Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна»
Высшая школа технологии и энергетики
Кафедра физики

ФИЗИКА
МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Методические указания для студентов всех форм обучения
по направлениям подготовки:
01.00.00 — Математика и механика
13.00.00 — Электро– и теплоэнергетика
15.00.00 — Машиностроение
18.00.00 — Химические технологии
20.00.00 — Техносферная безопасность и природообустройство
29.00.00 — Технологии легкой промышленности

Составители:
М. Ю. Дёмина
Е. А. Яшкевич
К. А. Крюков

Санкт-Петербург
2022

Утверждено
на заседании кафедры Физики
17.02.2022 г., протокол № 5

Рецензент В. И. Лейман

Методические указания соответствуют программам и учебным планам дисциплины «Молекулярная физика и термодинамика» для студентов, обучающихся по направлениям подготовки: 01.00.00 «Математика и механика», 13.00.00 «Электро– и теплоэнергетика», 15.00.00 «Машиностроение», 18.00.00 «Химические технологии», 20.00.00 «Техносферная безопасность и природообустройство» и 29.00.00 «Технологии легкой промышленности».

В указаниях представлен краткий теоретический материал по основным разделам молекулярной физики и термодинамики: законы идеального газа, основное уравнение молекулярно-кинетической теории, энергия молекул, распределение молекул по скоростям, законы термодинамики, циклические процессы, энтропия, явления переноса, реальные газы и жидкости. В каждом разделе приведены примеры решения задач, которые могут быть полезны в качестве дополнительного материала при проведении практических занятий по физике, а также для самостоятельной работы студентов.

Утверждено Редакционно-издательским советом ВШТЭ СПбГУПТД в качестве методических указаний

Режим доступа: http://publish.sutd.ru/tp_get_file.php?id=202016, по паролю. - Загл. с экрана.
Дата подписания к использованию 21.06.2022 г. Изд. № 5058/22

Высшая школа технологии и энергетики СПб ГУПТД
198095, СПб., ул. Ивана Черных, 4.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания содержат краткий теоретический материал по основным разделам молекулярной физики и термодинамики: законы идеального газа, основное уравнение молекулярно-кинетической теории, энергия молекул, распределение молекул по скоростям, законы термодинамики, циклические процессы, энтропия, явления переноса, реальные газы и жидкости.

Издание примеров решения задач необходимо для оказания помощи в самостоятельной работе студентов всех специальностей с расчетным заданием по молекулярной физике и термодинамике.

Указания предназначены для студентов следующих специальностей: 01.00.00 «Математика и механика», 13.00.00 «Электро – и теплоэнергетика», 15.00.00 «Машиностроение», 18.00.00 «Химические технологии», 20.00.00 «Техносферная безопасность и природообустройство» и 29.00.00 «Технологии легкой промышленности».

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА
Законы идеального газа

Идеальный газ – это идеализированная модель, согласно которой: собственный объем молекул газа пренебрежимо мал по сравнению с объемом сосуда; между молекулами газа отсутствуют силы взаимодействия; столкновения молекул газа между собой и со стенками сосуда абсолютно упругие.

Уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона–Менделеева):

$$PV = \frac{m}{M}RT, \qquad (1)$$

где P – давление газа; $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К) – универсальная газовая постоянная; $\nu = \frac{m}{M}$ – количество вещества; V – объем газа; m – масса газа; M – молярная масса; T – термодинамическая температура;

Связь между температурой t по шкале Цельсия и абсолютной (термодинамической) температурой T, измеряемой в Кельвинах,

$$T = t + 273{,}15. \qquad (2)$$

Уравнение состояния газа можно записать в следующем виде

$$P = nkT, \qquad (3)$$

где $k = R/N_A = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана; $n = \frac{N}{V}$ – концентрация молекул.

Моль – количество вещества, в котором содержится число частиц (атомов, молекул, ионов, электронов или других структурных единиц), равное числу атомов в 0,012 кг изотопа углерода ${}^{12}_{6}C$.

Молярная масса (*M*) – масса одного моля. *M* измеряется в кг/моль.

Число частиц, содержащихся в 1 моле вещества, называется постоянной Авогадро N_A. Численное значение постоянной Авогадро – $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

Относительная молекулярная масса (M_r) вещества – отношение массы молекулы этого вещества к 1/12 массы атома ${}^{12}_{6}C$. Масса, равная 1/12 массы ${}^{12}_{6}C$, называется атомной единицей массы (а.е.м.), 1 а.е.м. = $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг.

Молярная масса и относительная молекулярная масса связаны соотношением:

$$M = M_r \cdot 10^{-3} \text{ (кг/моль)}. \qquad (4)$$

Число молей, содержащихся в массе *m* вещества, определяется формулой:

$$\nu = \frac{m}{M}. \qquad (5)$$

Закон Дальтона. Давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений входящих в нее газов:

$$P = P_1 + P_2 + ... + P_n = \sum_{i=1}^{n} P_i\,, \qquad (6)$$

где P_1, P_2, …, P_n – парциальные давления – давления, которые оказывали бы газы смеси, если бы они одни занимали объем, равный объему смеси при той же температуре.

Если вещество представляет собой смесь, то молярная масса смеси рассчитывается как отношение массы смеси к количеству вещества всех компонентов, входящих в состав этой смеси:

$$M_{см} = \frac{m_{см}}{\nu_{см}} = \frac{m_1 + m_2 + ... + m_n}{\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_n}\,,$$

где n – число компонентов.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. 12 г газа занимают объем $4\cdot10^{-3}$ м^3 при температуре 7^0 С. После нагревания газа при постоянном давлении его плотность стала равна $6\cdot10^{-4}$ г/см^3. До какой температуры нагрели газ?

Дано:	СИ:
$m = 12$ г	
$V = 4\cdot10^{-3}$ м^3	$12\cdot10^{-3}$ кг
$t_1 = 7^0 C$	280 К
$\rho_2 = 6\cdot10^{-4}$ г/см^3	0,6 кг/м^3
$P = const$	
$T_2 - ?$	

Решение:

Уравнение Менделеева–Клапейрона запишем для состояний газа до и после нагревания:

$$P\cdot V = \frac{m}{M}\cdot R\cdot T_1, \qquad (1)$$

$$P\cdot V = \frac{m}{M}\cdot R\cdot T_2. \qquad (2)$$

Т.к. плотность по определению

$$\rho = \frac{m}{V},$$

представим ρ_2 из (2)

$$\rho_2 = \frac{m}{V} = \frac{P\cdot M}{R\cdot T_2}, \qquad (3)$$

выразим давление P из (1):

$$P = \frac{m}{M\cdot V}\cdot R\cdot T_1. \qquad (4)$$

Сосуд закрыт, следовательно, объём газа не изменяется $V = const$.

Подставим (4) в (3)

$$\rho_2 = \frac{m}{M\cdot V}\cdot R\cdot T_1\cdot\frac{M}{R\cdot T_2} = \frac{mT_1}{T_2V},$$

и выразим T_2

$$T_2 = \frac{m \cdot T_1}{\rho_2 \cdot V}.$$

Подставим численные значения:

$$T_2 = \frac{12 \cdot 10^{-3} \cdot 280}{0{,}6 \cdot 4 \cdot 10^{-3}} = 1{,}4 \cdot 10^3 \text{ К.}$$

Ответ: $T_2 = 1{,}4$ К.

Задача 2. В закрытом сосуде находится 10 кг газа при давлении 10^7 Н/м^2. Найти, какое количество Δm газа взяли из сосуда, если окончательное давление стало равным $2{,}5 \cdot 10^6$ Н/м^2?

Дано:
$m_1 = 10$ кг
$P_1 = 10^7$ Н/м^2
$P_2 = 2{,}5 \cdot 10^6$ Н/м^2

$\Delta m - ?$

Решение:

Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона

$$P \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T,$$

для двух состояний газа

$$P_1 \cdot V = \frac{m}{M_1} \cdot R \cdot T,$$

$$P_2 \cdot V = \frac{m_2}{M} \cdot R \cdot T.$$

Выразим начальную и конечную массу газа из этих уравнений:

$$m_1 = \frac{P_1 \cdot V \cdot M}{R \cdot T}, \quad (1)$$

$$m_2 = \frac{P_2 \cdot V \cdot M}{R \cdot T}. \quad (2)$$

Количество газа, взятого из сосуда, равно:

$$\Delta m = m_1 - m_2. \quad (3)$$

Разделим уравнение (2) на уравнение (1)

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{P_2}{P_1},$$

и представим m_2 через m_1

$$m_2 = \frac{P_2 \cdot m_1}{P_1}.$$

Подставим полученное выражение в (3):

$$\Delta m = m_1 \cdot \left(1 - \frac{P_2}{P_1}\right).$$

Подставим численные значения

$$\Delta m = 10 \cdot \left(1 - \frac{2{,}5 \cdot 10^4}{10^7}\right) = 7{,}5 \text{ кг.}$$

Ответ: $\Delta m = 7{,}5$ кг.

Задача 3. По газопроводной трубе (рис. 1) идет углекислый газ CO_2 при давлении $3{,}9 \cdot 10^5$ Н/м^2 и температуре $7^0 C$. Какова скорость движения газа в трубе, если за 10 мин протекает 2 кг газа и площадь сечения канала трубы 5 см^2? $M_{rCO_2} = 44$.

Дано:	СИ:
$P = 3{,}9 \cdot 10^5$ Н/м^2	
$t = 7^0 C$	280 К
$t = 10$ мин	600 с
$m = 2$ кг	
$S = 5$ см^2	$5 \cdot 10^{-4}$ м^2
$M_{rCO_2} = 44$	
$\text{v} - ?$	

Решение:

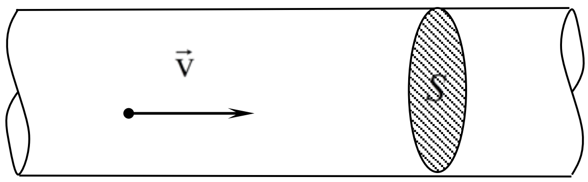


Рис. 1.

Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона:

$$P \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T. \qquad (1)$$

Молекулярная масса углекислого газа

$$M = M_r \cdot 10^{-3} = 44 \cdot 10^{-3} \text{ кг/кмоль}.$$

Объём газа, протекающий по трубе, равен

$$V = l \cdot S.$$

Длина трубы или путь, пройденный газом за время t:

$$l = \text{v} \cdot t,$$

тогда объём газа

$$V = \text{v} \cdot t \cdot S. \qquad (2)$$

Подставляем (2) в (1)

$$P \cdot \text{v} \cdot t \cdot S = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T.$$

Выразим скорость газа

$$\text{v} = \frac{m}{M \cdot t \cdot S \cdot P} \cdot R \cdot T.$$

Подставим численные значения:

$$\text{v} = \frac{2}{44 \cdot 10^{-3} \cdot 600 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 3{,}9 \cdot 10^5} \cdot 8{,}31 \cdot 280 = 0{,}9 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\text{v} = 0{,}9$ м/с.

Задача 4. Сколько гелия потребуется для наполнения воздушного шара диаметром 10 м, чтобы шар мог поднять груз весом 980 Н при нормальном атмосферном давлении и температуре 290 К? Объемом груза пренебречь.

Дано:	**Решение:**
$d = 10$ м $Q = 980$ Н $T = 290$ К $P = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па $M_{возд} = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/кмоль	
$m_г - ?$	

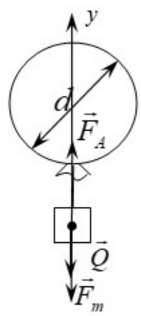


Рис. 2.

Для системы шар-груз внешними силами являются: выталкивающая сила (сила Архимеда) $\vec{F}_A$, сила тяжести, действующая на груз $\vec{Q}$, и сила тяжести, действующая на газ (гелий) $\vec{F}_m$ (рис. 2).

Уравнение равномерного движения системы шар-груз:

$$\vec{F}_A + \vec{F}_m + \vec{Q} = 0,$$

в скалярном виде на вертикально направленную ось *У*:

$$F_A - F_m - Q = 0. \qquad (1)$$

Выразим выталкивающую силу (силу Архимеда)

$$F_A = \rho_{возд} \cdot g \cdot V \ ,$$

и силу тяжести (вес) газа для равномерного движения

$$F_m = m_г \cdot g \,,$$

после подстановки в уравнение (1) получим:

$$\rho_{возд} \cdot g \cdot V - m_г g - Q = 0.$$

Выразим массу гелия:

$$m_г = \frac{\rho_{воз} gV - Q}{g} = \rho_{возд} V - \frac{Q}{g}. \qquad (2)$$

Для определения плотности воздуха при заданных условиях запишем уравнение Менделеева–Клапейрона:

$$P \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \,. \qquad (3)$$

Так как плотность по определению:

$$\rho_{возд} = \frac{m}{V},$$

то, выразив отношение $\frac{m}{V}$ из (3), получим:

$$\rho_{возд} = \frac{m}{V} = \frac{P \cdot M}{RT}. \qquad (4)$$

Объём шара (сферы) выразим через его диаметр:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{\pi \cdot d^3}{6}. \qquad (5)$$

Подставим выражения (4) и (5) в формулу (2):

$$m_г = \frac{PM}{RT} \cdot \frac{\pi d^3}{6} - \frac{Q}{g}.$$

Подставим числовые значения:

$$m_г = \frac{1{,}013 \cdot 10^5 \cdot 29 \cdot 10^{-3}}{8{,}31 \cdot 290} \cdot \frac{3{,}14 \cdot 10^3}{6} - \frac{980}{9{,}8} = 538{,}3 \text{ кг.}$$

Ответ: $m_г = 538{,}3$ кг.

Задача 5. Какой объем V занимает смесь газов азота массой $m_1 = 1$ кг и гелия массой $m_2 = 1$ кг при нормальных условиях?

Дано:
$m_1 = 1$ кг
$m_2 = 1$ кг
$T_0 = 237$ К
$P_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па
$M_1 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
$M_2 = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$V - ?$

Решение:

Нормальными называются условия, при которых давление равно $P_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па, а температура соответствует $t_0 = 0^0 C$, т.е. $T_0 = 237$ К.

Из уравнения Менделеева–Клайперона

$$PV = \frac{m_i}{M_i} \cdot RT$$

выразим парциальные давления азота и гелия соответственно:

$$P_1 = \frac{m_1}{M_1} \cdot \frac{RT_0}{V} \text{ и } P_2 = \frac{m_2}{M_2} \cdot \frac{RT_0}{V}.$$

По закону Дальтона давление смеси газов равно сумме их парциальных давлений

$$P_0 = P_1 + P_2 = \frac{m_1}{M_1} \cdot \frac{RT_0}{V} + \frac{m_2}{M_2} \cdot \frac{RT_0}{V} = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right) \frac{RT_0}{V}.$$

Выразим объём смеси газов азота и гелия при известных температуре и давлении

$$V = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right) \frac{RT_0}{P_0}.$$

Подставим числовые значения

$$V = \left(\frac{1}{28 \cdot 10^{-3}} + \frac{1}{4 \cdot 10^{-3}} \right) \cdot \frac{8{,}31 \cdot 273}{1{,}013 \cdot 10^5} = 6{,}4 \text{ м}^3.$$

Ответ: $V = 6{,}4$ м^3.

Задача 6. В двух сосудах емкостью $V_1 = 3$ л и $V_2 = 5$ л находятся соответственно азот под давлением $P_1 = 1$ атм и окись углерода под давлением $P_2 = 5$ атм (рис. 3, а). Сосуды соединили тонкой трубкой (рис. 3, б), объёмом которой можно пренебречь. Найдите установившееся давление P смеси, если температура обоих газов равна температуре окружающей среды.

Дано:	СИ:
$V_1 = 3$ л	$3\cdot 10^{-3}$ м^3
$V_2 = 5$ л	$5\cdot 10^{-3}$
$P_1 = 1$ атм	10^5 Па
$P_2 = 5$ атм	$5\cdot 10^5$ Па
$P - ?$	

Решение:

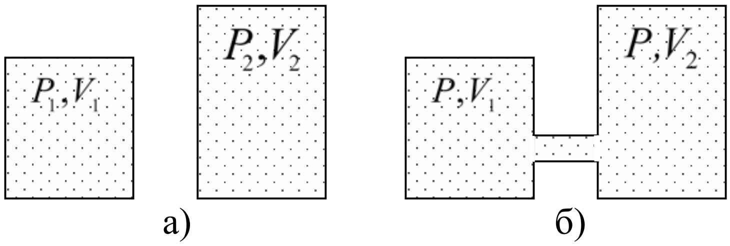


Рис. 3.

Согласно закону Дальтона, давление смеси состоит из парциальных давлений отдельных газов в общем объёме

$$P = P_1 + P_2,$$

где парциальные давления компонентов смеси могут быть выражены из уравнения Менделеева–Клапейрона:

$$P = \frac{m_1}{M_1}\cdot\frac{R\cdot T}{V_1+V_2} + \frac{m_2}{M_2}\cdot\frac{R\cdot T}{V_1+V_2} = \left(\frac{m_1}{M_1}+\frac{m_2}{M_2}\right)\frac{RT}{V_1+V_2}. \quad (1)$$

Из уравнения Менделеева–Клапейрона выразим также массы для начальных состояний газов

$$m_1 = \frac{P_1\cdot V_1\cdot M_1}{R\cdot T},$$

$$m_2 = \frac{P_2\cdot V_2\cdot M_2}{R\cdot T},$$

и подставив в формулу (1), получим давление смеси:

$$P = \left(\frac{P_1\cdot V_1\cdot M_1}{R\cdot T\cdot M_1}+\frac{P_2\cdot V_2\cdot M_2}{R\cdot T\cdot M_2}\right)\frac{R\cdot T}{V_1+V_2} = \frac{P_1\cdot V_1 + P_2\cdot V_2}{V_1+V_2}.$$

Подставим числовые значения:

$$P = \frac{10^5\cdot 3\cdot 10^{-3} + 5\cdot 10^5\cdot 5\cdot 10^{-3}}{3\cdot 10^{-3}+5\cdot 10^{-3}} = \frac{28\cdot 10^2}{8\cdot 10^{-3}} = 3{,}5\cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Ответ: $P = 3{,}5\cdot 10^5$ Па.

Задача 7. В цилиндр длиной $l = 1{,}6$ м (рис. 4, а), заполненный воздухом при нормальном атмосферном давлении P_0, начали медленно вдвигать поршень площадью основания $S = 200$ см^2. Определить силу F, действующую на поршень, если его остановить на расстоянии $l_1 = 10$ см от дна цилиндра (рис. 4, б).

Дано:	СИ:
$l = 1{,}6$ м	
$P_0 = 101325$ Па	
$S = 200$ см^2	$2\cdot 10^{-2}$ м^2
$l_1 = 10$ см	$0{,}1$ м
$F - ?$	

Решение:

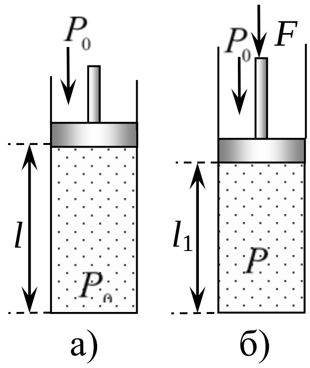


Рис. 4.

Механическое давление по определению равно:

$$P = \frac{F}{S}.$$

Следовательно, сила *F*, с которой действуют на поршень:

$$F = PS.$$

Процесс считаем длительным, т.е. температура неизменна, тогда по закону Бойля–Мариотта:

$$P_0 V_0 = PV,$$

или с учётом того, что объём цилиндра равен $V = S \cdot h$:

$$P_0 l S = P l_1 S.$$

Откуда конечное давление *P*:

$$P = P_0 \frac{l}{l_1},$$

сила *F*:

$$F = P_0 \frac{l}{l_1} S.$$

Подставим численные значения:

$$F = 101325 \cdot \frac{1{,}6}{0{,}1} \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 32{,}3 \cdot 10^{3} \text{ Н}.$$

Ответ: $F = 32{,}3$ кН.

Задача 8. Найти плотность ρ газовой смеси водорода и кислорода, если их массовые доли ω_1 и ω_2 равны соответственно $1/9$ и $8/9$. Давление *P* смеси равно 100 кПа, температура $T = 300$ К.

Дано:	**СИ:**
$M_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль	10^5 Па
$M_2 = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль	
$\omega_1 = 1/9$	
$\omega_2 = 8/9$	
$P = 100$ кПа	
$T = 300$ К	
$\rho_{см} - ?$	

Решение:

Плотность смеси:

$$\rho_{см} = \frac{m_{см}}{V} = \frac{m_1 + m_2}{V} = \frac{\omega_1 m_{см} + \omega_2 m_{см}}{V} =$$

$$= \frac{\omega_1 + \omega_2}{V} \cdot m_{см}, \qquad (1)$$

где $m_{см} = m_1 + m_2$ - общая масса, $\omega_i = \dfrac{m_i}{m_{см}}$ - массовая доля.

Для нахождения объема *V* запишем уравнение Менделеева–Клапейрона для смеси:

$$PV = \frac{m_{см}}{M_{см}} \cdot RT,$$

откуда объём:

$$V = \frac{m_{см}}{M_{см}} \cdot \frac{RT}{P}. \qquad (2)$$

Найдем молярную массу смеси. По закону Дальтона давление смеси:

$$P = P_1 + P_2, \qquad (3)$$

где P_1, P_2 – парциальные давления компонентов смеси.

Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона для водорода и азота соответственно:

$$P_1 V = \frac{m_1}{M_1} \cdot RT,$$

$$P_2 V = \frac{m_2}{M_2} \cdot RT.$$

Выразим давления смеси, водорода и азота и подставим в (3):

$$\frac{m_{см}}{M_{см}} \cdot \frac{RT}{V} = \frac{RT}{V}\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right),$$

сократим на $\frac{RT}{V}$, тогда молярная масса смеси:

$$M_{см} = \frac{m_{см}}{\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}} = \frac{m_{см}}{\frac{\omega_1 m_{см}}{M_1} + \frac{\omega_2 m_{см}}{M_2}} = \frac{1}{\frac{\omega_1}{M_1} + \frac{\omega_2}{M_2}} = \frac{M_1 M_2}{\omega_1 M_2 + \omega_2 M_1}. \qquad (4)$$

Подставим (2) в (1):

$$\rho_{см} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{m_{см} RT} \cdot m_{см} \cdot M_{см} \cdot P = \frac{\omega_1 + \omega_2}{RT} \cdot M_{см} \cdot P,$$

с учётом (4):

$$\rho_{см} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{RT} \cdot \frac{M_1 M_2}{\omega_1 M_2 + \omega_2 M_1} \cdot P = \frac{P(\omega_1 + \omega_2) M_1 M_2}{RT(\omega_1 M_2 + \omega_2 M_1)}.$$

Подставим численные значения:

$$\rho_{см} = \frac{10^5 \cdot \left(\frac{1}{9} + \frac{8}{9}\right) \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{8{,}31 \cdot 300 \cdot \left(\frac{1}{9} \cdot 32 \cdot 10^{-3} + \frac{8}{9} \cdot 2 \cdot 10^{-3}\right)} = \frac{6{,}4}{13{,}296} = 0{,}481 \text{ кг/м}^3.$$

Ответ: $\rho_{см} = 0{,}481$ кг/м^3.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Какое число молекул содержит единица массы водяного пара? (Ответ: $3{,}3 \cdot 10^{25}$ кг$^{-1}$)
2. Найти массу атома: а) водорода, б) гелия. (Ответ: $1{,}67 \cdot 10^{-27}$кг; $6{,}65 \cdot 10^{-27}$ кг.)
3. В запаянном сосуде находится вода, занимающая объем, равный половине

объема сосуда. Найти давление и плотность водяного пара при температуре 400° С, зная, что при этой температуре вся вода обращается в пар. (Ответ: 155 МПа; 500 кг/м^3)

4. Каким должен быть наименьший объем баллона, вмещающего массу 6,4 кг кислорода, если его стенки при температуре 20 °С выдерживают давление 15,7 МПа? (Ответ: 31 л)
5. В баллоне находилась масса 10 кг газа при давлении 10 МПа. Какую массу газа взяли из баллона, если давление стало равным 2,5 МПа? Температуру газа считать постоянной. (Ответ: 7,5 кг)
6. Баллон вместимостью 30 л содержит смесь водорода и гелия при температуре 300 К и давлении 828 кПа. Масса смеси равна 24 г. Определить массу водорода и массу гелия. (Ответ: 16 г; 8 г)
7. В закрытом сосуде объемом 3 л находится газ под давлением 0,2 МПа. Во втором сосуде объемом 4 л находится тот же газ под давлением 0,1 МПа. Температура газа в обоих сосудах одинакова. Под каким давлением будет находиться газ, если соединить сосуды трубкой? Объемом трубки пренебречь. (Ответ: 140 кПа)
8. Оболочка воздушного шара имеет вместимость 1600 м^3. Найти подъемную силу водорода, наполняющего оболочку, на высоте, где давление 60 кПа и температура 280 К. При подъеме шара водород может выходить через отверстие в нижней части шара. (Ответ: 10,9 кН)
9. Колба вместимостью 0,5 л содержит газ при нормальных условиях. Определить число молекул газа, находящихся в колбе. (Ответ: $1{,}34 \cdot 10^{22}$)
10. Какое число молекул находится в комнате объемом 80 м^3 при температуре 17 °С и давлении 100 кПа? (Ответ: $2 \cdot 10^{27}$)
11. Для получения высокого вакуума в стеклянном сосуде необходимо прогревать его при откачке с целью удалить адсорбированные газы. Определить, на сколько повысится давление в сферическом сосуде радиусом 10 см, если все адсорбированные молекулы перейдут со стенок в сосуд. Слой молекул на стенках считать мономолекулярным, сечение одной молекулы равно 10^{-15} см^2. Температура, при которой производится откачка, равна 600 К. (Ответ: 2,48 Па)

ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ. ЭНЕРГИЯ МОЛЕКУЛ. СКОРОСТЬ МОЛЕКУЛ

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов

$$P = \frac{1}{3} n m_0 \overline{v}_{кв}^2 \text{ или}$$

$$P = \frac{2}{3} n \overline{\varepsilon}_n ,$$

где n – концентрация молекул, $\overline{\varepsilon}_n = \frac{m_0 \overline{v}_{кв}^2}{2}$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы, m_0 – масса молекулы.

Средняя кинетическая энергия, приходящаяся на одну степень свободы молекулы

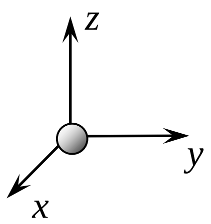
$$\overline{\varepsilon}_0 = \frac{1}{2} kT .$$

Средняя кинетическая энергия, приходящаяся на все степени свободы молекулы

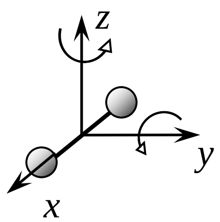
$$\overline{\varepsilon} = \frac{i}{2} kT ,$$

где i – число степеней свободы молекулы, k = 1,38·10^{-23} Дж/К – постоянная Больцмана.

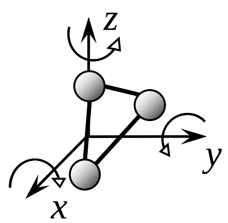
Одноатомная молекула   Двухатомная молекула   Трехатомная молекула



$i = 3$



$i = 5$



$i = 6$

Внутренняя энергия идеального газа

$$U = \frac{i}{2} \frac{m}{M} RT .$$

В газе, находящемся в состоянии равновесия при данной температуре, устанавливается некоторое стационарное, не меняющееся со временем, распределение молекул по скоростям. Это распределение описывается функцией $f(v)$, называемой функцией распределения молекул по скоростям, которая определяет относительное число молекул, скорости которых лежат в интервале от v до $v + dv$, т.е.

$$\frac{dN(v)}{N} = f(v) dv .$$

Распределение Максвелла

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 \, exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT} \right).$$

Эта функция удовлетворяет условию нормировки: $\int_0^{\infty} f(v) dv = 1.$

Скорость молекул:

- средняя квадратичная:

$$\overline{\mathrm{v}}_{кв} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}},$$

- средняя арифметическая:

$$\overline{\mathrm{v}} = \int_0^\infty \mathrm{v} f(\mathrm{v}) d\mathrm{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}},$$

- наиболее вероятная – скорость, при которой функция распределения молекул идеального газа по скоростям максимальна:

$$\mathrm{v}_в = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}.$$

Распределение Больцмана

$$n = n_0 e^{-\frac{U}{kT}},$$

где n – концентрация частиц; U – потенциальная энергия частиц; n_0 – концентрация частиц в точках поля, где $U = 0$.

Барометрическая формула

$$P = P_0 e^{-\frac{m_0 gh}{kT}},$$

где P – давление газа на высоте h,; P_0 – давление газа на высоте $h = 0$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Средняя квадратичная скорость молекул некоторого газа равна $\overline{\mathrm{v}}_{кв}$ = 450 м/с. Давление газа P = 50 кПа. Найти плотность ρ газа при этих условиях.

Дано:	**СИ:**
$\overline{\mathrm{v}}_{кв}$ = 450 м/с	
$P = 50$ кПа	$5 \cdot 10^4$ Па
$\rho - ?$	

Решение:

Давление газа определяется основным уравнением МКТ:

$$P = \frac{1}{3} n m_0 \overline{\mathrm{v}}_{кв}^2. \qquad (1)$$

Концентрация молекул n и плотность газа ρ связаны соотношением:

$$n = \frac{\rho}{m_0}.$$

Тогда уравнение (1) можно записать следующим образом:

$$P = \frac{1}{3} \rho \overline{\mathrm{v}}_{кв}^2. \qquad (2)$$

Из (2) выразим плотность

$$\rho = \frac{3P}{\overline{\mathrm{v}}_{кв}^2};$$

Подставим числовые значения

$$\rho = \frac{3 \cdot 5 \cdot 10^4}{450^2} = 0{,}74 \text{ кг/м}^3.$$

Ответ: $\rho = 0{,}74$ кг/м^3

Задача 2. Найти внутреннюю энергию двухатомного газа, находящегося в сосуде объемом $V = 2$ л под давлением $P = 150$ кПа.

Дано:	СИ:
$V = 2$ л	$2 \cdot 10^{-3}$ м^3
$P = 150$ кПа	$150 \cdot 10^3$ Па
$U - ?$	

Решение:

Так как внутренняя энергия газа

$$U = \frac{i}{2}\frac{m}{M}RT,$$

и согласно уравнению состояния идеального газа

$$PV = \frac{m}{M}RT,$$

тогда

$$U = \frac{i}{2}PV.$$

Для двухатомного газа число степеней свободы равно 5, следовательно,

$$U = \frac{5}{2}PV.$$

Подставим числовые значения

$$U = 2{,}5 \cdot 150 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 750 \text{ Дж}.$$

Ответ: $U = 750$ Дж.

Задача 3. Давление газа 750 мм рт. ст., а температура 27 ^{0}С. Определить концентрацию молекул и среднюю кинетическую энергию поступательного движения одной молекулы.

Дано:	СИ:
$T = 27^0$ С	300 К
$P = 750$ мм рт. ст.	10^5 Па
$\bar{\varepsilon}_n - ?$	
$n - ?$	

Решение:

Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы идеального газа

$$\bar{\varepsilon}_n = \frac{3}{2}kT,$$

Вычисляем

$$\bar{\varepsilon}_n = \frac{3}{2} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 = 6{,}21 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}.$$

Концентрацию молекул найдем из уравнения

$$P = nkT,$$

$$n = \frac{P}{kT} = \frac{10^5}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 300} \approx 2{,}4 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

Ответ: $\bar{\varepsilon}_n = 6{,}21 \cdot 10^{-21}$ Дж; $n \approx 2{,}4 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

Задача 4. Чему равны средние кинетические энергии поступательного и вращательного движения молекул, содержащихся в m = 2 кг водорода при температуре T = 400 К?

Дано:	**Решение:**
$T = 400$ К $m = 2$ кг	Считаем водород идеальным газом. Молекула водорода – двухатомная. Связь между атомами считаем жесткой, тогда число степеней свободы молекулы водорода равно 5. В среднем на одну степень свободы приходится энергия
$\overline{E}_n - ?$ $\overline{E}_{вр} - ?$	

$$\overline{\varepsilon}_0 = \frac{1}{2}kT .$$

Поступательному движению соответствуют 3, а вращательному 2 степени свободы. Тогда энергия поступательного движения одной молекулы

$$\overline{\varepsilon}_n = \frac{3}{2}kT ,$$

а энергия вращательного движения одной молекулы

$$\overline{\varepsilon}_{вр} = \frac{2}{2}kT = kT .$$

Число молекул, содержащихся в массе газа m,

$$N = \nu N_A = \frac{m}{M} N_A ,$$

Тогда средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул водорода будет равна:

$$\overline{E}_n = \frac{m}{M} N_A \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}\frac{m}{M}RT .$$

Средняя кинетическая энергия вращательного движения молекул водорода

$$\overline{E}_{вр} = \frac{m}{M}RT .$$

Подставляя числовые значения в формулы, имеем:

$$\overline{E}_n = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{2\cdot 10^{-3}}\cdot 8{,}31\cdot 400 = 49{,}86\cdot 10^5 \text{ Дж.}$$

$$\overline{E}_{вр} = \frac{2}{2\cdot 10^{-3}}\cdot 8{,}31\cdot 400 = 33{,}24\cdot 10^5 \text{ Дж.}$$

Ответ: $\overline{E}_n = 49{,}86\cdot 10^5$ Дж; $\overline{E}_{вр} = 33{,}24\cdot 10^5$ Дж.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Определить кинетическую энергию, приходящуюся в среднем на одну степень свободы молекулы азота, при температуре 1 кК, а также среднюю кинетическую энергию поступательного движения, вращательного движения и среднее значение полной кинетической энергии молекулы. (Ответ: $6{,}9\cdot 10^{-21}$ Дж; $20{,}7\cdot 10^{-21}$ Дж; $13{,}8\cdot 10^{-21}$ Дж; $34{,}5\cdot 10^{-21}$ Дж)

2. Определить среднюю арифметическую скорость молекул газа, если их средняя квадратичная скорость 1 км/с. (Ответ: 0,92 км/с)
3. Плотность некоторого газа 0,06 кг/м^3, средняя квадратичная скорость его молекул 500 м/с. Найти давление, которое газ оказывает на стенки сосуда. (Ответ: 5 кПа)
4. Барометр в кабине летящего вертолета показывает давление 90 кПа. На какой высоте летит вертолет, если на взлетной площадке барометр показывал давление 100 кПа? Считать, что температура воздуха равна 290 К и не изменяется с высотой. (Ответ: 885 м)
5. В центрифуге с ротором радиусом, равным 0,5 м, при температуре 300 К находится в газообразном состоянии вещество с относительной молекулярной массой 10^3. Определить отношение концентраций молекул у стенок ротора и в центре его, если ротор вращается с частотой 30 с$^{-1}$. (Ответ: 5,91)

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ
I начало термодинамики

Удельная теплоемкость:

$$c = \frac{dQ}{mdT},$$

где m – масса вещества.

Молярная теплоемкость:

$$C = \frac{dQ}{\nu dT},$$

где ν – количество вещества.

Молярные теплоемкости при постоянном объёме и постоянном давлении:

$$C_v = \frac{i}{2}R; \qquad C_p = \frac{i+2}{2}R,$$

где i – число степеней свободы молекулы, R – газовая постоянная.

Внутренняя энергия идеального газа

$$U = \nu C_v T = \frac{i}{2}\frac{m}{M}RT.$$

Работа, связанная с изменением объёма газа

$$A = \int_{V_1}^{V_2} PdV,$$

где V_1 и V_2 – начальный и конечный объемы газа.

Первое начало термодинамики

$$Q = \Delta U + A,$$

где Q – количество теплоты, сообщенное газу; ΔU – изменение его внутренней энергии; A – работа, совершаемая газом.

Уравнение Пуассона для адиабаты

$$PV^{\gamma} = const,$$

где $\gamma = \dfrac{c_p}{c_{\text{v}}} = \dfrac{C_p}{C_{\text{v}}}$ – показатель адиабаты.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Разность удельных теплоемкостей $c_p - c_{\text{v}}$ некоторого двухатомного газа равна 260 Дж/(кг·К). Найти молярную массу M газа и его удельные теплоемкости c_{v} и c_p.

Дано:
$c_p - c_{\text{v}} = 260$ Дж/(кг·К)
$i = 5$

M – ?
$c_{\text{v}}; c_p$ – ?

Решение:
Уравнение Майера связывает молярные теплоёмкости при постоянном давлении C_p и постоянном объёме C_{v}, через универсальную газовую постоянную R:

$$C_p = C_{\text{v}} + R.$$

Удельная теплоёмкость c связана с молярной теплоемкостью C через молярную массу вещества M

$$c = \frac{C}{M}, \tag{1}$$

следовательно, молярная теплоёмкость может быть выражена как

$$C = cM.$$

Уравнение Майера запишем через удельные теплоёмкости:

$$c_p = c_{\text{v}} + \frac{R}{M}$$

или

$$c_p - c_{\text{v}} = \frac{R}{M}. \tag{2}$$

Откуда молярная масса:

$$M = \frac{R}{c_p - c_{\text{v}}} = \frac{8{,}31}{260} = 0{,}032 \text{ кг/моль.}$$

Молярная теплоёмкость при постоянном объёме:

$$C_{\text{v}} = \frac{i}{2} \cdot R,$$

где $i = 5$ – число степеней свободы двухатомной молекулы.

Удельная теплоёмкость при постоянном объёме с учетом формулы (1) может быть выражена как

$$c_{\text{v}} = \frac{i}{2} \cdot \frac{R}{M}. \tag{3}$$

Тогда с учётом формулы (2):

$$c_v = \frac{i}{2} \cdot \left(c_p - c_v\right) = \frac{5}{2} \cdot 260 = 650 \text{ Дж/(кг·К)}.$$

Молярная теплоёмкость при постоянном давлении:

$$C_p = \frac{i+2}{2} \cdot R.$$

Удельная теплоёмкость при постоянном давлении, учитывая формулу (1):

$$c_p = \frac{i+2}{2} \cdot \frac{R}{M}. \qquad (4)$$

С учётом (2):

$$c_p = \frac{i+2}{i} \cdot \left(c_p - c_v\right) = \frac{5+2}{2} \cdot 260 = 910 \text{ Дж/(кг·К)}$$

Ответ: $M = 0{,}032$ кг/моль; $c_v = 650$ Дж/(кг·К); $c_p = 910$ Дж/(кг·К).

Задача 2. Каковы удельные теплоемкости c_v и c_p смеси газов, содержащей кислород массой $m_1 = 10г$ и азот массой $m_2 = 20г$?

Дано:	СИ:
$m_1 = 10$ г	$2 \cdot 10^{-2}$ кг
$m_2 = 20$ г	10^{-2} кг
$M_1 = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль	
$M_2 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль	
$c_v - ?$	
$c_p - ?$	

Решение:

Количество теплоты необходимое для нагревания смеси газов при постоянном объеме на температуру ΔT равно:

$$Q_v = c_v \cdot \left(m_1 + m_2\right) \cdot \Delta T. \qquad (1)$$

С другой стороны, количество теплоты для нагревания смеси можно представить, как

$$Q_v = c_{v1} m_1 \Delta T + c_{v2} m_2 \Delta T = \left(c_{v1} m_1 + c_{v2} m_2\right) \Delta T, \qquad (2)$$

где c_v – удельная теплоёмкость смеси; c_{v1} – удельная теплоёмкость кислорода; c_{v2} – удельная теплоёмкость азота. Приравняем правые части (1) и (2), и сократив на ΔT, получим:

$$c_v \cdot \left(m_1 + m_2\right) = c_{v1} \cdot m_1 + c_{v2} \cdot m_2.$$

Отсюда выразим удельную теплоёмкость смеси при постоянном объёме:

$$c_v = \frac{c_{v1} m_1 + c_{v2} m_2}{m_1 + m_2} = c_{v1} \frac{m_1}{m_1 + m_2} + c_{v2} \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Удельная теплоёмкость при постоянном объёме кислорода и азота соответственно:

$$c_{v1} = \frac{i_1}{2} \cdot \frac{R}{M_1},$$

$$c_{v2} = \frac{i_2}{2} \cdot \frac{R}{M_2},$$

где число степеней свободы кислорода и азота (так как в свободном состоянии молекулы этих газов двухатомные):

$$i_1 = i_2 = 5 .$$

Тогда удельная теплоёмкость смеси при постоянном объёме:

$$c_{\text{v}} = \frac{i_1}{2} \cdot \frac{R}{M_1} \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2} + \frac{i_2}{2} \cdot \frac{R}{M_2} \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \left(\frac{i_1 m_1}{M_1} + \frac{i_2 m_2}{M_2} \right) \cdot \frac{R}{2\left(m_1 + m_2\right)} \qquad (3)$$

Произведём вычисления:

$$c_{\text{v}} = \left(\frac{5}{32} + \frac{10}{28} \right) \cdot \frac{10^{-2}}{10^{-3}} \cdot \frac{8{,}31}{2\left(1+2\right)10^{-2}} = 711 \text{ Дж/(кг·К).}$$

Аналогично получим формулу для вычисления удельной теплоёмкости смеси при постоянном давлении.

Количество теплоты, необходимое для нагревания смеси газов при постоянном давлении на температуру ΔT , равно:

$$Q_p = c_p \left(m_1 + m_2 \right) \Delta T . \qquad (4)$$

С другой стороны, для нагревания газов смеси им необходимо передать количество теплоты:

$$Q_p = c_{p1} \cdot m_1 \cdot \Delta T + c_{p2} \cdot m_2 \cdot \Delta T = \left(c_{p1} \cdot m_1 + c_{p2} \cdot m_2 \right) \Delta T , \qquad (5)$$

где c_p – удельная теплоёмкость смеси; c_{p1} – удельная теплоёмкость кислорода; c_{p2}– удельная теплоёмкость азота. Приравняем правые части формул (4) и (5), и сократив на ΔT , получим:

$$c_p \cdot \left(m_1 + m_2 \right) = c_{p1} \cdot m_1 + c_{p2} \cdot m_2 .$$

Отсюда выразим удельную теплоёмкость смеси при постоянном давлении:

$$c_p = \frac{c_{p1} \cdot m_1 + c_{p2} \cdot m_2}{m_1 + m_2} = c_{p1} \frac{m_1}{m_1 + m_2} + c_{p2} \frac{m_2}{m_1 + m_2} .$$

Удельная теплоёмкость при постоянном давлении кислорода и азота соответственно:

$$c_{p1} = \frac{i_1 + 2}{2} \cdot \frac{R}{M_1} ,$$

$$c_{p2} = \frac{i_2 + 2}{2} \cdot \frac{R}{M_2} .$$

Тогда удельная теплоёмкость смеси при постоянном давлении:

$$c_p = \frac{i_1 + 2}{2} \cdot \frac{R}{M_1} \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2} + \frac{i_2 + 2}{2} \cdot \frac{R}{M_2} \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} =$$

$$= \left(\frac{\left(i_1 + 2\right) m_1}{M_1} + \frac{\left(i_2 + 2\right) m_2}{M_2} \right) \cdot \frac{R}{2\left(m_1 + m_2\right)} . \qquad (6)$$

Подставим числовые значения:

$$c_p = \left(\frac{\left(5+2\right) \cdot 10^{-2}}{32 \cdot 10^{-3}} + \frac{\left(5+2\right) \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{28 \cdot 10^{-3}} \right) \cdot \frac{8{,}31}{2\left(10^{-2} + 2 \cdot 10^{-2}\right)} = 955 \text{ Дж/(кг·К).}$$

Ответ: $c_{\text{v}} = 711$ Дж/(кг·К); $c_p = 995$ Дж/(кг·К).

Задача 3. Азот нагревался при постоянном давлении (рис. 5), причем ему было сообщено количество теплоты Q = 21 кДж. Определить работу A, которую совершил при этом газ, и изменение ΔU его внутренней энергии.

Дано:	**СИ:**	**Решение:**
$P = const$ $i = 5$ $Q = 21$ кДж	$21 \cdot 10^3$ Дж	
$A - ?$ $\Delta U - ?$		

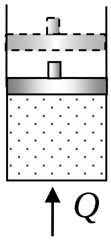


Рис. 5

Первое начало термодинамики для конечного состояния системы утверждает, что количество теплоты Q, переданное системе (газу), расходуется на изменение внутренней энергии ΔU системы и совершение системой (газом) работы A над внешними телами $Q = \Delta U + A$.

Работа газа при изобарном процессе равна:

$$A = P \cdot \Delta V . \quad (1)$$

Запишем уравнение Менделеева – Клапейрона для двух состояний газа:

$$P \cdot V_1 = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T_1 \text{ и } P \cdot V_2 = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T_2 .$$

Вычтем из второго уравнения первое:

$$P(V_2 - V_1) = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1),$$

или

$$P\Delta V = \frac{m}{M} R\Delta T , \quad (2)$$

тогда формула работы газа принимает вид:

$$A = \frac{m}{M} \cdot R \cdot \Delta T . \quad (3)$$

Изменение внутренней энергии газа определяется формулой:

$$\Delta U = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot \Delta T . \quad (4)$$

Разделим выражение (3) на (4):

$$\frac{A}{\Delta U} = \frac{\frac{m}{M} \cdot R \cdot \Delta T}{\frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot \Delta T} = \frac{2}{i},$$

следовательно, изменение внутренней энергии можно представить через работу газа

$$\Delta U = \frac{i}{2} \cdot A . \quad (5)$$

Подставим выражение (5) в формулу (1)

$$Q = \frac{i}{2} \cdot A + A = \frac{i+2}{2} \cdot A,$$

тогда работа, совершаемая газом с учётом того, что число степеней свободы $i = 5$, т.к. молекула азота – двухатомная:

$$A = \frac{2}{i+2} \cdot Q = \frac{2}{5+2} \cdot 21 \cdot 10^3 = 6 \cdot 10^3 \text{ Дж.}$$

Изменение внутренней энергии

$$\Delta U = \frac{i}{i+2} \cdot Q = \frac{5}{5+2} \cdot 21 \cdot 10^3 = 15 \cdot 10^3 \text{ Дж.}$$

Ответ: $A = 6$ кДж; $\Delta U = 15$ кДж.

Задача 4. Водород занимает объем $V_1 = 10$ м^3 при давлении $P_1 = 0{,}1$ МПа. Газ нагрели при постоянном объеме до давления $P_2 = 0{,}3$ МПа. Определить изменение ΔU внутренней энергии газа, работу A, совершенную газом, и теплоту Q, сообщенную газу.

Дано:	**СИ:**
$V_1 = 10$ м^3	
$V_1 = V_2 = const$	
$P_1 = 0{,}1$ МПа	10^5 Па
$P_2 = 0{,}3$ МПа	$3 \cdot 10^5$ Па
$i = 5$	
$\Delta U - ?$	
$Q - ?$	
$A - ?$	

Решение:

Изменение внутренней энергии:

$$\Delta U = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot \Delta T. \qquad (1)$$

Применим уравнение Менделеева–Клапейрона для начального и конечного состояний газа и выразим температуры:

$$\begin{cases} P_1 \cdot V_1 = \dfrac{m}{M} \cdot R \cdot T_1 \\ P_2 \cdot V_2 = \dfrac{m}{M} \cdot R \cdot T_2 \end{cases} => \begin{cases} T_1 = \dfrac{P_1 \cdot V_1}{m \cdot R} \cdot M \\ T_2 = \dfrac{P_2 \cdot V_2}{m \cdot R} \cdot M \end{cases}.$$

Вычтем из второго уравнения первое

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{P_2 \cdot V_2}{m \cdot R} \cdot M - \frac{P_1 \cdot V_1}{m \cdot R} \cdot M = \left(P_2 - P_1\right) \cdot \frac{V_1 \cdot M}{m \cdot R}.$$

Тогда в соответствии с уравнением (1)

$$\Delta U = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot \left(P_2 - P\right)_1 \cdot \frac{V_1 \cdot M}{m \cdot R} = \frac{i}{2} \cdot V_1 \cdot \left(P_2 - P_1\right).$$

Произведём вычисления (водород – двухатомный газ, поэтому число степеней свободы $i = 5$)

$$\Delta U = \frac{5}{2} \cdot 10 \cdot \left(3 \cdot 10^5 - 10^5\right) = 5 \cdot 10^6 \text{ Дж.}$$

Работа газа, так как процесс изохорический ($V = const$), равна:

$$A = P \cdot \Delta V = 0.$$

Применим первое начало термодинамики

$$Q = \Delta U + A,$$

учитывая, что $A = 0$, получим

$$Q = \Delta U = 5 \cdot 10^6 \text{ Дж.}$$

Ответ: $\Delta U = 5$ МДж; $A = 0$; $Q = 5$ МДж.

Задача 5. Кислород при неизменном давлении $P = 80$ кПа нагревается. Его объем увеличивается от $V_1 = 1$ м^3 до $V_2 = 3$ м^3 (рис. 6). Определить изменение ΔU внутренней энергии кислорода, работу A, совершенную им при расширении, а также теплоту Q, сообщенную газу.

Дано:	СИ:	Решение:
$P = 80$ кПа	$8 \cdot 10^4$ Па	
$V_1 = 1$ м^3		
$V_2 = 3$ м^3		
$i = 5$		
$\Delta U - ?$		
$A - ?$		
$Q - ?$		

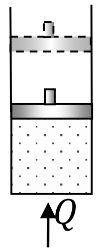


Рис. 6.

Изобарный процесс ($P = const$) – процесс при постоянном давлении.

Изменение внутренней энергии:

$$\Delta U = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot \Delta T.$$

Из уравнения Менделеева – Клапейрона:

$$P\left(V_2 - V_1\right) = P\Delta V = \frac{m}{M} R\Delta T. \quad (1)$$

Тогда изменение внутренней энергии

$$\Delta U = \frac{i}{2} \cdot P \cdot \left(V_2 - V_1\right).$$

Произведём вычисления (кислород двухатомный газ и число степеней свободы $i = 5$)

$$\Delta U = \frac{5}{2} \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot \left(3 - 1\right) = 40 \cdot 10^4 = 400 \cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

Работа газа при постоянном давлении:

$$A = P \cdot \left(V_2 - V_1\right) = 8 \cdot 10^4 \left(3 - 1\right) = 16 \cdot 10^4 = 160 \cdot 10^3.$$

Согласно первому началу термодинамики:

$$Q = \Delta U + A = \frac{i}{2} \cdot P \cdot \left(V_2 - V_1\right) + P \cdot \left(V_2 - V_1\right) = \frac{i+2}{2} \cdot P \cdot \left(V_2 - V_1\right) =$$

$$= \left(400 + 160\right) \cdot 10^5 = 560 \cdot 10^3.$$

Ответ: $\Delta U = 400$ кДж; $A = 160$ кДж; $Q = 560$ кДж.

Задача 6. В цилиндре под поршнем находится азот, имеющий массу $m = 0{,}6$ кг и занимающий объем $V_1 = 1{,}2$ м^3 при температуре $T_1 = 560$ К (рис. 7, а). В результате нагревания газ расширился и занял объем $V_2 = 4{,}2$ м^3, причем температура осталась неизменной (рис. 7, б). Найти изменение внутренней энергии газа ΔU, совершенную им работу A и теплоту Q, сообщенную газу.

Дано:
$m = 0{,}6$ кг
$V_1 = 1{,}2$ м^3
$V_2 = 4{,}2$ м^3
$T_1 = 560$ К
$M_{N_2} = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$\Delta U - ?$
$A - ?$
$Q - ?$

Решение:

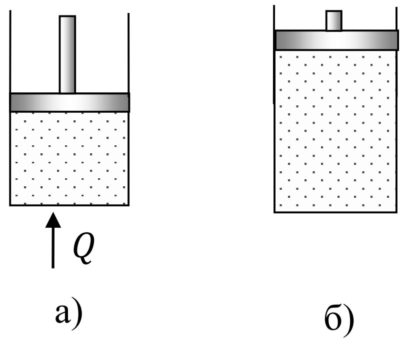


Рис. 7.

Изотермический процесс ($T = const$) – процесс, происходящий при постоянной температуре. Изменение внутренней энергии при изотермическом процессе

$$\Delta U = m \cdot c_v \cdot \Delta T = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot \Delta T = 0.$$

Элементарная работа газа

$$dA = P \cdot dV.$$

Выразим из уравнения Менделеев–Клапейрона:

$$P \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T$$

давление

$$P = \frac{m}{M} \cdot \frac{R \cdot T}{V},$$

запишем выражение для элементарной работы:

$$dA = \frac{m}{M} \cdot \frac{R \cdot T}{V} \cdot dV.$$

Полная работа

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m \cdot R \cdot T}{M} \cdot \frac{dV}{V} = \frac{m \cdot RT}{M} \cdot ln\frac{V_2}{V_1}.$$

Подставим численные значения:

$$A = \frac{0{,}6 \cdot 8{,}31 \cdot 560}{28 \cdot 10^{-3}} \cdot ln\frac{4{,}2}{1{,}2} = 99{,}72 \cdot 10^3 \cdot ln 3{,}5 = 125 \cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

Согласно первому началу термодинамики

$$Q = \Delta U + A,$$

учитывая, что $\Delta U = 0$, получим:

$$Q = A = 125 \cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

Ответ: $\Delta U = 0$, $A = 125$ кДж; $Q = 125$ кДж.

Задача 7. Кислород массой m = 2 кг занимает объем $V_1 = 1$ м^3 и находится под давлением $P_1 = 0{,}2$ МПа. Газ был нагрет сначала при постоянном давлении до объема $V_2 = 3$ м^3, а затем при постоянном объеме до давления $P_3 = 0{,}5$ МПа. Найти: 1) изменение ΔU внутренней энергии газа; 2) совершенную им работу A ; 3) количество теплоты Q , переданное газу. Построить график процесса.

Дано:	**СИ:**
$m = 2$ кг	
$V_1 = 1$ м^3	
$P_1 = 0{,}2$ МПа	$2 \cdot 10^5$ Па
$P_1 = P_2$	
$V_2 = 3$ м^3	
$V_3 = V_2$	
$P_3 = 0{,}5$ МПа	$5 \cdot 10^5$ Па
$\Delta U - ?$	
$A - ?$	
$Q - ?$	

Решение:

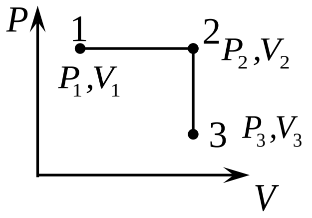


Рис. 8

1. Изменение внутренней энергии при переходе газа из одного состояния в другое не зависит от вида процесса, а определяется только начальным и конечным состояниями, поэтому

$$\Delta U = m \cdot c_{\text{v}} \cdot \Delta T = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot \Delta T = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot \left(T_3 - T_1\right), \qquad (1)$$

где $i = 5$ – число степеней свободы молекул двухатомного газа.

Применим уравнение Менделеева – Клапейрона. Выразим из него температуру начального T_1 и конечного состояний T_3:

$$T_1 = \frac{P_1 \cdot V_1 \cdot M}{m \cdot R}, \; T_3 = \frac{P_3 \cdot V_3 \cdot M}{m \cdot R},$$

подставим эти выражения в (1), после преобразований получим формулу для расчета изменения внутренней энергии процесса 1→2→3 (рис. 4):

$$\Delta U = \frac{i}{2} \cdot \frac{R \cdot m}{M} \cdot \left(P_3 \cdot V_3 - P_1 \cdot V_1\right) \cdot \frac{M}{m \cdot R} = \frac{i}{2} \cdot \left(P_3 \cdot V_3 - P_1 \cdot V_1\right).$$

Подставим числовые значения

$$\Delta U = \frac{5}{2}\left(5 \cdot 10^5 \cdot 3 - 2 \cdot 10^5 \cdot 1\right) = 32{,}5 \cdot 10^5 \text{ Дж.}$$

2. Работа, совершенная газом в процессе 1→2→3, состоит из суммы работ, произведенных в процессах 1→2 и 2→3

$$A = A_{1,2} + A_{2,3}.$$

Процесс 1→2 изобарный $P = const$, работа равна:

$$A_{1,2} = P_1 \cdot \left(V_2 - V_1\right) = 2 \cdot 10^5 \cdot \left(3 - 1\right) = 4 \cdot 10^5 \text{ Дж.}$$

Процесс 2→3 изохорный $V = const$, работа равна:

$$A_{2,3} = P_2 \cdot \left(V_3 - V_2\right) = 0.$$

Тогда полная работа газа в процессе 1→2→3 равна:

$$A = A_{1,2} + A_{2,3} = A_{1,2} = 4 \cdot 10^5 \text{ Дж}.$$

3. Количество теплоты, переданное газу, определим из первого начала термодинамики

$$Q = \Delta U + A = \frac{i}{2} \cdot \left(P_3 \cdot V_3 - P_1 \cdot V_1\right) + P_1 \cdot \left(V_2 - V_1\right).$$

Подставим числовые значения:

$$Q = 32{,}5 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^5 = 36{,}5 \cdot 10^5 \text{ Дж}.$$

Ответ: $\Delta U = 3{,}25$ МДж; $A = 0{,}4$ МДж; $Q = 3{,}65$ МДж.

Задача 8. Аргон при давлении P = 0,8 атм изменил объем с V_1 = 1 л до V_2 = 2 л. Как изменяется величина внутренней энергии, если расширение производилось при изобарическом; адиабатическом процессах (рис. 9)?

Дано:	**СИ:**
$V_1 = 1$ л	10^{-3} м^3
$V_2 = 2$ л	$2 \cdot 10^{-3}$ м^3
$P = 0{,}8$ атм	$0{,}8 \cdot 10^5$ Па
$\Delta U - ?$	

Решение:

Согласно первому закону термодинамики количество теплоты, переданное системе, может расходоваться как на увеличение внутренней энергии, так и на совершение механической работы:

$$Q = \Delta U + A.$$

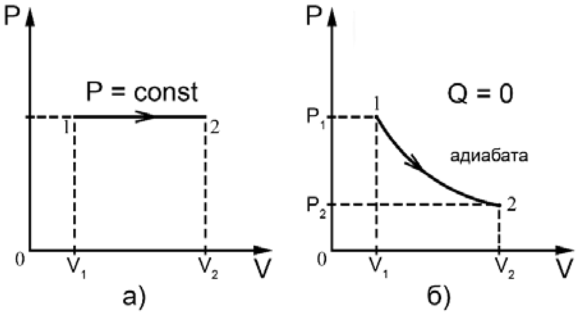


Рис. 9

Величину внутренней энергии можно определить, зная массу газа, удельную теплоемкость при постоянном объеме и изменение температуры

$$\Delta U = c_v m \Delta T.$$

Однако удобнее изменение внутренней энергии определять через молярную теплоемкость, которая может быть выражена через число степеней свободы

$$c_v = \frac{C_v}{M} = \frac{i}{2} \cdot \frac{R}{M},$$

тогда можно записать:

$$\Delta U = \frac{i}{2} \cdot \frac{mR\Delta T}{M}. \qquad (1)$$

При изобарическом расширении газа согласно первому закону термодинамики часть тепла идет на изменение внутренней энергии. Определить ΔU для аргона по формуле (1) нельзя, так как масса и температура газа не заданы.

Используем уравнение Менделеева–Клапейрона для начального и конечного состояний газа:

$$PV_1 = \frac{mRT_1}{M};\ PV_2 = \frac{mRT_2}{M},$$

вычтем из второго уравнения первое

$$P\left(V_1 - V_2\right) = \frac{m}{M} R\left(T_2 - T_1\right). \qquad (2)$$

Подставим выражение (2) в формулу (1)

$$\Delta U = \frac{i}{2} P\left(V_2 - V_1\right).$$

Полученное уравнение является расчетным для определения ΔU при изобарическом расширении:

$$\Delta U = \frac{3}{2} \cdot 0{,}8 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3} = 120 \text{ Дж}.$$

При адиабатическом расширении газа теплообмен со средой не происходит

$$\Delta U + A = 0.$$

Это соотношение устанавливает, что работа расширения газа может быть произведена только за счет уменьшения внутренней энергии газа

$$A = -\Delta U. \qquad (3)$$

Работа газа при адиабатическом процессе может быть определена по формуле:

$$A = \frac{m}{M} \frac{RT_1}{\left(\gamma - 1\right)} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right],$$

где γ – показатель степени адиабаты, который является отношением теплоемкостей:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}.$$

Изменение внутренней энергии при адиабатическом процессе с учетом уравнения (3):

$$\Delta U = \frac{m}{M} \frac{RT_1}{\left(\gamma - 1\right)} \left[\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} - 1 \right]. \qquad (4)$$

Формулу (4) преобразуем, используя уравнение Менделеева–Клапейрона для начального состояния газа

$$\Delta U = \frac{PT_1}{\left(\gamma - 1\right)} \left[\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} - 1 \right].$$

Подставляя числовые значения, получим

$$\Delta U = \frac{0{,}8 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3}}{\left(1{,}67 - 1\right)} \left[\left(\frac{10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} \right)^{1{,}67 - 1} - 1 \right] = -44{,}4 \text{ Дж}.$$

Ответ: $\Delta U = 120$ Дж; $\Delta U = -44{,}4$ Дж.

Задача 9. В цилиндре под поршнем находится водород, который имеет массу m = 0,02 кг и начальную температуру t_0 = 27 ºС. Водород сначала расширился адиабатически, увеличив свой объем в 5 раз, а затем был сжат изотермически, причем объем газа уменьшился в 5 раз (рис. 10). Найти температуру в конце адиабатического расширения и работу, совершенную газом.

Дано:	**СИ:**
$m = 0{,}02$ кг	
$V_2 = 5V_1$	
$t_1 = 27^0$	T_1 = 300 К
$T_2 - ?$	
$A - ?$	

Решение:

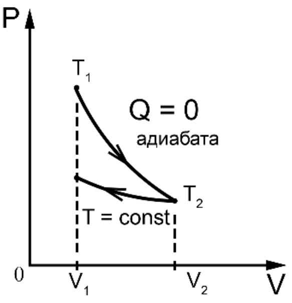


Рис. 10.

При адиабатическом процессе температура и давление газа связаны уравнением Пуассона:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}, \qquad (1)$$

где показатель адиабаты

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}.$$

Рассматривая водород как двухатомный газ, полагаем i = 5, следовательно, γ = 1,4.

Из формулы (1) запишем выражение для конечной температуры:

$$T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = 300\left(\frac{1}{5}\right)^{0,4} = 158\ \text{К}.$$

Работу газа при адиабатическом расширении можно определить по формуле:

$$A_1 = \frac{m}{M}C_v\left(T_1 - T_2\right) = \frac{m}{M}\frac{i}{2}R\left(T_1 - T_2\right),$$

$$A_1 = \frac{0{,}02}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot 8{,}31\cdot 10^3\cdot\left(300 - 158\right) = 29{,}5\cdot 10^3\ \text{Дж}.$$

Работа газа при изотермическом процессе может быть представлена формулой:

$$A_2 = \frac{m}{M}RT_2\, ln\frac{V_2}{V_1}.$$

Подставляя известные числовые значения величин, входящих в правую часть равенства, находим

$$A_2 = \frac{0{,}02}{2} \cdot 10^3 \cdot 8{,}31 \cdot 158 \cdot ln\frac{1}{5} = -21{,}1 \cdot 10^3 \text{ Дж.}$$

Знак «-» показывает, что при сжатии газа работа совершается над газом внешними силами.

Полная работа, совершенная газом при описанных процессах, равна

$$A = A_1 + A_2 = 29{,}5 \cdot 10^3 - 21{,}1 \cdot 10^3 = 8{,}4 \cdot 10^3 \text{ Дж.}$$

Ответ: $T_2 = 158$ К; $A = 8{,}4$ кДж.

Задача 10. Идеальный двухатомный газ, находящийся в цилиндре с поршнем, первоначально занимает объем V_1 = 4 л при давлении P_1 = 3 10^5 Па. Газ сначала адиабатно расширяется до объема V_2 = 6 л, а затем изохорно охлаждается (рис. 11). В результате давление оказывается равным P_3 = 10^5 Па. Найти работу, совершенную газом; изменение его внутренней энергии; количество поглощенной теплоты.

Дано:	**СИ:**	**Решение**:
$V_1 = 4$ л	$4 \cdot 10^{-3}$ м^3	
P_1 = 3 10^5 Па		
V_2 = 6 л	$6 \cdot 10^{-3}$ м^3	
$V_2 = V_3$		
P_3 = 10^5 Па		
$A - ?$		
$\Delta U - ?$		
$Q - ?$		

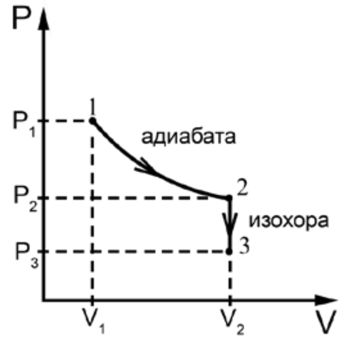


Рис. 11.

Из условия задачи следует, что газ последовательно участвует в двух процессах: адиабатическом и изохорическом. Чтобы найти работу A и количество поглощенной теплоты Q при переходе из состояния 1 в состояние 2, необходимо каждый из процессов рассмотреть отдельно. При этом

$$A = A_1 + A_2. \tag{1}$$

и

$$Q = Q_1 + Q_2. \tag{2}$$

Изменение внутренней энергии не зависит от процесса и определяется температурами начального и конечного состояний

$$\Delta U = \frac{i}{2} \cdot \frac{mR}{M} \Delta T. \tag{3}$$

Адиабатный процесс протекает без теплообмена с окружающей средой, следовательно, $Q_1 = 0$, работа, совершенная газом равна уменьшению его внутренней энергии:

$$A_1 = -\Delta U_1 = \frac{i}{2} \cdot \frac{mR}{M}\left(T_1 - T_2\right). \tag{4}$$

Используем уравнение Клапейрона–Менделеева для состояний 1 и 2:

$$P_1V_1 = \frac{mRT_1}{M};\ P_2V_2 = \frac{mRT_2}{M}, \tag{5}$$

подставив (5) в уравнение (4), получим:

$$A_1 = \frac{i}{2} \cdot \left(P_1V_1 - P_2V_2\right). \tag{6}$$

Давление P_2 выразим из уравнения Пуассона для адиабаты:

$$P_1V_1^{\gamma} = P_2V_2^{\gamma},$$

для двухатомного газа γ = 1,4, следовательно,

$$P_2 = P_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} = 3 \cdot 10^5 \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^{1,4} = 1,7 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Подставим числовые значения в уравнение (6):

$$A_1 = \frac{5}{2} \cdot \left(3 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^{-3} - 1,7 \cdot 10^5 \cdot 6 \cdot 10^{-3}\right) = 450 \text{ Дж}.$$

При изохорном процессе $A_2 = 0$, следовательно, полная работа, совершенная газом, $A = A_2 = 450$ Дж.

При изохорном охлаждении количество поглощенной теплоты

$$Q_2 = C_V \cdot \frac{mR}{M}\left(T_3 - T_2\right),$$

где молярная теплоемкость при постоянном объеме $C_V = \frac{i}{2}R$.

Воспользовавшись уравнением Менделеева–Клапейрона для состояний 2 и 3,

$$P_2V_2 = \frac{mRT_2}{M};\ P_3V_3 = \frac{mRT_3}{M},$$

Получим:

$$Q_2 = \frac{i}{2} \cdot \left(P_3V_3 - P_2V_2\right),$$

$$Q_2 = \frac{5}{2} \cdot \left(10^5 \cdot 6 \cdot 10^{-3} - 1,7 \cdot 10^5 \cdot 6 \cdot 10^{-3}\right) = -1050 \text{ Дж}.$$

Общее количество теплоты равно $Q = Q_1 + Q_2 = Q_2 = -1050$ Дж. Знак минус указывает, что газ отдавал теплоту в окружающую среду.

Изменение внутренней энергии может быть найдено из соотношения

$$\Delta U = \frac{m}{M} \cdot \frac{i}{2} \cdot \left(T_3 - T_1\right) = \frac{i}{2}\left(P_3V_3 - P_1V_1\right);$$

$$\Delta U = \frac{5}{2}\cdot\left(10^5\cdot 6\cdot 10^{-3} - 3\cdot 10^5\cdot 4\cdot 10^{-3}\right) = -1500 \text{ Дж}.$$

Ответ: $\Delta U = -1500$ Дж; $A = 450$ Дж; $Q = -1050$ Дж.

Задача 11. Десять молей идеального двухатомного газа, занимающего при давлении 0,1 МПа и температуре 0 ºС объем 0,01 м^3, адиабатно расширяются до вдвое большего объема. Определить совершенную газом работу; конечное давление газа, конечную величину внутренней энергии газа.

Дано:	СИ:
$V_1 = 0{,}01$ м^3	
$P_1 = 0{,}1$ МПа	10^5 Па
$V_2 = 0{,}02$ м^3	
$t = 0^0C$	$T = 273$ К
$A - ?$	
$P_2 - ?$	
$U - ?$	

Решение:

При адиабатном процессе конечное давление определим из уравнения Пуассона:

$$P_2 = P_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma}.$$

Для двухатомного число степеней свободы равно $i = 5$, поэтому показатель адиабаты

$$\gamma = \frac{(i+2)}{i} = 1{,}4.$$

Определим числовое значение конечного давления:

$$P_2 = 10^5\cdot\left(\frac{0{,}01}{0{,}02}\right)^{1,4} = 0{,}38\cdot 10^5 \text{ Па}.$$

При адиабатическом процессе совершаемая работа газом равна убыли его внутренней энергии:

$$A = -\Delta U = \frac{i}{2}\cdot\frac{mR}{M}\left(T_1 - T_2\right). \qquad (1)$$

Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона для начального и конечного состояний:

$$\frac{m}{M}RT_1 = P_1V_1;\ \frac{m}{M}RT_2 = P_2V_2,$$

подставим выражения в (1), получим выражение для работы газа:

$$A = \frac{i}{2}\cdot\left(P_1V_1 - P_2V_2\right),$$

произведем вычисления

$$A = \frac{5}{2}\cdot\left(10^5\cdot 0{,}01 - 0{,}38\cdot 10^5\cdot 0{,}02\right) = 600 \text{ Дж}.$$

Внутренняя энергия газа в конечном состоянии может быть найдена по формуле:

$$U_2 = \frac{i}{2}\cdot\frac{mR}{M}T_2 = \frac{i}{2}\cdot P_2V_2,$$

произведем вычисления:

$$U_2 = \frac{5}{2}\cdot 0{,}38\cdot 10^5\cdot 0{,}02 = 1900 \text{ Дж}.$$

Ответ: $A = 600$ Дж; $P_2 = 0{,}38 \cdot 10^5$ Па; $U_2 = 1900$ Дж.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Разность удельных теплоемкостей $c_p - c_V$ некоторого двухатомного газа равна 260 Дж/(кг·К). Найти молярную массу газа и его удельные теплоемкости c_V и c_p. (Ответ: 0,032 кг/моль; 650 Дж/(кг·К); 910 Дж/(кг·К))
2. Найти показатель адиабаты для смеси газов, содержащей гелий массой 10 г и водород массой 4 г. (Ответ: 1,51)
3. Найти внутреннюю энергию 20 г кислорода при температуре 10 ^{o}C. Какая часть этой энергии приходится на долю поступательного движения молекул и какая часть на долю вращательного движения? (Ответ: 3,7 кДж; 2,2 кДж; 1,5 кДж.)
4. Водород занимает объем 10 м^3 при давлении 100 кПа. Газ нагрели при постоянном объеме до давления 300 кПа. Определить: изменение внутренней энергии газа; 2) работу, совершенную газом; 3) количество теплоты, сообщенное газу. (Ответ: 5 МДж; 0; 5 МДж)
5. Газ, занимавший объем 12 л под давлением 100 кПа, был изобарно нагрет от температуры 300 К до 400 К. Определить работу расширения газа. (Ответ: 400 Дж)
6. 1 кмоль многоатомного газа нагревается на 100 К в условиях свободного расширения. Найти количество теплоты, сообщенное газу, приращение его внутренней энергии и работу расширения газа. (Ответ: 3,32 МДж; 2,49 МДж; 0,83 МДж)
7. При изотермическом расширении 10 г азота, находящегося при температуре 17 ^{o}C, была совершена работа 860 Дж. Во сколько раз изменилось давление азота при расширении? (Ответ: в 2,72 раза)
8. Азот массой 2 г, имевший температуру 300 К, был адиабатно сжат так, что его объем уменьшился в 10 раз. Определить конечную температуру газа и работу сжатия. (Ответ: 754 К; 674 Дж)
9. Автомобильная шина накачена до давления 220 кПа при температуре 290 К. Во время движения она нагрелась до температуры 330 К и лопнула. Считая процесс, происходящий после повреждения шины, адиабатным, определить изменение температуры вышедшего из нее воздуха. Внешнее давление воздуха равно 100 кПа. (Ответ: 76 К)

ЦИКЛИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Термодинамический процесс называется обратимым, если он может происходить как в прямом, так и в обратном направлении. Причем, если такой процесс происходит сначала в прямом, а затем в обратном направлении и система возвращается в исходное состояние, то в окружающей среде и в этой системе не происходит никаких изменений. Всякий процесс, не удовлетворяющий этим условиям, является необратимым.

Реальные процессы необратимы, в них всегда происходит диссипация (потеря) энергии (из-за трения, теплопроводности и т.д.). Обратимые процессы – это физическая модель – идеализация реальных процессов.

Тепловой двигатель – это периодически действующий двигатель, совершающий работу за счет полученной извне теплоты.

Термостатом называется термодинамическая система, которая может обмениваться теплотой с телами практически без изменения собственной температуры.

Рабочее тело – это тело, совершающее круговой процесс и обменивающееся энергией с другими телами.

Принцип работы теплового двигателя: от термостата с более высокой температурой T_1, называемого нагревателем, за цикл отнимается количество теплоты Q_1, а термостату с более низкой температурой T_2, называемому холодильником, за цикл передается количество теплоты Q_2, при этом совершается работа $A = Q_1 - Q_2$ (рис. 12).

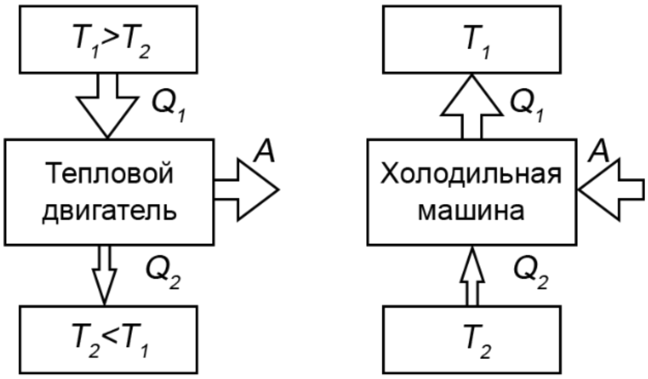


Рис. 12. Термический коэффициент полезного действия цикла

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

где Q_1 – количество теплоты, полученное газом от нагревателя; Q_2 – количество теплоты, отданное газом охладителю.

Наиболее экономичный обратимый круговой процесс, состоящий из двух изотерм и двух адиабат называется циклом Карно (рис. 13).

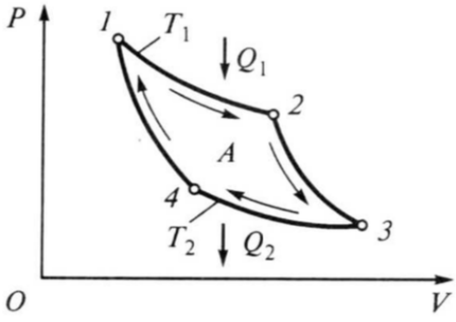


Рис. 13. КПД цикла Карно

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где T_1 – температура нагревателя; T_2 – температура охладителя.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Идеальный двухатомный газ, содержащий количество вещества $\nu = 1$ кмоль, совершает замкнутый цикл, график которого изображен на рис. 14. Определить: 1) количество теплоты Q_1, полученное от нагревателя; 2) количество теплоты Q_2, переданное охладителю; 3) работу A, совершаемую газом за цикл; 4) термический КПД η цикла.

Дано:	**СИ:**
$\nu = 1$ кмоль	10^3 моль
$i = 5$	
$P_1 = 12$ кПа	$12 \cdot 10^3$ Па
$P_2 = n_1 P_1 = \frac{4}{3} P_1$	$16 \cdot 10^3$ Па
$V_1 = 2$ м^3	
$V_1 = V_2$	
$V_3 = n_2 V_1 = 1{,}5 V_1$ м^3	
$V_3 = V_4$	
$P_1 = P_4$	
$P_2 = P_3$	
$Q_1 - ?$	
$Q_2 - ?$	
$A - ?$	
$\eta - ?$	

Решение:

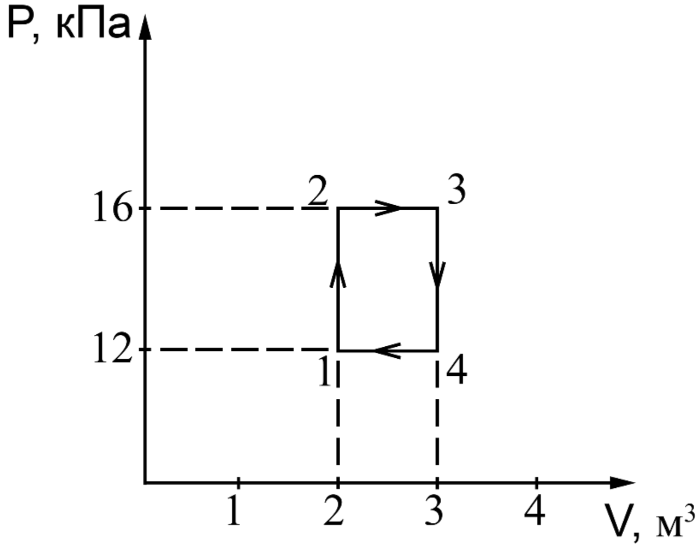


Рис. 14.

1. Газ получает количество теплоты Q_1 на двух участках (рис. 14): Q_{12} на участке 1→2 (изохорный процесс) и Q_{23} 2→3 (изобарный процесс), т.е.:

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{23}.$$

Количество теплоты, полученное газом на участке1→2:

$$Q_{12} = C_v \cdot \nu \cdot \Delta T = \frac{i}{2} \cdot R \cdot \nu \cdot \left(T_2 - T_1\right) = \frac{i}{2} \cdot R \cdot \nu \cdot \left(T_2 - T_1\right) =$$

$$= \frac{i}{2} \cdot \nu \cdot R \cdot \left(T_2 - T_1\right),$$

где $C_v = \frac{i}{2} \cdot \nu$ – молярная теплоёмкость при постоянном объёме; $\nu = \frac{m}{M}$ – количество вещества.

Начальную температуру найдём из уравнения Менделеева–Клапейрона:

$$P_1 \cdot V_1 = \nu \cdot R \cdot T_1 \Rightarrow T_1 = \frac{P_1 \cdot V_1}{\nu \cdot R}.$$

Аналогично получим:

$$T_2 = \frac{P_2 \cdot V_2}{\nu \cdot R}. \qquad (1)$$

Тогда количество теплоты процесса 1→2:

$$Q_{12} = \frac{i}{2} \cdot \nu \cdot R \cdot \left(P_2 - P_1\right) \cdot \frac{V_2}{\nu \cdot R} = \frac{i}{2} \cdot V_1 \cdot \left(P_2 - P_1\right),$$

$$Q_{12} = \frac{i}{2} \cdot V_1 \cdot \left(n_1 P_1 - P_1\right) = \frac{i}{2} P_1 V_1 \left(n_1 - 1\right). \qquad (2)$$

Подставим числовые значения:

$$Q_{12} = \frac{5}{2} \cdot 2 \cdot \left(6 - 12\right) \cdot 10^3 = 20 \cdot 10^3 \text{ Дж},$$

знак «+» подтверждает, что на этом участке газ получает количество теплоты.

Количество теплоты, полученное газом на участке 2→3:

$$Q_{23} = C_p \cdot \nu \cdot \Delta T = \frac{i+2}{2} \cdot R \cdot \nu \cdot \left(T_3 - T_2\right),$$

где $C_p = \frac{i+2}{2} \cdot R$ – молярная теплоёмкость при постоянном давлении.

Из закона Гей–Люссака найдём температуру T_3:

$$\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3} \Rightarrow T_3 = \frac{V_3}{V_2} \cdot T_2, \qquad (3)$$

т.е. количество теплоты, с учётом формулы (3):

$$Q_{23} = \frac{i+2}{2} \cdot \nu \cdot R \cdot T_2 \cdot \left(\frac{V_3}{V_2} - 1\right),$$

с учётом формулы (1) количество теплоты процесса 2→3:

$$Q_{23} = \frac{i+2}{2} \cdot \nu \cdot R \cdot \frac{P_2 \cdot V_2}{\nu \cdot R} \cdot \left(\frac{V_3}{V_2} - 1\right) = \frac{i+2}{2} \cdot P_2 \cdot \left(V_3 - V_2\right), \qquad (4)$$

Определим числовое значение:

$$Q_{23} = \frac{\left(5+2\right)}{2} \cdot 16 \cdot 10^3 \cdot \left(3 - 2\right) = 56 \cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

Газ получает количество теплоты Q_1 за цикл:

$$Q_1 = \frac{i}{2} \cdot V_2 \cdot \left(P_2 - P_1\right) + \frac{i+2}{2} \cdot P_2 \cdot \left(V_3 - V_2\right) = \left(20 + 56\right) \cdot 10^3 = 76 \cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

Знак «+» подтверждает, что на этом участке газ получает количество теплоты.

Представим Q_1 через начальные давление и объем. Так как согласно (4)

$$Q_{23} = \frac{i+2}{2} n_1 P_1 V_1 \left(n_2 - 1\right), \qquad (5)$$

то суммируя количество теплоты из (2) и (5), получим формулу для полученного количества теплоты через начальные параметры газа:

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{23} = \frac{i}{2}P_1V_1\left(n_1 - 1\right) + \frac{i+2}{2}n_1P_1V_1\left(n_2 - 1\right) =$$

$$= P_1V_1\left(\frac{i}{2}n_1n_2 - \frac{i}{2} + n_1n_2 - n_1\right). \qquad (6)$$

Результат расчета по формуле (6) будет аналогичным полученному.

2. Газ отдаёт количество теплоты Q_{34} охладителю на участке 3→4 (изохорный процесс) и Q_{41} на участке 4→1 (изобарный процесс) т.е.

$$Q_2 = Q_{34} + Q_{41}.$$

Количество теплоты, отданное газом на участке 3→4:

$$Q_{34} = C_v\nu\Delta T = \frac{i}{2}R\nu\left(T_4 - T_3\right) = \frac{i}{2}R\nu T_3\left(\frac{P_4}{P_3} - 1\right) =$$

$$= \frac{i}{2}\nu \cdot R\frac{V_3P_2}{\nu R}\left(\frac{P_1}{P_2} - 1\right) = \frac{i}{2}V_3\left(P_1 - P_2\right), \qquad (7)$$

т. к. согласно закону Шарля

$$\frac{P_3}{T_3} = \frac{P_4}{T_4} \Rightarrow T_4 = \frac{P_4}{P_3} \cdot T_3 = \frac{P_1}{P_2} \cdot T_3,$$

и с учётом формулы (1) температура T_3:

$$T_3 = \frac{V_3}{V_2} \cdot \frac{P_2 \cdot V_2}{\nu \cdot R} = \frac{V_3 \cdot P_2}{\nu \cdot R}.$$

Подставим числовые значения:

$$Q_{34} = \frac{5}{2} \cdot 3 \cdot \left(12 - 16\right) \cdot 10^3 = -30 \cdot 10^3 \text{ Дж.}$$

Выразим Q_{34} через начальные параметры газа

$$Q_{34} = \frac{i}{2}P_1V_1n_2\left(1 - n_1\right).$$

$$Q_{34} = \frac{i}{2}P_1V_1n_2\left(1 - n_1\right)$$

Количество теплоты, отданное газом на участке 4→1

$$Q_{41} = C_p \cdot \nu \cdot \left(T_1 - T_4\right) = \frac{i+2}{2} \cdot R \cdot \nu \cdot \left(T_1 - T_4\right),$$

учитывая, что $T_1 = \frac{P_1V_1}{\nu R}$ и $T_4 = \frac{P_4}{P_3}T_3 = \frac{P_1}{P_3} \cdot \frac{P_3V_3}{\nu R} = \frac{P_1V_3}{\nu R}$, можно записать

$$Q_{41} = \frac{i+2}{2} \cdot \left(P_1V_1 - P_1V_3\right) = \frac{i+2}{2} \cdot P_1\left(V_1 - V_3\right).$$

Подставим числовые значения

$$Q_{41} = \frac{7}{2} \cdot 12 \cdot 10^3 \cdot (-1) = -42 \cdot 10^3 \text{ Дж.}$$

В итоге газ отдаёт количество теплоты Q_2 охладителю за цикл

$$Q_2 = Q_{34} + Q_{41} = -30 - 42 = -72 \text{ кДж,}$$

знак «–» подтверждает, что газ отдаёт количество теплоты, т.е. модуль $Q_2 = 72$ кДж.

Выведем формулу для расчета Q_2 через начальные параметры:

$$Q_2 = \frac{i}{2} P_1 V_1 n_2 (1 - n_1) + \frac{i+2}{2} P_1 V_1 (1 - n_2) = P_1 V_1 \left(\frac{i}{2} - \frac{i}{2} n_1 n_2 - n_2 + 1 \right),$$

результат вычислений по которой будет аналогичен полученному значению Q_2.

3. Работа замкнутого цикла вычисляется как разность между полученным и отданным количествами теплоты, причем Q_2 берется по модулю:

$$A = Q_1 - Q_2,$$

$$A = Q_1 - Q_2 = 76 - 72 = 4 \text{ кДж.}$$

Работа газа за цикл через начальные параметры может быть выражена как

$$A = P_1 V_1 \left(\frac{i}{2} n_1 n_2 - \frac{i}{2} + n_1 n_2 - n_1 \right) - \left(-P_1 V_1 \left(\frac{i}{2} - \frac{i}{2} n_1 n_2 - n_2 + 1 \right) \right) =$$

$$= P_1 V_1 (n_1 n_2 - n_1 - n_2 + 1)$$

4. Термический КПД любого цикла:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{A}{Q_1}.$$

Подставим числовые значения:

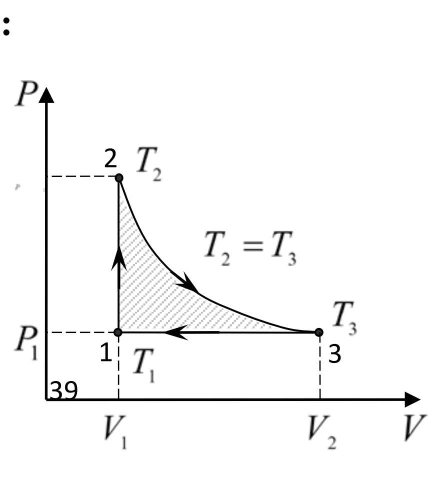
$$\eta = \frac{4}{76} = 0{,}0526 = 5{,}26 \text{ \%.}$$

Ответ: $Q_1 = 76$ кДж; $Q_2 = 72$ кДж; $A = 4$ кДж; $\eta = 5{,}26$ %.

Задача 2. Идеальный двухатомный газ, содержащий количество вещества моль, находящийся под давлением МПа при температуре К, нагревают при постоянном объеме до давления МПа. После этого газ изотермически расширился до начального давления и затем изобарически был сжат до начального объема . Построить график цикла. Определить температуру газа для характерных точек цикла и его термический КПД .

Дано:	**СИ:**
$\nu = 1$ моль	
$i = 5$	
$P_1 = 0{,}1$ МПа	10^5 Па
$P_2 = 0{,}2$ МПа	$2 \cdot 10^5$ Па

Решение:



$T_1 = 300$ К
$T_2 - ?$
$T_3 - ?$
$\eta - ?$

Рис. 15.

1. График цикла представлен на рис. 15, работа цикла A численно равна площади цикла.
2. Точки 1 и 2 лежат на изохоре, поэтому согласно закону Шарля

$$\frac{P}{T} = const \Rightarrow \frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2},$$

откуда температура в точке 2

$$T_2 = \frac{P_2}{P_1} \cdot T_1. \qquad (1)$$

Подставим численные значения:

$$T_2 = \frac{2 \cdot 10^5}{10^5} \cdot 300 = 600 \text{ К}.$$

Процесс 2→3 – изотермический, поэтому

$$T_3 = T_2 = 600 \text{ К}.$$

3. Термический КПД цикла

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

Газ получает количество теплоты на участках: 1→2 и 2→3, следовательно,

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{23}.$$

Участок 1→2 – *изохора*, полученное газом количество теплоты

$$Q_{12} = m \cdot c_v \cdot (T_2 - T_1) = m \cdot \frac{i}{2} \cdot \frac{R}{M} \cdot \left(\frac{P_2}{P_1} \cdot T_1 - T_1 \right) = \frac{i}{2} \cdot \nu \cdot R \cdot T_1 \cdot \left(\frac{P_2}{P_1} - 1 \right),$$

где $c_v = \frac{i}{2} \cdot \frac{R}{M}$ – удельная теплоёмкость при постоянном объёме, $\nu = \frac{m}{M}$ – количество вещества.

Подставим числовые значения:

$$Q_{12} = \frac{5}{2} \cdot 1 \cdot 8{,}31 \cdot 300 \cdot \left(\frac{2 \cdot 10^5}{10^5} - 1 \right) = 6232{,}5 \text{ Дж},$$

знак «+» подтверждает, что на этом участке газ получает количество теплоты.

Участок 2→3 – изотерма. Запишем первое начало термодинамики с учётом того, что изменение внутренней энергии при изотермическом процессе равно нулю:

$$Q_{23} = \Delta U + A = A.$$

Работа газа при изотермическом процессе определится выражением:

$$A = \int PdV = \int_{V_2}^{V_3} \frac{m}{M} \cdot \frac{R \cdot T_2}{V} \cdot dV = \nu \cdot R \cdot T_2 \cdot ln\frac{V_3}{V_2} = \nu \cdot R \cdot T_2 \cdot ln\frac{V_1}{V_2}.$$

Отношение объемов выразим из закона Бойля–Мариотта:

$$PV = const$$

или

$$P_2V_2 = P_3V_3 \Rightarrow \frac{V_3}{V_2} = \frac{P_2}{P_3},$$

или применительно к исходным данным:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{P_2}{P_1},$$

Следовательно, с учётом формулы (1) количество теплоты, полученное на участке 2→3:

$$Q_{23} = \nu \cdot R \cdot T_2 \cdot ln\frac{P_2}{P_1} = \nu \cdot R \cdot \frac{P_2}{P_1} \cdot T_1 \cdot ln\frac{P_2}{P_1}.$$

Подставим численные значения:

$$Q_{23} = 1 \cdot 8{,}31 \cdot \frac{2 \cdot 10^5}{10^5} \cdot 300 \cdot ln\frac{2 \cdot 10^5}{10^5} = 4986 \cdot 0{,}693 = 3456 \text{ Дж},$$

знак «+» подтверждает, что на этом участке газ получает количество теплоты.

В итоге за цикл газ получит количество теплоты:

$$Q_1 = \frac{i}{2} \cdot \nu \cdot R \cdot T_1 \cdot \left(\frac{P_2}{P_1} - 1\right) + \nu \cdot R \cdot \frac{P_2}{P_1} \cdot T_1 \cdot ln\frac{P_2}{P_1} = 6232{,}5 + 3456 = 9688{,}5 \text{ Дж}.$$

Газ отдает тепло на участке 3→1 (изобара)

$$Q_2 = |Q_{31}| = m \cdot c_p \cdot (T_1 - T_3) = m \cdot \frac{i+2}{2} \cdot \frac{R}{M} \cdot (T_1 - T_2) = \frac{i+2}{2} \cdot \nu \cdot R \cdot T_1 \cdot \left(1 - \frac{P_2}{P_1}\right)$$

где $c_p = \frac{i+2}{2} \cdot \frac{R}{M}$ – удельная теплоёмкость при постоянном давлении, $\nu = \frac{m}{M}$ – количество вещества, учли формулу (1).

Подставим численные значения

$$Q_{31} = \frac{5+2}{2} \cdot 1 \cdot 8{,}31 \cdot 300 \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot 10^5}{10^5}\right) = -8725{,}5 \text{ Дж},$$

следовательно, отданное газом тепло

$$Q_2 = 8725{,}5 \text{ Дж}.$$

КПД цикла выразим через исходные данные задачи:

$$\eta = \frac{\frac{i}{2} \cdot \nu \cdot R \cdot T_1 \cdot \left(\frac{P_2}{P_1} - 1\right) + \nu \cdot R \cdot \frac{P_2}{P_1} \cdot T_1 \cdot ln\frac{P_2}{P_1} - \left|\frac{i+2}{2} \cdot \nu \cdot R \cdot T_1 \cdot \left(1 - \frac{P_2}{P_1}\right)\right|}{\frac{i}{2} \cdot \nu \cdot R \cdot T_1 \cdot \left(\frac{P_2}{P_1} - 1\right) + \nu \cdot R \cdot \frac{P_2}{P_1} \cdot T_1 \cdot ln\frac{P_2}{P_1}},$$

После преобразований

$$\eta = \frac{\frac{P_2}{P_1}\cdot ln\frac{P_2}{P_1} - \left(\frac{P_2}{P_1} - 1\right)}{\frac{i}{2}\cdot\left(\frac{P_2}{P_1} - 1\right) + \frac{P_2}{P_1}\cdot ln\frac{P_2}{P_1}}.$$

Подставим численные значения:

$$\eta = \frac{\frac{2\cdot 10^5}{10^5}\cdot ln\frac{2\cdot 10^5}{10^5} - \left(\frac{2\cdot 10^5}{10^5} - 1\right)}{\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{2\cdot 10^5}{10^5} - 1\right) + \frac{2\cdot 10^5}{10^5}\cdot ln\frac{2\cdot 10^5}{10^5}} = \frac{2\cdot ln2 - (2-1)}{\frac{5}{2}\cdot(2-1) + 2\cdot ln2} = 0{,}099 = 9{,}9\ \%.$$

Ответ: $T_2 = T_3 = 600$ К, $\eta = 9{,}9$ %.

Задача 3. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура T_1 нагревателя равна 470 К, температура T_2 охладителя равна 280 К. При изотермическом расширении газ совершает работу $A = 100$ Дж. Определить термический КПД η цикла, а также количество теплоты Q_2, которое газ отдает охладителю при изотермическом сжатии.

Дано:	**Решение:**
$T_1 = 470$ К	
$T_2 = 280$ К	
$A_{12} = 100$ Дж	
$\eta - ?$	
$Q_2 - ?$	

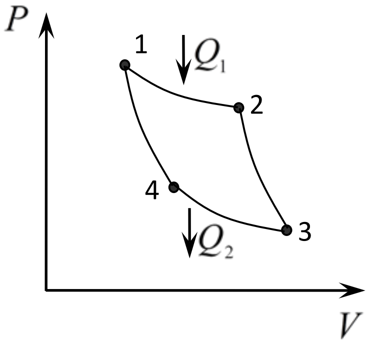


Рис. 16.

Цикл Карно (рис. 16) состоит из процессов:

1→2 – изотермическое расширение;

3→4 – изотермическое сжатие;

2→3 – адиабатное расширение;

4→1 – адиабатное сжатие.

1. КПД цикла Карно:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Подставим численные значения:

$$\eta = \frac{470 - 280}{470} = 0{,}404 = 4{,}04\ \%.$$

2. Процесс 3→4 – изотермическое сжатие, т.е. изменение внутренней энергии $\Delta U = 0$, тогда количество теплоты полученное газом за цикл

$$Q_1 = Q_{12} = A_{12} + \Delta U = A_{12}.$$

Так как КПД цикла может быть определен как

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{A_{12}},$$

тогда количество теплоты, отданное охладителю

$$Q_2 = (1-\eta)\cdot A_{12}.$$

Подставим числовые значения:

$$Q_2 = (1-0{,}404)\cdot 100 = 59{,}6 \text{ Дж.}$$

Ответ: $\eta = 4{,}04$; $Q_2 = 59{,}6$ Дж.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Идеальный двухатомный газ, содержащий количество вещества 1 моль, совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. Наименьший объем 10 л, наибольший 20 л, наименьшее давление 246 кПа, наибольшее 410 кПа. Построить график цикла. Определить температуру газа для характерных точек цикла и его термический КПД. (Ответ: 300 К; 500 К; 1кК; 605 К; 8,55 %)
2. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура нагревателя равна 470 К, температура охладителя равна 280 К. При изотермическом расширении газ совершает работу 100 Дж. Определить термический КПД цикла, а также количество теплоты, которое газ отдает охладителю при изотермическом сжатии. (Ответ: 0,404; 59,6 Дж)
3. Холодильная машина, работающая по обратному циклу Карно, совершает за один цикл работу 37 кДж. При этом она берет тепло от тела с температурой –10 ^{o}C и передает тепло телу с температурой 17 ^{o}C. Найти КПД цикла, количество теплоты, отнятое у холодного тела за один цикл, и количество теплоты, переданное более горячему телу за один цикл. (Ответ: 0,093; 360 кДж; 397 кДж)

ЭНТРОПИЯ

Изменение энтропии

$$\Delta S = S_B - S_A = \int_A^B \frac{dQ}{T};$$

A и B – начальное и конечное состояние системы.

Формула Больцмана:

$$S = k\,lnW \text{ S},$$

где S – энтропия системы; W – термодинамическая вероятность ее состояния; k – постоянная Больцмана.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Кислород массой $m = 2$ увеличил свой объём в $n = 5$ один раз изотермически, другой – адиабатически. Найти изменение энтропии в каждом из указанных процессов.

Дано:	Решение:
$m = 2$ кг $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль $\frac{V_2}{V_1} = n = 5$	Изменение *энтропии* выражается общей формулой: $$\Delta S_1 = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}.$$
$\Delta S - ?$	1. Изотермический процесс.

Вынесем за знак интеграла постоянную величину – температуру:

$$\Delta S = \frac{1}{T}\int_1^2 dQ = \frac{Q}{T}.$$

Согласно первому началу термодинамики, с учётом того, что изменение внутренней энергии при изотермическом процессе равно нулю:

$$Q = \Delta U + A = A = \int PdV = \int \frac{m}{M} \cdot \frac{R \cdot T}{V} \cdot dV = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \cdot ln\frac{V_2}{V_1}.$$

Подставим числовые значения:

$$\Delta S_1 = \frac{2 \cdot 8{,}31}{32 \cdot 10^{-3}} ln5 = 0{,}5194 \cdot 10^3 \cdot 1{,}609 = 835{,}9 \approx 836 \text{ Дж/К}.$$

2. Адиабатический процесс ($dQ = 0$). Изменение энтропии:

$$\Delta S_2 = \int_1^1 \frac{dQ}{T} = 0.$$

Ответ: $\Delta S_1 = 836$ Дж/К; $\Delta S_2 = 0$.

Задача 2. Найти изменение ΔS энтропии при изобарическом расширении азота массой $m = 4$ г от объёма $V_1 = 5$ л до объёма $V_2 = 9$ л.

Дано:	СИ:	Решение:
$P = const$ $m = 4$ г $M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль $i = 5$ $V_1 = 5$ л $V_2 = 9$ л	 $4 \cdot 10^{-3}$ кг $5 \cdot 10^{-3}$ м^3 $9 \cdot 10^{-3}$ м^3	Элементарное количество теплоты при постоянном давлении: $$dQ_p = m \cdot c_p \cdot dT = \frac{i+2}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot dT,$$ тогда изменение *энтропии*:
$\Delta S - ?$		$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ_p}{T} = \frac{i+2}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot \int_1^2 \frac{dT}{T} =$$

$$= \frac{i+2}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot ln\frac{T_2}{T_1}.$$

Используя закон Гей –Люссака, найдём отношение конечной и начальной температур:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{V_2}{V_1},$$

подставим в формулу для изменения энтропии:

$$\Delta S = \frac{i+2}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot ln\frac{V_2}{V_1}.$$

Подставим числовые значения:

$$\Delta S = \frac{5+2}{2} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3}} \cdot 8{,}31 \cdot ln\frac{9 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-3}} = 2{,}44 \text{ Дж/К}.$$

Ответ: $\Delta S = 2{,}44$ Дж/К.

Задача 3. Найти изменение ΔS энтропии при превращении массы $m = 10$ г льда ($t = -20^0 C$) в пар ($t_n = 100^0 C$).

Дано:	СИ:
$m = 10$ г	10^{-2} кг
$t_1 = -20^0 C$	253 К
$t_2 = 0^0 C$	273 К
$t_3 = 100^0 C$	373 К
$c_{лёд} = 2100$ Дж/(кг·К)	
$\lambda = 335 \cdot 10^3$ Дж/кг	
$c_{вода} = 4200$ Дж/(кг·К)	
$r = 2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг	
$\Delta S - ?$	

Решение:

Изменение энтропии состоит из сумм изменений энтропии: 1 – нагрев льда, 2 – плавление льда, 3 – нагрев воды, 4 – испарение воды:

$$\Delta S = \Delta S_{лед}^{нагр} + \Delta S_{лед}^{плав} + \Delta S_{вода}^{нагр} + \Delta S_{вода}^{исп}.$$

Изменение энтропии при нагреве льда до температуры плавления:

$$\Delta S_{лед}^{нагр} = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = m \cdot c \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = m \cdot c_{льда} \cdot ln\frac{T_2}{T_1}.$$

Подставим числовые значения:

$$\Delta S_{лед}^{нагр} = 10^{-2} \cdot 2100 \; ln\frac{273}{253} = 1{,}6 \text{ Дж/К}.$$

Изменение энтропии при плавлении льда при температуре T_2

$$\Delta S_{лед}^{плав} = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{Q_{плав}}{T} = \frac{m \cdot \lambda}{T_2},$$

где λ – удельная теплота плавления. Подставим числовые значения:

$$\Delta S_{лед}^{плав} = \frac{10^{-2} \cdot 335 \cdot 10^3}{273} = 12{,}27 \text{ Дж/К}.$$

Изменение энтропии при нагреве воды

$$\Delta S_{вода}^{нагр} = \int_{T_2}^{T_3} m \cdot c \cdot \frac{dT}{T} = m \cdot c_{воды} \cdot ln\frac{T_3}{T_2}.$$

Подставим числовые значения:

$$\Delta S_{вода}^{нагр} = 10^{-2} \cdot 4200 \cdot ln\frac{373}{273} = 13{,}11 \text{ Дж/К}.$$

Изменение энтропии при парообразовании воды

$$\Delta S_{вода}^{исп} = \int\limits_2^2 \frac{dQ}{T} = \frac{Q_{пар}}{T} = \frac{mr}{T_3},$$

где r – удельная теплота парообразования.

Подставим численные значения:

$$\Delta S_{вода}^{исп} = \frac{10^{-2} \cdot 2{,}26 \cdot 10^6}{373} = 60{,}59 \text{ Дж/К.}$$

Тогда изменение энтропии:

$$\Delta S = 1{,}6 + 12{,}27 + 13{,}11 + 60{,}59 = 87{,}58 \approx 88 \text{ Дж.}$$

Ответ: $\Delta S = 88$ Дж/К.

Задача 4. Найти изменение ΔS энтропии при изотермическом расширении массы $m = 6$ г водорода от давления $P_1 = 100$ кПа до давления $P_2 = 50$ кПа.

Дано:	**СИ:**
$m = 6$ г	$6 \cdot 10^{-3}$ кг
$T = const$	
$M = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль	
$P_1 = 100$ кПа	10^5 Па
$P_2 = 50$ кПа	$5 \cdot 10^5$ Па
$\Delta S - ?$	

Решение:

Изменение энтропии при изотермическом процессе:

$$\Delta S = \int\limits_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \cdot \int\limits_1^2 dQ.$$

Первое начало термодинамики запишем, учитывая, что изменение внутренней энергии равно нулю при изотермическом процессе:

$$Q = \Delta U + A = A = \int PdV = \int \frac{m}{M} \cdot \frac{R \cdot T}{V} \cdot dV = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \cdot ln\frac{V_2}{V_1}.$$

Применим для двух состояний газа закон Бойля–Мариотта и выразим отношение объёмов:

$$P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{P_1}{P_2},$$

тогда изменение энтропии:

$$\Delta S = \frac{1}{T} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \cdot ln\frac{P_1}{P_2} = \frac{m}{M} \cdot R \cdot ln\frac{P_1}{P_2}.$$

Подставим числовые значения:

$$\Delta S = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot 8{,}31 \cdot ln 2 = 3 \cdot 8{,}31 \cdot 0{,}693 = 17{,}28 \approx 17{,}3 \text{ Дж/К.}$$

Ответ: $\Delta S = 17{,}3$ Дж/К.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Массу m = 640 г расплавленного свинца при температуре плавления вылили

на лед при температуре 0° С. Найти приращение энтропии при этом процессе. Удельная теплота плавления свинца – 22,6 кДж/кг, льда – 335 Дж/кг; удельная теплоемкость свинца – 126 Дж/кг, льда – 2100 Дж/кг. (Ответ: 63 Дж/К)

2. Кислород массой 2 кг увеличил свой объем в 5 раз один раз изотермически, другой – адиабатно. Найти изменение энтропии в ходе указанных процессов. (Ответ: 836 Дж/К; 0 Дж/К)
3. Найти приращение энтропии при изобарическом расширении 8 г гелия от объема 10 л до объема 25 л. (Ответ: 38,1 Дж/К)

ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА. РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ. ЖИДКОСТИ

Средняя длина свободного пробега молекул газа

$$\overline{l} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d_{эфф}^2 n},$$

где $d_{эфф}$ – эффективный диаметр; n –- концентрация молекул.

Закон Ньютона для силы вязкого трения:

$$F_{тр} = \frac{dp}{dt} = -\eta \frac{d\text{v}}{dz} \Delta S,$$

где η – коэффициент вязкости; $\frac{d\text{v}}{dz}$ – градиент скорости; ΔS – площадь.

Коэффициент динамической вязкости:

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \overline{\text{v}} \overline{l},$$

где ρ – плотность; $\overline{\text{v}}$ – средняя скорость.

Закон Фурье для теплопроводности:

$$Q = -\lambda \frac{dT}{dx} S \Delta t,$$

где $\frac{dT}{dx}$ – градиент температуры; Δt – время.

Коэффициент теплопроводности газа:

$$\lambda = \frac{1}{3} c_{\text{v}} \rho \overline{\text{v}} \overline{l} = \frac{1}{6} kn \overline{\text{v}} \overline{l},$$

где c_{v} – удельная теплоемкость при постоянном объеме.

Закон Фика для диффузии:

$$\Delta m = -D \frac{dn}{dx} m_0 S \Delta t,$$

где m_0 -– масса молекулы; $\frac{dn}{dx}$ -– градиент концентрации.

Коэффициент диффузии газа:

$$D = \frac{1}{3} \overline{\text{v}} \overline{l}.$$

Уравнение Ван-дер-Ваальса для реального газа:
а) для одного моля газа

$$\left(P+\frac{a}{V_m^{\ 2}}\right)(V_m-b)=RT\ ,$$

где V_m – молярный объем; a и b – постоянные, различные для разных газов;
б) для произвольного количества вещества ν газа

$$\left(P+\frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V-\nu b)=\nu RT\ .$$

Коэффициент поверхностного натяжения

$$\sigma=\frac{F}{l}=\frac{\Delta E}{\Delta S},$$

где ΔE – поверхностная энергия; ΔS – площадь поверхности.

Формула Лапласа:

$$P=\sigma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right).$$

Высота подъема жидкости в капиллярной трубке:

$$h=\frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r},$$

где r – радиус трубки; θ – краевой угол; ρ – плотность жидкости; g – ускорение свободного падения.

Уравнение неразрывности потока:

$$\mathrm{v}S=const\ .$$

Уравнение Бернулли:

$$P+\frac{\rho \mathrm{v}^2}{2}+\rho g h=const\ .$$

Формула Пуазейля:

$$V=\frac{\pi r^4 t\Delta P}{8\eta l}.$$

Формула Стокса:

$$F_c=6\pi\eta r\mathrm{v},$$

где r – радиус шарика; v – скорость шарика.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. В сосуде емкостью 10 л находится 360 г водяного пара при температуре 470 К. Вычислить давление пара на стенки сосуда. Какую часть объема V составляет объем V' молекул пара? Какую часть давления P составляет внутреннее давление P'?

Дано:	**СИ:**
$V = 10$ л	10^{-2} м^3
$m = 360$ г	0,36 кг
$T = 470$ К	
$M = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль	
$P - ?$	
$\dfrac{V'}{V} - ?$	
$\dfrac{P'}{P} - ?$	

Решение.

По уравнению Ван-дер-Ваальса:

$$\left(P + \frac{m^2 \cdot a}{M^2 \cdot V^2}\right) \cdot \left(V - \frac{m}{M} \cdot b\right) = \frac{m}{M} \cdot RT,$$

где $\dfrac{m}{M} = \dfrac{0{,}36}{18 \cdot 10^{-3}} = 0{,}02 \cdot 10^3$ моль; a и b – постоянные Ван-дер-Ваальса (для водяного пара $a = 55 \cdot 10^{-4}$ Н·м^4/моль^2 и $b = 0{,}3 \cdot 10^{-4}$ Н·м^3/моль^3).

Собственный объем V' молекул связан с поправкой b равенством

$$\frac{mb}{M} = 4V'.$$

Следовательно, $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{mb}{4MV}$;

выполним вычисления:

$$\frac{V'}{V} = \frac{0{,}02 \cdot 10^2 \cdot 0{,}3 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 0{,}01} = 0{,}015; \ \frac{V'}{V} = 1{,}5 \ \%.$$

Внутреннее давление определяется равенством:

$$P' = \frac{m^2}{M^2} \cdot \frac{a}{V^2},$$

$$P' = \left(0{,}02 \cdot 10^3\right)^2 \cdot \frac{55 \cdot 10^{-4}}{10^{-4}} = 2{,}2 \cdot 10^4 \text{ Па}.$$

Далее P находим из уравнения Ван-дер-Ваальса:

$$P = \frac{m}{M} \cdot \frac{RT}{\left(V - \dfrac{m}{M} b\right)} - \left(\frac{m}{M}\right)^2 \cdot \frac{a}{V^2};$$

$$P = 0{,}02 \cdot 10^3 \cdot \frac{8{,}31 \cdot 470}{\left(0{,}01 - 0{,}02 \cdot 10^3 \cdot 0{,}03 \cdot 10^{-3}\right)} - 2{,}2 \cdot 10^4 = 8{,}29 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Найдем отношение давлений:

$$\frac{P'}{P} = \frac{2{,}2 \cdot 10^4}{8{,}29 \cdot 10^6} = 0{,}003; \ \frac{P'}{P} = 0{,}3 \ \%.$$

Ответ: $P = 8{,}29 \cdot 10^6$ Па; $\dfrac{V'}{V} = 1{,}5$ %; $\dfrac{P'}{P} = 0{,}3$ %

Задача 2. Найти добавочное давление внутри мыльного пузыря диаметром 10 см. Какую работу нужно совершить, чтобы выдуть этот пузырь?

Дано:	**СИ:**
$d = 10$ см	0,1 м
$\sigma = 40$ мН/м	0,04 Н/м

Решение:

Пленка мыльного пузыря имеет две сферические поверхности – внешнюю и внутреннюю.

$P-?$ $A-?$	Обе поверхности оказывают давление на воздух, заключенный внутри пузыря. Так как толщина пленки чрезвычайно мала, то диаметры обеих поверхностей

практически одинаковы. Поэтому добавочное давление

$$P = 2\cdot\frac{2\sigma}{r},$$

где r – радиус пузыря. Так как $r=\frac{d}{2}$, то

$$P=\frac{8\sigma}{d}.$$

Следовательно, добавочное давление внутри пузыря равно:

$$P=\frac{8\cdot 40\cdot 10^{-3}}{0{,}1}=3{,}2\ \text{Па}.$$

Работа, которую нужно совершить, чтобы растягивая пленку, увеличить ее поверхность на ΔS, выражается формулой:

$$A=\sigma\cdot\Delta S \ \text{ или } \ A=\sigma\left(S-S_0\right).$$

В данном случае S – общая площадь двух сферических поверхностей пленки мыльного пузыря; S_0 – общая площадь двух поверхностей плоской пленки, затягивавшей отверстие трубки до выдувания пузыря. Пренебрегая этой величиной, получим:

$$A=\sigma\cdot S=2\pi d^2\sigma.$$

Сделав подстановку числовых значений величин, получим:

$$A=2\cdot 3{,}14\cdot 0{,}1^2\cdot 40\cdot 10^{-3}=2{,}5\cdot 10^{-3}\ \text{Дж}.$$

Ответ: $P=3{,}2$ Па; $A=2{,}5\cdot 10^{-3}$ Дж.

Задача 3. Глицерин поднялся в капиллярной трубке на высоту h = 25 мм. Определить коэффициент поверхностного натяжения глицерина, если диаметр канала трубки d = 0,8 мм, а плотность глицерина ρ = 1,26·10^3 кг/м^3.

Дано:	**СИ:**	**Решение:**
$h=25$ мм $d=0{,}8$ мм $\rho=1{,}26\cdot 10^3$ кг/м^3	25 10^{-3} м 0,8·10^{-3} м	Высота поднятия жидкости (рис. 17) в цилиндрическом капилляре радиуса r равна:
$\sigma-?$		$$h=\frac{2\sigma\cdot cos\theta}{\rho g r}.$$

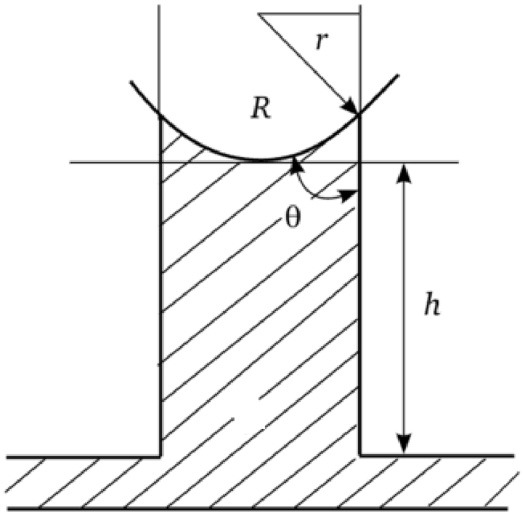


Рис. 17. Радиус капилляра и краевой угол связаны соотношением

$$R = \frac{r}{cos\,\theta},$$

где R – радиус мениска – искривленной поверхности жидкости.

Принимая $r \approx R$, т.е. $cos\,\theta = 1$, получим:

$$\sigma = \frac{h\rho g d}{4} = \frac{25\cdot 10^{-3}\cdot 1{,}26\cdot 10^{3}\cdot 9{,}8\cdot 0{,}8\cdot 10^{-3}}{4} = 62\cdot 10^{-3}\ \text{Н/м.}$$

Ответ: $\sigma = 62\cdot 10^{-3}$ Н/м.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Определить плотность разряженного водорода, если средняя длина свободного пробега молекул равна 1 см. (Ответ: 1,55 мг/м^3)
2. Средняя длина свободного пробега атомов гелия при нормальных условиях равна 180 нм. Определить коэффициент диффузии D гелия. (Ответ: 7,23·10^{-5} м^2/с)
3. Найти среднюю длину свободного пробега молекул азота при условии, что его динамическая вязкость η = 17 мкПа·с. (Ответ: 90 пм)
4. Цилиндр радиусом 10 см и длиной 30 см расположен внутри цилиндра радиусом 10,5 см так, что оси обоих цилиндров совпадают. Малый цилиндр неподвижен, большой вращается относительно геометрической оси с частотой 15 с$^{-1}$. Динамическая вязкость газа, в котором находятся цилиндры, равна 8,5 мкПа·с. Определить: 1) касательную силу, действующую на поверхность внутреннего цилиндра площадью 1 м^2; 2) вращающий момент, действующий на этот цилиндр. (Ответ: 16,8 Н; 3,17·10^{-4} Н·м)
5. Вычислить коэффициент теплопроводности λ гелия при нормальных условиях. (Ответ: 38,6 мВт/(м·К))
6. Найти зависимость теплопроводности λ от температуры T при следующих процессах: 1) изобарном; 2) изохорном. Изобразить эти зависимости на

графиках. (Ответ: 1) $\lambda \sim \sqrt{T}$; 2) $\lambda \sim \sqrt{T}$)

7. В сосуде вместимостью 0,3 л находится углекислый газ, содержащий количество вещества 1 моль при температуре 300 К. Определить давление газа 1) по уравнению Менделеева - Клапейрона; 2) по уравнению Ван-дер-Ваальса. (Ответ: 1) 8,31 МПа; 2) 5,67 МПа)
8. Масса 10 г гелия занимает объем 100 см^3 при давлении 100 МПа. Найти температуру газа, считая его: а) идеальным; б) реальным. (Ответ: 482 К; 204 К)
9. Количество 1 кмоль кислорода находится при температуре 27^{o}C и давлении 10 МПа. Найти объем газа, считая, что кислород при данных условиях ведет себя как реальный газ. (Ответ: 0,231 м^3)
10. Трубка имеет диаметр 0,2 см. На нижнем конце трубки повисла капля воды, имеющая в момент отрыва вид шарика. Найти диаметр этой капли. (Ответ: 4,4 мм)
11. На какую высоту поднимается бензол в капилляре, внутренний диаметр которого 1 мм? Смачивание считать полным. (Ответ: 13,9 мм)
12. Две капли ртути радиусом 1 мм каждая слились в одну большую каплю. Какая энергия выделится при этом слиянии? Считать процесс изотермическим. (Ответ: 2,6 мкДж)
13. Определить силу, прижимающую друг к другу две стеклянные пластинки размерами 10×10 см, расположенные параллельно друг другу, если расстояние между пластинками равно 22 мкм, а пространство между ними заполнено водой. Считать мениск вогнутым с диаметром, равным расстоянию между пластинками. (Ответ: 73 Н)
14. Латунный шарик диаметром 0,5 мм падает в глицерине. Определить скорость установившегося движения шарика. (Ответ: 6,71 мм/с)