. Фигура Лиссажу для отношения частот 1:2 и разности фаз $\pi/2$

На рис. 20 представлены фигуры Лиссажу для различных соотношений частот (указаны слева) и разностей фаз (указаны вверху):

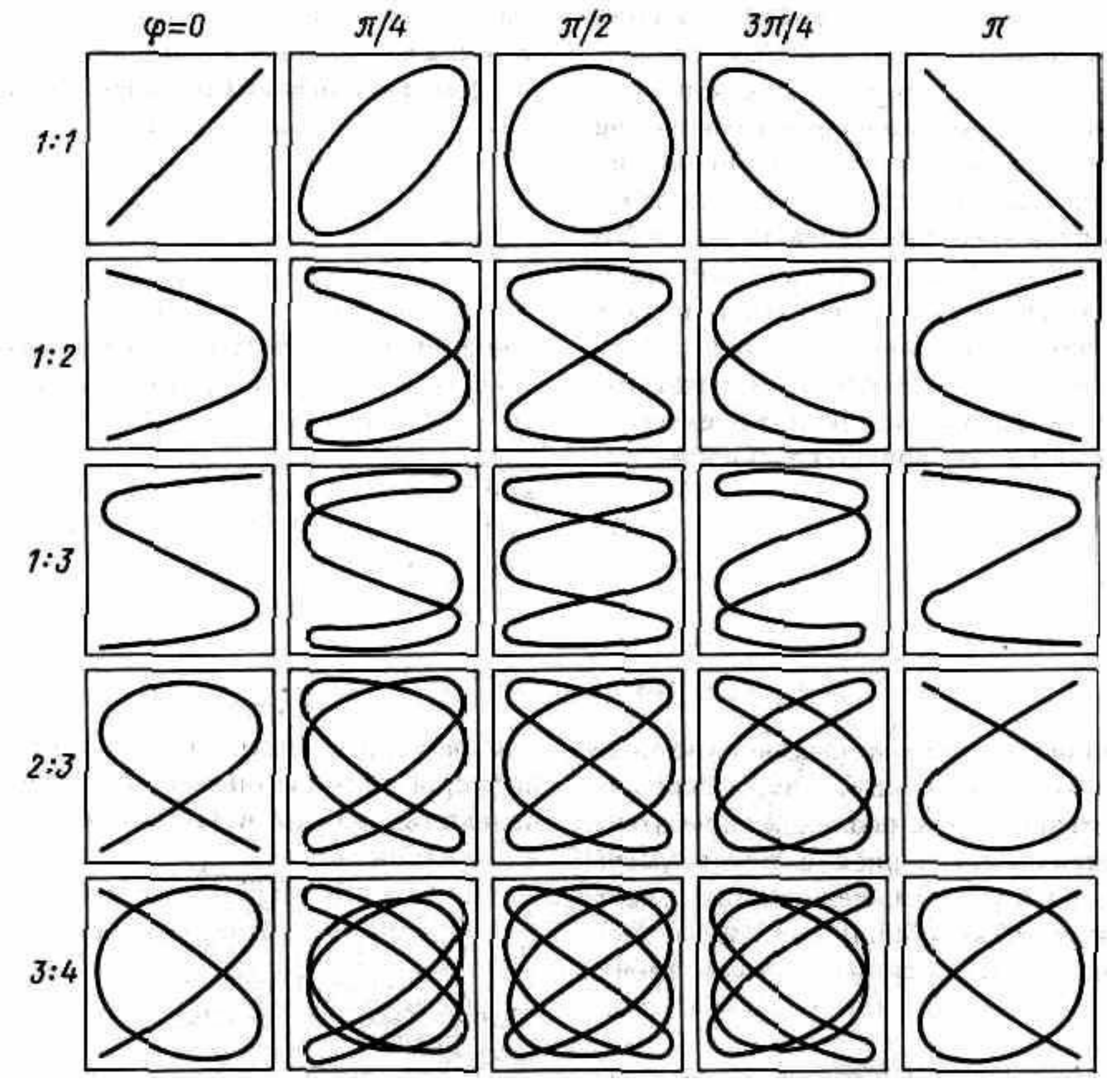

Рис. 20. Фигуры Лиссажу для различных соотношений частот (указаны слева) и разностей фаз (указаны вверху)

Отношение частот складываемых колебаний равно отношению числа пересечений фигур Лиссажу с прямыми, параллельными осям координат. По виду фигур можно определять неизвестную частоту по известной или определять отношение частот складываемых колебаний. Поэтому анализ фигур Лиссажу – широко используемый метод исследования соотношений частот и разности фаз складываемых колебаний, а также формы колебаний.

Примеры решения задач

Задача 1. Получить уравнение траектории частицы и построить траекторию в плоскости XOY, если частица одновременно участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях: $x(t)=Acos(\omega t)$ и $y(t)=Bcos\left(2\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$, где $A=3$ см, $B=2$ см.

Дано:	СИ:	Решение:
$x(t)=Acos(\omega t)$ $y(t)=Bcos\left(2\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$ $A=3$ см $B=2$ см $f(x,y)=?$		Чтобы найти уравнение траектории точки $f(x;y)=0$ на плоскости XOY, необходимо из системы уравнений

$$x(t)=Acos(\omega t), \quad (1)$$

$$y(t)=Bcos\left(2\omega t-\frac{\pi}{2}\right) \quad (2)$$

исключить время. Для этого из уравнения (1) выразим $cos(\omega t)$:

$$cos(\omega t)=\frac{x}{A}. \quad (3)$$

Используем основное тригонометрическое тождество

$$sin^2(\omega t)=1-cos^2(\omega t)=1-\left(\frac{x}{A}\right)^2. \quad (4)$$

Выражение (2) последовательно преобразуем: разделим обе части на B, возведем в квадрат уравнение, затем применим формулы приведения и двойного аргумента к тригонометрическим функциям:

$$\left(\frac{y}{B}\right)^2=cos^2\left(2\omega t-\frac{\pi}{2}\right)=sin^2(2\omega t)=\left(2sin(\omega t)cos(\omega t)\right)^2. \quad (5)$$

Используя соотношения (3) и (4), исключим время из выражения (5) и получим уравнение траектории частицы:

$$\left(\frac{y}{B}\right)^2-4\cdot\left(1-\left(\frac{x}{A}\right)^2\right)\cdot\left(\frac{x}{A}\right)^2=0. \quad (6)$$

Для построения траектории в плоскости XOY выберем наиболее удобные точки. Это точки, имеющие равную нулю, наибольшую и наименьшую из возможных ординату ($y=0;\ \pm B$) или абсциссу ($x=0;\ \pm A$).

Используя уравнение траектории (6), найдем вторые координаты этих точек (таблица 1).

Таблица 1

$x=0,\pm A$	$y=0$
$x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}A$	$y=B$
$x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}A$	$y=-B$

Траектория, построенная по этим точкам, показана на рис. 21. Координата y достигает максимума по модулю четырежды, а x – дважды. Это объясняется соответствующим отношением частот: за время одного колебания вдоль оси X точка совершает два колебания вдоль оси Y.

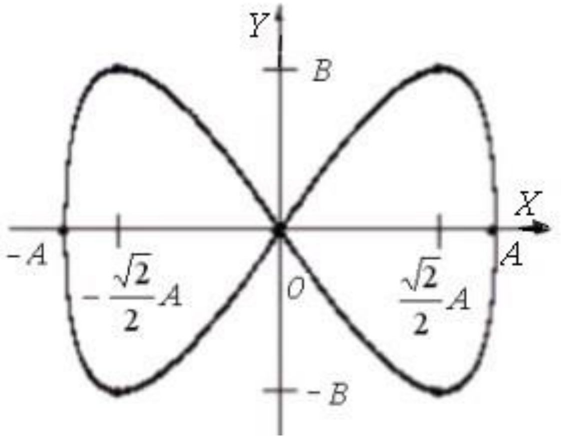

Рис. 21. Траектория движения частицы

Ответ: $\left(\dfrac{y}{B}\right)^2-4\cdot\left(1-\left(\dfrac{x}{A}\right)^2\right)\cdot\left(\dfrac{x}{A}\right)^2=0.$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Складываются два взаимно перпендикулярных колебания, выражаемых уравнениями $x=A_1 sin\,\omega t$ и $y=A_2 cos\,\omega(t+\tau)$, где A_1 = 2 см; A_2 = 1 см; $\omega=\pi$ с$^{-1}$; = 0,5 с. Найти уравнение траектории и построить ее, показав направление движения точки. Ответ: $y=-\dfrac{x}{2}$.

Задача 2. Материальная точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, выражаемых уравнениями $x=A_1 cos\,\omega t$ и

$y = -A_2 \cos 2\omega t$, где $A_1 = 2$ см; $A_2 = 1$ см. Найти уравнение траектории и построить ее. Ответ: $y = -\dfrac{x^2}{2} + 1$.

ВОЛНЫ

Волновые процессы. Продольные и поперечные волны

Процесс распространения колебаний в сплошной среде называется **волновым процессом (или волной)**.

Основным свойством всех волн, независимо от их природы, является перенос энергии без переноса вещества.

Упругие (или механические) волны – это механические возмущения, распространяющиеся в упругой среде.

Продольными волнами называют такие волны, в которых частицы среды колеблются в направлении распространения волны (рис. 22).

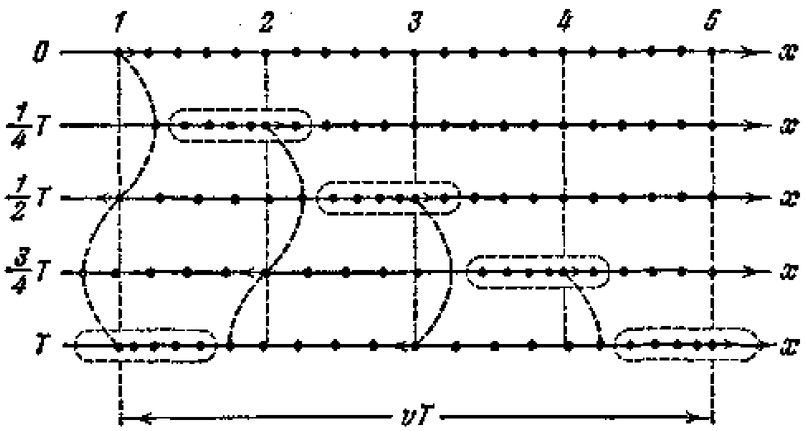

Рис. 22. Направление колебаний частиц в продольной волне

Поперечные волны – это волны, в которых частицы среды колеблются в направлениях, перпендикулярных направлению распространения волны (рис. 23).

Поперечные волны возникают только в твёрдых средах. Продольные волны возникают в твёрдых, жидких и газообразных средах.

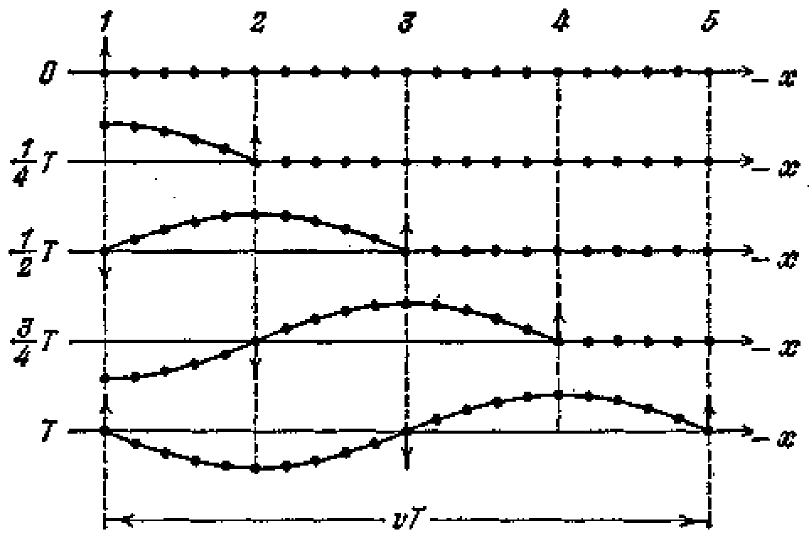

Рис. 23. Направление колебаний частиц в поперечной волне

Упругая волна называется **гармонической**, если соответствующие ей колебания частиц среды являются гармоническими.

Расстояние между двумя ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе, называется длиной волны λ.

$$\lambda = vT \text{ или } \mathrm{v} = \lambda \nu, \qquad (1.50)$$

где T – период – время, за которое волна распространяется на расстояние, равное длине волны; ν – частота колебаний; v – скорость распространения волны.

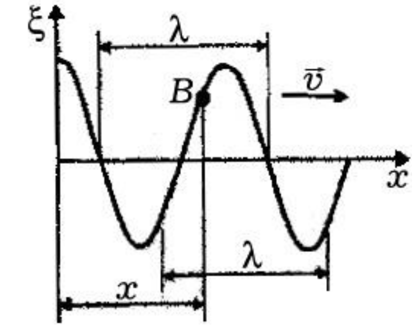

Рис. 24. Длина волны

Геометрическое место точек, до которых доходят колебания в момент времени t, называется **волновым фронтом**. В зависимости от геометрии фронта волны делят на плоские и сферические (рис. 25).

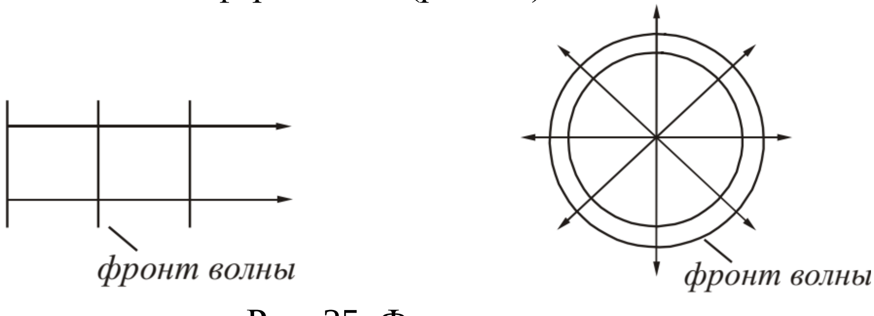

Рис. 25. Фронт волны

Стрелки на рисунке указывают направление распространения волны.

Плоские волны возникают от плоского или удаленного источника. Их волновые фронты представляют собой плоскости. Сферические волны возникают от точечного источника в пространстве. Их волновые фронты представляют собой сферы.

Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется **волновой поверхностью**.

Уравнение бегущей волны. Фазовая скорость. Волновое уравнение

Бегущими волнами называются волны, которые переносят в пространстве энергию.

Выведем уравнение бегущей волны. На рис. 26 рассмотрим некоторую частицу среды *B*, находящуюся от источника колебаний на расстоянии x. Если колебания точек в плоскости $x = 0$ описываются функцией $\xi(0,t) = A cos\,\omega t$, то частица среды *B* колеблется по тому же закону, но ее колебания будут отставать по времени от колебаний источника на τ, так как для прохождения волной расстояния x требуется время $\tau = \dfrac{x}{\mathrm{v}}$, где v – скорость распространения волны. Тогда уравнение колебаний частиц, лежащих в плоскости x, имеет вид:

$$\xi(x,t) = A cos\,\omega\left(t - \frac{x}{\mathrm{v}}\right), \tag{1.51}$$

откуда следует, что $\xi(x,t)$ является не только периодической функцией времени, но и периодической функцией координаты. Уравнение (1.51) есть уравнение бегущей волны.

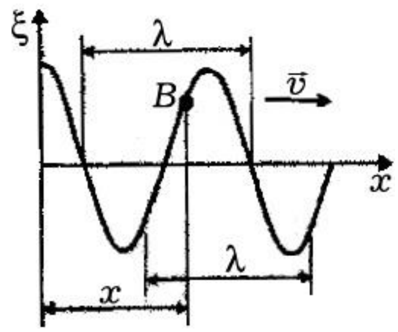

Рис. 26. Бегущая волна

Если плоская волна распространяется в противоположном направлении, то ее уравнение имеет вид:

$$\xi(x,t) = A cos\,\omega\left(t + \frac{x}{\mathrm{v}}\right).$$

В общем случае уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси x в среде, не поглощающей энергию, имеет вид:

$$\xi(x,t) = A cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{\text{v}}\right) + \varphi_0\right], \quad (1.52)$$

где $A = const$ – амплитуда волны, ω – циклическая частота волны, φ_0 – начальная фаза колебаний, определяемая в общем случае выбором начала отсчета x и t, $\varphi = \left[\omega\left(t - \frac{x}{\text{v}}\right) + \varphi_0\right]$ – фаза волны.

Гармоническая волна называется **монохроматической**, если её частота ω и амплитуда A с течением времени не меняются.

Для характеристики волн используют волновое число

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\text{v}T} = \frac{\omega}{\text{v}}. \quad (1.53)$$

Учитывая (1.53), уравнению (1.52) можно придать вид:

$$\xi(x,t) = A cos(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (1.54)$$

Используя формулу Эйлера $e^{i\alpha} = cos\alpha + i\,sin\alpha$, уравнение плоской волны можно записать в виде:

$$\xi(x,t) = Ae^{i(\omega t - kx + \varphi_0)},$$

где физический смысл имеет лишь действительная часть.

Предположим, что при волновом процессе фаза постоянна, т. е.

$$\varphi = \omega\left(t - \frac{x}{\text{v}}\right) + \varphi_0 = const. \quad (1.55)$$

Продифференцировав выражение (1.55) и сократив на ω, получим $dt - \frac{dx}{\text{v}} = 0$, откуда:

$$\text{v} = \frac{dx}{dt}. \quad (1.56)$$

Следовательно, скорость v распространения волны в уравнении (1.52) есть не что иное, как скорость перемещения фазы и ее называют **фазовой скоростью**.

Из выражения (1.56) вытекает, что фазовая скорость

$$\text{v} = \frac{\omega}{k}. \quad (1.57)$$

Если фазовая скорость волн в среде зависит от их частоты, то это явление называется дисперсией волн, а среда, в которой наблюдается дисперсия волн, называется диспергирующей средой.

Уравнение сферической волны – волны, волновая поверхность которой имеет вид концентрических сфер, записывается как

$$\xi(r,t) = \frac{A}{r} cos(\omega t - kr + \varphi_0), \quad (1.58)$$

где r – расстояние от центра волны до рассматриваемой точки среды. В случае сферической волны даже в среде, не поглощающей энергию, амплитуда колебаний не остается постоянной, а убывает с расстоянием по закону $1/r$. Уравнение (1.58) справедливо лишь для r, значительно превышающих размеры источника.

Распространение волн в однородной изотропной среде в общем случае описывается волновым уравнением – дифференциальным уравнением в частных производных:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}=\frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \tag{1.59}$$

или

$$\Delta\xi=\frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}, \tag{1.60}$$

где v – фазовая скорость, $\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2+\partial^2/\partial z^2$ – оператор Лапласа. Решением уравнения (1.59) является уравнение любой волны. Для плоской волны, распространяющейся вдоль оси x, волновое уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}. \tag{1.61}$$

Примеры решения задач

Задача 1. Волна с периодом T = 1,2 с и амплитудой колебаний A = 2 см распространяется со скоростью $\mathrm{v}=15$ м/с. Чему равно смещение $\xi(x,t)$ точки, находящейся на расстоянии $x=45$ м от источника волн, в тот момент, когда от начала колебаний источника прошло время $t=4$ с?

Дано:	СИ:
$A=2$ см	0,02 м
$T=1,2$ с	
$\mathrm{v}=15$ м/с	
$x=45$ м	
$t=4$ с	
$\xi(x,t)$ = ?	

Решение:

Уравнение плоской волны:

$$\xi(x,t)=A\cos\omega\left(t-\frac{x}{\mathrm{v}}\right).$$

Циклическая частота связана с периодом:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}.$$

Тогда уравнение движения плоской волны:

$$\xi(x,t)=A\cos\left[\frac{2\pi}{T}\cdot\left(t-\frac{x}{\mathrm{v}}\right)\right].$$

Подставим численные значения:

$$\xi(x,t)=0{,}02\cos\left[\frac{2\pi}{1{,}2}\cdot\left(4-\frac{45}{15}\right)\right]=0{,}02\cos 300^0=0{,}01 \text{ м} = 1 \text{ см}.$$

Ответ: $\xi(x,t)=1$ см.

Задача 2. Волна распространяется в упругой среде со скоростью $\text{v} = 100$ м/с. Наименьшее расстояние Δx между точками среды, фазы колебаний которых противоположны, равно 1 м. Определить частоту ν колебаний.

Дано:	СИ:	Решение:
$\text{v} = 100$ м/с $\Delta x = 1$ м $\Delta\varphi = \pi$ рад $\nu = ?$		Разность фаз колебаний двух точек среды, находящихся на расстоянии Δx друг от друга: $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$. (1)

Длина волны связана с частотой колебаний соотношением:

$$\text{v} = \lambda\nu,$$

следовательно, частота

$$\nu = \frac{\text{v}}{\lambda}. \quad (2)$$

Из формулы (1) длина волны:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\Delta\varphi}\Delta x,$$

тогда частота колебаний определится выражением:

$$\nu = \frac{\text{v} \cdot \Delta\varphi}{2\pi \cdot \Delta x}. \quad (3)$$

Подставим числовые значения в уравнение (3):

$$\nu = \frac{100 \cdot \pi}{2\pi \cdot 1} = 50 \text{ Гц}.$$

Ответ: $\nu = 50$ Гц.

Задача. 3. В упругой среде вдоль оси X распространяется плоская гармоническая волна от источника, совершающего колебания по закону: $\xi = \xi_m cos(\omega t + \varphi_0)$ где $\xi_m = 7$ мкм; $\omega = 30\pi$ с$^{-1}$; $\varphi_0 = -\pi/2$. Скорость распространения волны – 75 м/с. В начальный момент времени смещение источника колебаний от положения равновесия имело максимальное по модулю отрицательно значение. Найти: 1) волновое число; 2) длину волны; 3) скорость колебаний частиц, расположенных на расстоянии 1125 м от источника спустя 15 с от начала колебаний; 4) разность фаз колебаний двух точек, лежащих на одном луче, до которых волна доходит соответственно через 24 и 33 с от начала колебаний источника.

Дано:	СИ:	Решение:
$\xi = \xi_m cos(\omega t + \varphi_0)$ $\xi_m = 7$ мкм $\text{v} = 75$ м/с $\omega = 30\pi$ с$^{-1}$ $\varphi_0 = -\pi/2$ рад	 $7 \cdot 10^{-6}$ м	Волновое число связано с циклической частотой колебаний, скоростью и длиной волны соотношением: $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{\text{v}}$. (1)

Отсюда длина волны

$x_1 = 1225$ м
$t_1 = 15$ с
$t_2 = 24$ с
$t_3 = 33$ с
k = ?
λ = ?
$\dot{\xi}_1(t_1; x_1)$ = ?
$\Delta\varphi$ = ?

$$\lambda = \frac{2\pi v}{\omega}. \tag{2}$$

Уравнение плоской бегущей в направлении оси X волны с учетом выражения (2) имеет вид:

$$\xi = \xi_m cos(\omega t - kx + \varphi_0) = \xi_m cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{v} + \varphi_0\right). \tag{3}$$

Скорость колебаний частиц в любой точке волны можно найти, продифференцировав выражение (3):

$$\dot{\xi} = -\xi_m \omega sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{v} + \varphi_0\right). \tag{4}$$

Следовательно, скорость колебаний частиц в точке волны с координатой x_1 в момент времени t_1 определяется равенством:

$$\dot{\xi}_1 = -\xi_m \omega sin\left(\omega t_1 - \frac{\omega x_1}{v} + \varphi_0\right). \tag{5}$$

За время t волна, движущаяся с постоянной скоростью, достигает точки с координатой

$$x = vt \tag{6}$$

Отсюда

$$\begin{cases} x_2 = vt_2 \\ x_3 = vt_3 \end{cases}. \tag{7}$$

Фаза волны в рассматриваемом случае $\varphi = \omega t - kx + \varphi_0 = \omega t - \frac{\omega x}{v} + \varphi_0$.

Следовательно, в любой фиксированный момент времени t разность фаз колебаний в точках с координатами x_2 и x_3 можно вычислить по формуле:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_3 = \left(\omega t - \frac{\omega x_2}{v} + \varphi_0\right) - \left(\omega t - \frac{\omega x_3}{v} + \varphi_0\right) = \frac{\omega(x_3 - x_2)}{v}. \tag{8}$$

Если подставить в формулу (8) значения координат колеблющихся точек (7), то получим расчетную формулу для разности фаз:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_3 = \frac{\omega(vt_3 - vt_2)}{v} = \omega(t_3 - t_2). \tag{9}$$

Подставляем в выражения (1), (2), (5) и (9) численные данные:

$$k = \frac{30}{75} = 1{,}26 \text{ м}^{-1};$$

$$\lambda = \frac{2\cdot\pi\cdot 75}{30\cdot\pi} = 5 \text{ м};$$

$$\dot{\xi}_1 = -7\cdot 10^{-6}\cdot 30\pi\ sin(30\pi\cdot 15 - 30\pi\cdot 1125/75 - \pi/2) = 6{,}6\cdot 10^{-4} \text{ м/с};$$

$$\Delta\varphi = 30\pi\cdot(33-24) = 270\pi \text{ рад}.$$

Используя периодичность косинуса, приведем разность фаз к интервалу $[-\pi,+\pi]$, получим $\Delta\varphi = 0$ рад, следовательно, эти точки колеблются в одной фазе.

Ответ: $k = 1{,}26$ м$^{-1}$; $\lambda = 5$м; $\dot{\xi}_1 = 6{,}6 \cdot 10^{-4}$ м/с; $\Delta\varphi = 0$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Две точки находятся на расстоянии Δx = 50 см друг от друга на прямой, вдоль которой распространяется волна со скоростью v = 50 м/с. Период колебаний равен T = 0,05 с. Найти разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний в этих точках. Ответ: $\Delta\varphi$ = 1,26 рад.

Задача 2. Определить разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний источника волн, находящегося в упругой среде, и точки этой среды, отстоящей на x = 2 м от источника. Частота колебаний равна ν = 5 Гц; волны распространяются со скоростью v = 40 м/с. Ответ: $\Delta\varphi$ = 1,57 рад.

Задача 3. Волна распространяется в упругой среде со скоростью v = 100 м/с. Наименьшее расстояние между точками среды, фазы колебаний которых противоположны, равно Δx = 1 м. Определить частоту колебаний ν. Ответ: ν = 50 Гц.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решение задач по физике способствует запоминанию определений, законов, правил, развитию логического мышления и таких мыслительных операций, как анализ и синтез. Умение решать задачи – очень мощное средство при изучении физики, которое активно и систематично используется на практике. Если решение задачи сопровождается комментариями о том, каким способом, методом, с помощью какого приема она была решена, то при решении аналогичной задачи студент может сразу вспомнить алгоритм ее решения. Представленные в работе алгоритмы решения задач являются одним из средств повышения эффективности обучения физике и могут быть использованы для подготовки бакалавров очной и заочной форм обучения по направлениям подготовки: 01.00.00 «Математика и механика», 13.00.00 «Электро- и теплоэнергетика», 15.00.00 «Машиностроение», 18.00.00 «Химические технологии», 20.00.00 «Техносферная безопасность и природообустройство» и 29.00.00 «Технологии легкой промышленности».

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Зисман, Г. А. Курс общей физики [Текст] : учебное пособие. В 3т. Т.1. Механика. Молекулярная физика. Колебания и волны / Г. А Зисман, О. М. Тодес. – СПб.: Лань, 2007. – 352 с.
2. Савельев, И. В. Курс общей физики [Текст] : учебное пособие. В 3 т. Том 1. Механика. Молекулярная физика /И. В. Савельев. – СПб.: Лань, 2018. –436 с.
3. Трофимова, Т. И. Физика. Краткий курс [Текст] : учебное пособие /Т. И. Трофимова. – М.: Издательство: КноРус, 2016. – 271 с.
4. Трофимова, Т. И. Курс физики. Задачи и решения [Текст] / Т. И. Трофимова, А. В. Фирсов. – М.: Издательский центр «Академия», 2011. – 592 с.

Учебное издание

Дёмина Маргарита Юрьевна
Крюков Кирилл Александрович
Кульбицкая Мария Никандровна
Яшкевич Екатерина Александровна

Физика
Колебания и волны

Учебное пособие

Редактор и корректор Е. О. Тарновская
Техн. редактор Д. А. Романова

Учебное электронное издание сетевого распространения

Системные требования:
электронное устройство с программным обеспечением
для воспроизведения файлов формата PDF

Режим доступа: http://publish.sutd.ru/tp_get_file.php?id=202016, по паролю.
- Загл. с экрана.

Дата подписания к использованию 24.01.2023 г. Рег. № 5129/22

Высшая школа технологии и энергетики СПбГУПТД
198095, СПб., ул. Ивана Черных, 4.