М. Ю. Дёмина
Ю. Ю. Циовкин
Е. А. Яшкевич

ФИЗИКА
ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2022

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна»
Высшая школа технологии и энергетики

М. Ю. Дёмина
Ю. Ю. Циовкин
Е. А. Яшкевич

ФИЗИКА
ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

Учебно-методическое пособие

Утверждено Редакционно-издательским советом ВШТЭ СПбГУПТД

Санкт-Петербург
2022

УДК 53 (075)
ББК 22.3
Д 171

Рецензенты:
профессор кафедры физики ВШТЭ СПбГУПТД, доктор физико-математических наук
В. И. Лейман;
PhD (Center for Photochemical Sciences, BGSU, USA),
ст. преподаватель НОЦ БИСФ СПХФУ
М. И. Панов

Дёмина, М. Ю., Циовкин, Ю. Ю., Яшкевич, Е. А.
Д 171 Физика. Физические основы механики: Учебно-методическое пособие / М. Ю. Дёмина, Ю. Ю. Циовкин, Е. А. Яшкевич. — СПб.: ВШТЭ СПбГУПТД, 2022. — 65 с.

Учебно-методическое пособие соответствует программам и учебным планам дисциплины «Физика» для студентов, обучающихся по направлениям подготовки: 01.00.00 «Математика и механика», 13.00.00 «Электро- и теплоэнергетика», 15.00.00 «Машиностроение», 18.00.00 «Химические технологии», 20.00.00 «Техносферная безопасность и природообустройство» и 29.00.00 «Технологии легкой промышленности».

Учебно-методическое пособие содержит основной теоретический материал по основным разделам физических основ механики: кинематика, динамика материальной точки и твердого тела, механическая работа, законы сохранения. В каждом разделе приведены примеры решения задач, которые могут быть полезны в качестве дополнительного материала при проведении практических занятий по физике, а также для самостоятельной работы студентов. Учебно-методическое пособие предназначено для студентов всех специальностей и видов обучения, изучающих физику.

УДК 53 (075)
ББК 22.3

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. КИНЕМАТИКА

Основные формулы кинематики

Положение точки в системе координат определяется радиусом-вектором, проведенным из начала координат в рассматриваемую точку

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\,, \tag{1.1}$$

Где x, y, z – проекции $\vec{r}$ на координатные оси или координаты точки.

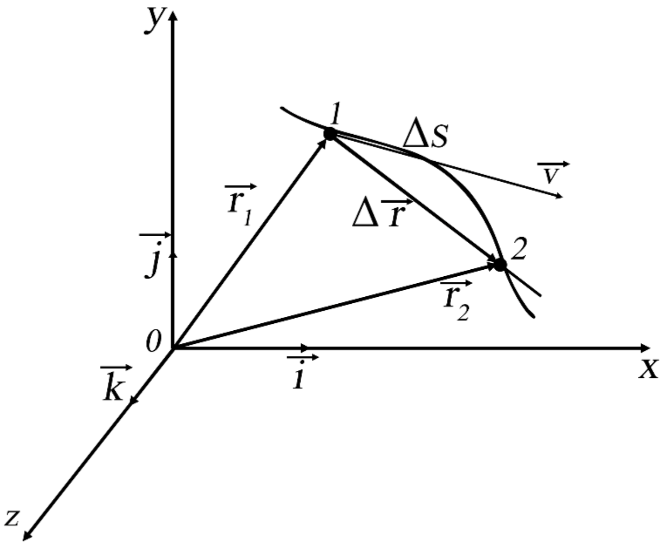


Рис. 1. Положение точки в пространстве

Модуль радиус-вектора

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,. \tag{1.1′}$$

Движение материальной точки можно полностью описать, задав ее положение в любой момент времени относительно выбранной системы отсчета, т.е. если известны $x = x(t),\ y = y(t), z = z(t)$ или

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \tag{1.2}$$

Уравнение (1.2) называется кинематическим законом движения материальной точки.

Пусть материальная точка за промежуток времени Δt переместилась по криволинейной траектории из точки 1 в точку 2 (рис. 1).

$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ – вектор перемещения материальной точки за время Δt.

Мгновенная скорость – предел отношения перемещения $\Delta\vec{r}$ к промежутку времени Δt, за который оно произошло, при условии, что Δt стремится к нулю:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}\,'. \tag{1.3}$$

Если ΔS – путь, пройденный точкой за время Δt, тогда модуль мгновенной скорости равен производной пути по времени

$$\text{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{dS}{dt}=S'. \tag{1.4}$$

Путь dS, пройденный телом за элементарно малое время dt:

$$dS=\text{v}(t)\,dt.$$

Путь, пройденный точкой за конечный промежуток времени от t_1 до t_2, находится интегрированием

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\text{v}(t)\,dt.$$

Ускорение материальной точки – это векторная величина, характеризующая быстроту изменения вектора скорости и равная производной вектора скорости по времени.

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\text{v}}}{\Delta t}=\frac{d\vec{\text{v}}}{dt}=\dot{\vec{\text{v}}}=\frac{d^2r}{dt^2}=\ddot{\vec{r}}. \tag{1.5}$$

Скорость $\vec{\text{v}}$ и ускорение $\vec{a}$ и их модули можно представить в виде

$$\vec{\text{v}}=\text{v}_x\vec{i}+\text{v}_y\vec{j}+\text{v}_z\vec{k},\ \text{v}=\sqrt{\text{v}_x^2+\text{v}_y^2+\text{v}_z^2} \tag{1.6}$$

и

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\ a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \tag{1.7}$$

При равномерном движении скорость тела постоянна:

$$\text{v}=\frac{S}{t}=const. \tag{1.8}$$

Путь, пройденный телом при равномерном движении, зависит от времени линейно:

$$S=\text{v}t. \tag{1.9}$$

Скорость движения при равноускоренном движении в любой момент времени будет определяться соотношением:

$$\text{v}=\text{v}_0\pm at, \tag{1.10}$$

где $\vec{\text{v}}_0$ – начальная скорость материальной точки, т.е. скорость в момент времени $t=0$. Знак «плюс» относится к равноускоренному движению, «минус» – к равнозамедленному.

Формула для расчета пройденного пути при равноускоренном движении

$$S(t)=\int_0^t(\text{v}_0\pm at)\,dt=\text{v}_0t\pm\frac{at^2}{2}. \tag{1.11}$$

Формула дает правильный результат для пройденного пути только в том случае, если за время t направление движения точки (знак скорости) не изменяется.

Если тело движется неравномерно, то величина, равная отношению пройденного пути ΔS к промежутку времени Δt, в течение которого был пройден путь, называется средней скоростью за этот промежуток времени.

$$\text{v}_{ср} = \frac{\Delta S}{\Delta t}. \tag{1.12}$$

Если скорость изменяется с течением времени произвольным образом, то величина, равная отношению изменения скорости Δv к промежутку времени Δt, в течение которого изменялась скорость, называется средним ускорением за этот промежуток времени

$$a_{ср} = \frac{\Delta \text{v}}{\Delta t}. \tag{1.13}$$

При движении материальной точки по плоской кривой ускорение разложим на две составляющие – нормальное ускорение $\vec{a}_n$ и тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau$ (рис. 2).

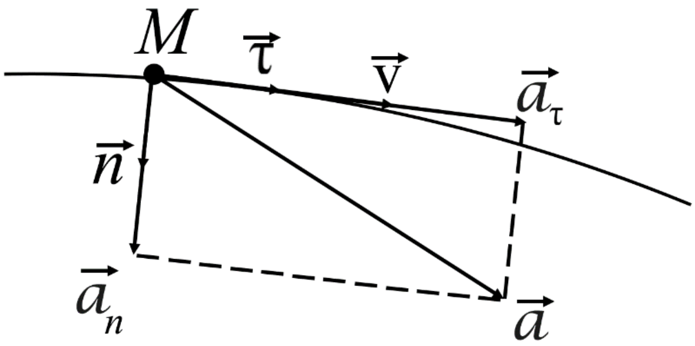


Рис. 2. Разложение полного ускорения на нормальное и тангенциальное ускорения

Ускорение точки равно

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \tag{1.14}$$

Тангенциальное ускорение характеризует быстроту изменения скорости по величине и равно первой производной модуля скорости по времени

$$a_\tau = \frac{d\text{v}}{dt}. \tag{1.15}$$

Нормальное (центростремительное) ускорение характеризует быстроту изменения скорости по направлению и направлено по радиусу к центру кривизны траектории. Численное значение нормального ускорения определяется формулой:

$$a_n = \frac{\text{v}^2}{R} = \omega^2 R = \text{v}\omega, \tag{1.16}$$

где R – радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке.

Модуль полного ускорения

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}\ . \tag{1.17}$$

Угловое перемещение $d\vec{\varphi}$ – вектор, модуль которого равен углу поворота, выраженному в радианах. Направлено угловое перемещение вдоль оси вращения и связано с направлением вращения правилом правого винта (буравчика) (рис. 3).

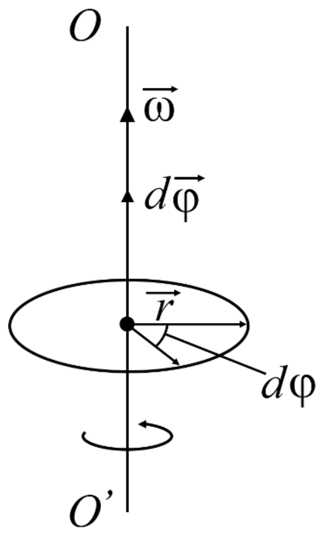


Рис. 3. Вращательное движение

Угловая скорость $\vec{\omega}$ – векторная физическая величина, характеризующая быстроту вращения и равная первой производной углового перемещения по времени:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{\varphi}'\,. \tag{1.18}$$

Направление угловой скорости совпадает с направлением вектора углового перемещения.

Угловое ускорение – векторная физическая величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости и равная первой производной угловой скорости по времени

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\omega}'\,. \tag{1.19}$$

При равномерном движении точки по окружности $\omega = const$. Тогда

$$\omega = 2\pi n = \frac{2\pi}{T}\,, \tag{1.20}$$

где n – число оборотов точки в единицу времени (частота вращения); Т – период обращения точки по окружности (время полного оборота).

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{n}. \qquad (1.21)$$

При равнопеременном вращательном движении справедливы соотношения, аналогичные формулам, описывающим равнопеременное прямолинейное движение

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t, \qquad (1.22)$$

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}. \qquad (1.23)$$

$$a_\tau = \frac{d\mathrm{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega R) = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon, \qquad (1.24)$$

$$a_n = \frac{\mathrm{v}^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R. \qquad (1.25)$$

Модуль ускорения точки равен

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{(\omega^2 R)^2 + (R\varepsilon)^2} = \sqrt{\omega^4 R^2 + \varepsilon^2 R^2} = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \qquad (1.26)$$

Примеры решения задач

Задача 1. Кинематическое уравнение движения материальной точки по прямой (ось x) имеет вид $x = x(t) = A + Bt + Ct^3$, где $A = 4$ м, $B = 2$ м/с, $C = -0{,}5$ м/с^2. Для момента времени $t_1 = 2$ с определить: 1) координату x_1 точки; 2) мгновенную скорость v_1; 3) мгновенное ускорение a_1; а также среднюю скорость и среднее ускорение за первые две секунды движения.

Дано:	**Решение:**
$x = x(t) = A + Bt + Ct^3$ $A = 4$ м $B = 2$ м/с $C = -0{,}5$ м/с^2 $t_1 = 2$ с	1) Координату точки, для которой известно кинематическое уравнение движения, найдем, подставив в уравнение движения вместо t заданное значение времени t_1 и значения констант $x_1 = A + Bt_1 + Ct_1^3 = 4 + 2\cdot 2 - 0{,}5\cdot 2^3 = 4$ м.
$x_1 = ?$	2) Мгновенную скорость в произвольный

$v_1 = ?$ $v_{ср} = ?$ $a_{ср} = ?$	момент времени найдем, продифференцировав координату x по времени: $v = \frac{dx}{dt} = \left(A + Bt + Ct^3\right)' = B + 3Ct^2$. Тогда в заданный момент времени t_1 мгновенная скорость $v_1 = B + 3Ct_1^2 = 2 - 3 \cdot 0{,}5 \cdot 2^2 = -4$ м/с. Знак минус

указывает на то, что в момент времени $t_1 = 2$ с точка движется в отрицательном направлении координатной оси.

3) Мгновенное ускорение в произвольный момент времени найдем, взяв вторую производную от координаты x по времени: $a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \left(A + Bt + Ct^3\right)'' = 6Ct$. Мгновенное ускорение в заданный момент времени t_1 равно $a_1 = 6Ct_1 = 6 \cdot (-0{,}5) \cdot 2 = -6$ м/с^2. Знак минус указывает на то, что направление вектора ускорения совпадает с отрицательным направлением координатной оси.

4) Средняя скорость за интервал времени $t_1 - t_0$ определяется выражением $v_{ср} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}$, где $t_0 = 0$, $x_0 = A + Bt_0 + Ct_0^3 = 4$ м. Подставим значения и вычислим $v_{ср} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} = \frac{4-4}{2} = 0$.

5) Среднее ускорение определяется как $a_{ср} = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0}$, где $v_0 = B + 3Ct_0^2 = 2$ м/с.

Вычислим $a_{ср} = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{-4-2}{2} = -3$ м/с^2.

Ответ: x_1 = 4 м; $v_1 = -4$ м/с; $v_{ср} = 0$; $a_{ср} = -3$ м/с^2.

Задача 2. Определить тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное ускорение a точки окружности диска для момента времени t= 10 с от начала движения, если радиус окружности R= 0,2 м, а угол между осью ОХ и радиус-вектором точки изменяется по закону $\varphi = 3 - t + 0{,}2t^3$.

Дано:	**Решение:**
t= 10 с R= 0,2 м $\varphi = 3 - t + 0{,}2t^3$	По формулам $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ и $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ находим угловую скорость и угловое ускорение точки
$a_\tau = ?$ $a_n = ?$ $a = ?$	$\omega = \varphi' = \left(3 - t + 0{,}2t^3\right)' = -1 + 0{,}2 \cdot 3t^2 = 0{,}6t^2 - 1$; $\varepsilon = \omega' = \left(0{,}6t^2 - 1\right)' = 0{,}6 \cdot 2t = 1{,}2t$.

1) Из формулы связи углового и тангенциального ускорения найдем $a_\tau = R\varepsilon = R\cdot 1{,}2t = 0{,}2\cdot 1{,}2\cdot 10 = 2{,}4$ м/с^2.

2) Нормальное ускорение определим из формулы $a_n = \dfrac{\mathrm{v}^2}{R}$, где скорость $\mathrm{v} = R\omega = R\left(0{,}6t^2 - 1\right) = 0{,}2\cdot\left(0{,}6\cdot 10^2 - 1\right) = 11{,}8$ м/с; $a_n = \dfrac{11{,}8^2}{0{,}2} \approx 696{,}2$ м/с^2.

3) Далее находим полное ускорение

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{2{,}4^2 + 696{,}2^2} = 696{,}204 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a_\tau = 2{,}4$ м/с^2; $a_n \approx 696{,}2$ м/с^2; $a = 696{,}204$ м/с^2.

Задача 3. Диск радиусом 10 см, находившийся в состоянии покоя, начал вращаться с постоянным угловым ускорением 0,5 рад/с^2. Найти тангенциальное, нормальное и полное ускорения точек на окружности диска в конце второй секунды после начала вращения.

Дано:
R= 0,1 м
ε= 0,5 рад/с^2
t= 2 с

a_τ = ?
a_n = ?
a = ?

Решение:

Тангенциальное ускорение определим по формуле $a_\tau = R\varepsilon = 0{,}1\cdot 0{,}5 = 0{,}05$ м/с^2.

Найдем угловую скорость через две секунды от начала движения, учитывая, что угловое ускорение постоянно, а начальная скорость вращения равна нулю, $\omega = \varepsilon t = 0{,}5\cdot 2 = 1$ рад/с.

Далее определяем нормальное ускорение $a_n = \omega^2 R = 1\cdot 0{,}1 = 0{,}1$ м/с^2.

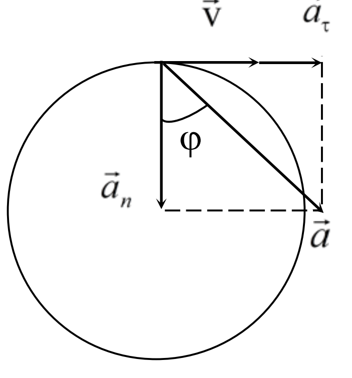
Полное ускорение находим, сложив геометрически векторы тангенциального и нормального ускорений $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{0{,}05^2 + 0{,}1^2} = 0{,}11$ м/с^2.

Ответ: $a_\tau = 0{,}05$ м/с^2; $a_n \approx 0{,}1$ м/с^2; $a = 0{,}11$ м/с^2.

Задача 4. По дуге окружности радиусом 10 м движется точка. В некоторый момент времени нормальное ускорение точки 4,9 м/с^2; в этот момент векторы полного и нормального ускорений образуют угол φ = 60º. Найти скорость и тангенциальное ускорение точки.

Дано:
R= 10 м
a_n= 4,9 м/с^2
φ = 60º

v = ?
a_τ = ?



Решение:

Из формулы для нормального ускорения $a_n = \dfrac{\mathrm{v}^2}{R}$ выразим и определим скорость $\mathrm{v} = \sqrt{a_n R} = \sqrt{4{,}9 \cdot 10} = 7$ м/с.

Если известен угол между векторами полного и нормального ускорений (рис. 4), то можно записать для нормального и тангенциального ускорений

$$tg\varphi = \frac{a_\tau}{a_n},$$

отсюда

$$a_\tau = a_n \cdot tg\varphi = 4{,}9 \cdot tg 60^0 = 4{,}9 \cdot 1{,}73 \approx 8{,}5 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $\mathrm{v} = 7$ м/с; $a_\tau = 8{,}5$ м/с^2.

Задача 5. По заданным уравнениям движения точки: $\begin{cases} x = \sqrt{3}\, cos\, t - sin\, t \\ y = cos\, t - \sqrt{3}\, sin\, t \end{cases}$; (где x, y – в метрах, t – в секундах) найти ее тангенциальное и нормальное ускорение, а также радиус кривизны траектории для заданного момента времени $t_1 = 0{,}5\pi$ с.

Дано:

$\begin{cases} x = \sqrt{3}\, cos\, t - sin\, t \\ y = cos\, t - \sqrt{3}\, sin\, t \end{cases}$

$t_1 = 0{,}5\pi$ с

$a_\tau = ?$

$a_n = ?$

$R_1 = ?$

Решение:

Заданные уравнения движения точки позволяют найти проекции скорости точки

$$\begin{cases} \mathrm{v}_x = x' = -\sqrt{3}\, sin\, t - cos\, t \\ \mathrm{v}_y = y' = -sin\, t - \sqrt{3}\, cos\, t \end{cases}.$$

Модуль скорости

$$\mathrm{v} = \sqrt{\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2}$$

$$\mathrm{v} = \sqrt{\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2} = \sqrt{3 sin^2 t + 2\sqrt{3}\, sin\, t\, cos\, t + cos^2 t + sin^2 t + 2\sqrt{3}\, sin\, t\, cos\, t + 3 cos^2 t} =$$

$$= \sqrt{4 + 4\sqrt{3}\, sin\, t\, cos\, t} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}\, sin\, 2t}\,.$$

В момент времени $t_1 = 0{,}5\pi$ с $\mathrm{v}_1 = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}\, sin(2 \cdot 0{,}5 \cdot \pi)} = 2$ м/с.

Проекции ускорения точки:

$$\begin{cases} a_x = x'' = \mathrm{v}_x' = -\sqrt{3}\, cos\, t + sin\, t \\ a_y = y'' = \mathrm{v}_y' = -cos\, t + \sqrt{3}\, sin\, t \end{cases}.$$

Модуль полного ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{4 - 4\sqrt{3}\, sin\, t\, cos\, t} = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}\, sin\, 2t}\,.$$

В момент времени $t_1 = 0{,}5\pi$ с $a = 2$ м/с^2.

Зная выражение скорости, как функции времени, определим модуль тангенциального ускорения точки

$$a_\tau = \frac{d\text{v}}{dt} = \frac{d\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}\,sin\,2t}\right)}{dt} = \frac{2\sqrt{3}\,cos\,2t}{\sqrt{4+2\sqrt{3}\,sin\,2t}}.$$

В момент времени $t_1 = 0{,}5\pi$ с $a_{\tau 1} = \dfrac{2\sqrt{3}\,cos\,2t}{\sqrt{4+2\sqrt{3}\,sin\,2t}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ м/с^2.

По полному ускорению и тангенциальному ускорению найдем модуль нормального ускорения точки для $t_1 = 0{,}5\pi$ с

$$a_{n1} = \sqrt{a_1^2 - a_{\tau 1}^2} = \sqrt{2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = 1\text{м/с}^2.$$

Нормальное ускорение a_{n1} и радиус кривизны траектории R связаны зависимостью $a_n = \dfrac{\text{v}^2}{R}$, из которой следует, что при $t_1 = 0{,}5\pi$ с $R_1 = \dfrac{\text{v}_1^2}{a_{n1}} = 4$ м.

Ответ: $a_\tau = \sqrt{3}$ м/с^2; $a_n = 1$ м/с^2; $R_1 = 4$ м.

Задача 6. Частица движется в плоскости в соответствии с уравнением $\vec{r}(t) = At^3\vec{i} + Bt^2\vec{j}$ ($A = 1$ м/с^3, $B = 2$ м/с^2). Определите уравнение траектории, по которой движется частица. Запишите уравнения для вектора скорости $\vec{\text{v}}(t)$ и ускорения $\vec{a}(t)$. Для момента времени $t = 1$ с, прошедшего после начала движения, найдите: а) положение частицы на траектории; б) ее скорость; в) перемещение; г) полное ускорение; д) нормальное и тангенциальное ускорения и радиус кривизны траектории.

Дано:
$\vec{r}(t) = At^3\vec{i} + Bt^2\vec{j}$
$A = 1$ м/с^3
$B = 2$ м/с^2
$t = 1$ с

$y(x) = ?$
$\text{v} = ?$
$\Delta r = ?$
$a = ?$
$a_n = ?$
$a_\tau = ?$
$R = ?$

Решение:

Для определения вида траектории, по которой движется частица, запишем векторное уравнение движения $\vec{r}(t) = At^3\vec{i} + Bt^2\vec{j}$ в координатной форме

$$\begin{cases} r_x(t) = x(t) = At^3 \\ r_y(t) = y(t) = Bt^2 \end{cases},$$

выразим из первого уравнения время $t = \sqrt[3]{x/A}$, подставим во второе уравнение и получим уравнение траектории движения частицы

$$y(x) = B\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{3}} = B\sqrt[3]{\left(\frac{x}{A}\right)^2}.$$

В начальный момент времени $t = 0$ положение частицы соответствует координатам $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$, в момент времени $t = 1$ с координаты будут равны

$$\begin{cases} x = At^3 = 1\cdot 1^3 = 1\,\text{м} \\ y = Bt^2 = 2\cdot 1^2 = 2\,\text{м} \end{cases}.$$

Изменение координат частицы за промежуток времени $\Delta t = t - t_0 = 1$ с равно $\begin{cases} \Delta x = x - x_0 = 1\,\text{м} \\ \Delta y = y - y_0 = 2\,\text{м} \end{cases}$, тогда модуль вектора перемещения частицы

$$\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \approx 2{,}2 \text{ м}.$$

Уравнение вектора скорости определим дифференцированием по времени заданного уравнения движения

$$\vec{\text{v}}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(At^3\vec{i} + Bt^2\vec{j}\right)' = 3At^2\vec{i} + 2Bt\vec{j}.$$

Вектор ускорения определим производной вектора скорости по времени

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\text{v}}}{dt} = \left(3At^2\vec{i} + 2Bt\vec{j}\right)' = 6At\vec{i} + 2B\vec{j}.$$

Составляющие (проекции на координатные оси) и модуль вектора скорости соответственно равны

$$\begin{cases} \text{v}_x = 3At^2 \\ \text{v}_y = 2Bt \end{cases}, \; \text{v} = \sqrt{\text{v}_x^2 + \text{v}_y^2} = \sqrt{\left(3At^2\right)^2 + (2Bt)^2}.$$

Для момента времени $t = 1$ с

$$\begin{cases} \text{v}_x = 3At^2 = 3\,\text{м/с} \\ \text{v}_y = 2Bt = 4\,\text{м/с} \end{cases}; \; \text{v} = \sqrt{\left(3At^2\right)^2 + (2Bt)^2} = \sqrt{\left(3\cdot 1\cdot 1^2\right)^2 + (2\cdot 2\cdot 1)^2} = 5\,\text{м/с}.$$

По зависимости ускорения от времени определим модуль вектора полного ускорения $\begin{cases} a_x(t) = 6At = 6\cdot 1\cdot 1 = 6\,\text{м/с}^2 \\ a_y(t) = 2B = 2\cdot 1 = 2\,\text{м/с}^2 \end{cases}$,

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(6Bt)^2 + (2B)^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} \approx 7{,}2\,\text{м/с}^2.$$

Тангенциальное ускорение

$$a_\tau(t) = \frac{d\text{v}}{dt} = \left(\sqrt{\left(3At^2\right)^2 + (2Bt)^2}\right)' = \frac{18A^2t^3 + 4B^2t}{\sqrt{\left(3At^2\right)^2 + (2Bt)^2}}.$$

В момент времени $t = 1$ с

$$a_\tau = \frac{18 + 4\cdot 4}{\sqrt{9 + 16}} = 6{,}8\,\text{м/с}^2.$$

Нормальное ускорение $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{7{,}2^2 - 6{,}8^2} = 2{,}4\,\text{м/с}^2$.

Радиус кривизны траектории $R = \dfrac{\text{v}^2}{a_n} = \dfrac{5^2}{2{,}4} = 8{,}9$ м.

Ответ: $a_\tau = 6{,}8$ м/с^2; $a_n = 2{,}4$ м/с^2; $a = 7{,}2$ м/с^2; $v = 5$ м/с; $R = 8{,}9$ м.

Задача 7. Маховик, вращавшийся с постоянной частотой n_0 = 10 с$^{-1}$, при торможении начал вращаться равнозамедленно. Когда торможение прекратилось, вращение маховика снова стало равномерным, но уже с частотой n = 6 с$^{-1}$. Определить угловое ускорение маховика и продолжительность торможения, если за время равнозамедленного движения маховик сделал N = 50 оборотов.

Дано:	Решение:
n_0 = 10 с$^{-1}$ n = 6 с$^{-1}$ N = 50	Угловое ускорение маховика связано с начальной ω_0 и конечной ω угловыми скоростями соотношением $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon\varphi$, откуда $\varepsilon = \dfrac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\varphi}$. Но так как $\varphi = 2\pi N$, $\omega = 2\pi n$ то $\varepsilon = \dfrac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\varphi} = \dfrac{\pi\left(n^2 - n_0^2\right)}{N}$.
ε = ? t=?	

Подставив числовые значения, получим

$$\varepsilon = \frac{\pi\left(n^2 - n_0^2\right)}{N} = \frac{3{,}14\left(6^2 - 10^2\right)}{50} = -4{,}02 \text{ рад}/\text{с}^2 .$$

Знак минус указывает на то, что маховик вращался замедленно. Определим продолжительность торможения t, используя формулу, связывающую угол поворота φ со средней скоростью вращения и временем: $\varphi = \omega_{ср} t$. По условию задачи угловая скорость линейно зависит от времени, поэтому можно написать $\omega_{ср} = \dfrac{\omega_0 + \omega}{2}$, тогда

$$\varphi = \frac{(\omega_0 + \omega)t}{2} = \pi\left(n_0 + n\right)t, \text{ откуда } t = \frac{\varphi}{\pi\left(n_0 + n\right)} = \frac{2N}{n_0 + n}.$$

Произведем вычисления $t = \dfrac{2N}{n_0 + n} = \dfrac{2 \cdot 50}{10 + 6} = 6{,}25$ с.

Ответ: $\varepsilon = -4{,}02$ рад/с^2; $t = 6{,}25$ с.

2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Законы Ньютона

Первый закон Ньютона (закон инерции)

Существует система отсчета, относительно которой тело, не подверженное действию других тел, сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения. Свойство тел сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения называется инерцией. Системы отсчета, в которых выполняется закон инерции, называются инерциальными (ИСО).

Второй закон Ньютона

Ускорение тела прямо пропорционально действующей на него силе и обратно пропорционально массе тела:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \tag{2.1}$$

Если на тело действует не одна, а несколько сил $\vec{F}_i$, то под величиной $\vec{F}$ понимается равнодействующая, равная векторной сумме этих сил:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i. \tag{2.2}$$

Импульс материальной точки $\vec{p}$ – векторная величина, равная произведению массы материальной точки на ее скорость $\vec{\text{v}}$:

$$\vec{p} = m\vec{\text{v}}. \tag{2.3}$$

Второй закон Ньютона можно сформулировать так: изменение импульса материальной точки в единицу времени равно векторной сумме всех сил, действующих на эту точку:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i. \tag{2.4}$$

Величина, равная произведению силы на время действия этой силы $\vec{F}\Delta t$, называется импульсом силы. Таким образом, импульс силы равен изменению импульса тела.

$$\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p}. \tag{2.5}$$

Третий закон Ньютона

Силы, с которыми действуют друг на друга взаимодействующие тела, равны по величине, противоположны по направлению и направлены вдоль одной прямой (в частности, соединяющей точки их приложения).

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \tag{2.6}$$

Виды взаимодействий

1. Гравитационное взаимодействие. Закон всемирного тяготения: две материальные точки притягиваются с силой, прямо пропорциональной произведению их масс m_1 и m_2 и обратно пропорциональной квадрату расстояния r между ними:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{2.7}$$

где $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\dfrac{\text{м}^3}{\text{кг}\cdot\text{с}^2}$ – гравитационная постоянная (постоянная всемирного тяготения).

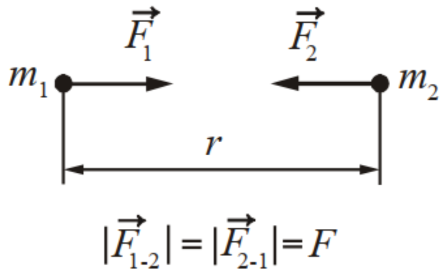


Рис. 4.Сила гравитационного взаимодействия

Если одно из взаимодействующих тел – Земля, а тело массой m находится на высоте h от поверхности Земли, то закон всемирного тяготения записывается в виде

$$F = G\frac{Mm}{(R+h)^2},$$

где M – масса Земли; R – средний радиус Земли.

На поверхности Земли (или вблизи поверхности) $h \approx 0$, в этом случае

$$F = G\frac{Mm}{R^2}.$$

Введем обозначение

$$g = G\frac{M}{R^2},$$

где $g = 9{,}81$ м/с^2 – ускорение свободного падения.

Сила тяжести

$$F = mg.$$

2. Сила упругости возникает при деформации тел (удлинение или сжатие). Закон Гука: для малых деформаций упругая сила прямо пропорциональна деформации и направлена в противоположную сторону:

$$F = -kx, \tag{2.8}$$

где k – жесткость тела, x – абсолютная деформация.

3. Выталкивающая сила. Закон Архимеда: на всякое тело, погруженное в жидкость или газ, действует выталкивающая сила, равная весу жидкости (газа), вытесненной телом:

$$F_A = \rho_{ж} g V = m_{ж} g, \qquad (2.9)$$

где $\rho_{ж}$ – плотность жидкости (газа), V – объем, вытесненной телом жидкости (объем погруженной части тела).

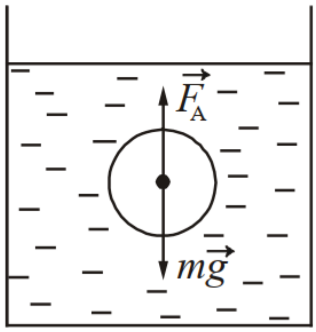


Рис. 5. Силы, действующие на тело, погружённое в жидкость (газ)

4. Сила трения скольжения, возникающая при скольжении одного тела по поверхности другого тела:

$$F_{тр} = \mu N, \qquad (2.10)$$

где μ – коэффициент трения скольжения, N – сила нормальной реакции опоры (рис. 6).

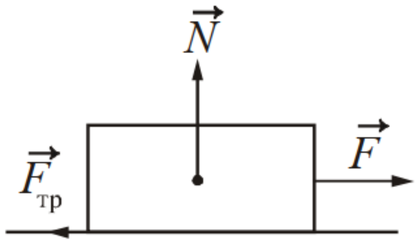


Рис. 6. Силы, действующие на тело, скользящее по горизонтальной поверхности

5. Сила вязкого трения действует на тело, движущееся в вязкой (жидкой или газообразной) среде, и тормозящая движение тела:

$$F_{сопр} = -r\text{v}, \qquad (2.11)$$

где r – коэффициент сопротивления, v – скорость движения тела (рис. 7).

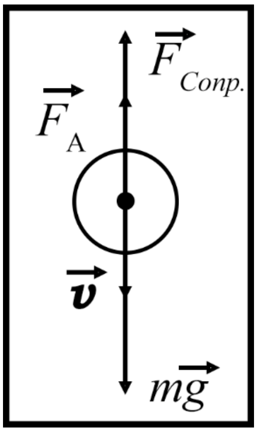


Рис. 7. Силы, действующие на тело, падающее в вязкой среде

Закон изменения и сохранения импульса

Совокупность материальных точек (тел), выделенных для рассмотрения, называется механической системой.

Внутренние силы – это силы взаимодействия между материальными точками самой системы.

Внешние силы – это силы, с которыми внешние тела действуют на точки системы.

Система называется замкнутой, если на нее не действуют внешние силы.

Импульсом системы N материальных точек называется векторная сумма импульсов отдельных материальных точек, из которых эта система состоит, т.е.

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + ... + m_N \vec{v}_N . \quad (2.12)$$

Закон изменения импульса системы материальных точек

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{iвнеш} , \quad (2.13)$$

где $\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$ – импульс системы материальных точек, $\vec{F}_{iвнеш}$ – внешняя сила, действующая на i-ю точку системы.

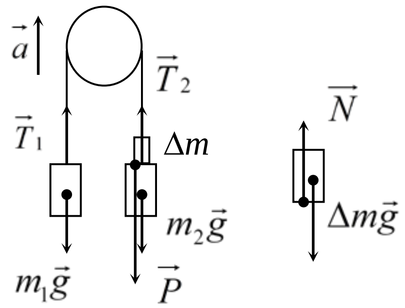
Закон сохранения импульса системы материальных точек: если сумма всех внешних сил, действующих на систему материальных точек, равна нулю, то ее полный импульс не изменяется (сохраняется):

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \text{ и, следовательно, } \vec{P} = const . \quad (2.14)$$

Примеры решения задач

Задача 1. На концах нити, переброшенной через неподвижный блок, подвешены два тела массой по 240 г. Какой массы добавочный груз был положен на одно из тел, если каждое из них через 2 с прошло путь 1,6 м?

Дано:	**СИ**
$m_1 = m_2 = 240$ г	0,24 кг
$t = 2$ с	
S = 1,6 м	
Δm = ?	



Решение:

На первое тело действуют силы: $m_1\vec{g}$ – тяжести и $\vec{T}_1$– сила натяжения нити. На второе тело действуют силы: $m_2\vec{g}$ – тяжести, $\vec{P}$ – вес добавочного груза и $\vec{T}_2$ – сила натяжения нити. На добавочный груз действуют силы: $\Delta m\vec{g}$ – тяжести и $\vec{N}$ – реакция опоры со стороны второго груза.

Силы натяжения нити со стороны первого тела и второго тела с добавочным грузом одинаковы и ускорения тел одинаковы (считаем нить невесомой и нерастяжимой):

$$T_1 = T_2 = T,$$

$$a_1 = a_2 = a_3 = a.$$

Применим II *закон Ньютона*:

для первого тела: $m_1\vec{g} + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}_1$ => $m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}$

для второго тела: $m_2\vec{g} + \vec{P} + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}_2$ => $m\vec{g} + \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$

для добавочного груза: $\Delta m\vec{g} + \vec{N} = \Delta m\vec{a}_3$ => $\Delta m\vec{g} + \vec{N} = \Delta m\vec{a}$

Спроецируем векторы сил на ось ОУ, направленную для первого тела по нити вверх, для второго тела и добавочного груза вниз:

первое тело: $$T - mg = ma \qquad (1)$$

второе тело: $$mg + P - T = ma \qquad (2)$$

добавочный груз: $$\Delta mg - N = \Delta ma \qquad (3)$$

Применим III закон Ньютона: $\vec{N} = -\vec{P}$,

т.е. сила реакции опоры со стороны второго тела на дополнительный груз направлена против веса дополнительного груза, а их проекции на ось OY равны друг другу:

$$N = P. \qquad (4)$$

Сложим уравнения (1) и (2) и учтём (4):

$$N = P = 2ma.$$

Подставим в (3):

$$\Delta mg - 2ma = \Delta ma\,,$$
$$\Delta m\left(g - a\right) = 2ma\,.$$

Выразим массу дополнительного груза:

$$\Delta m = \frac{2ma}{g - a}. \qquad (5)$$

Из уравнений кинематики найдём ускорение. Перемещение при равнопеременном движении с начальной скоростью v_0 определяется по формуле:

$$S = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Выразим ускорение, учитывая, что $v_0 = 0$:

$$a = \frac{2S}{t^2}.$$

Подставим полученное выражение для ускорения в формулу (5), тогда расчетная формула для массы дополнительного груза:

$$\Delta m = \frac{4mS}{gt^2 - 2S}.$$

Подставим численные значения

$$\Delta m = \frac{4 \cdot 0{,}24 \cdot 1{,}6}{9{,}81 \cdot 2^2 - 2 \cdot 1{,}6} \approx 0{,}04262 \text{ кг} = 42{,}62 \text{ г}.$$

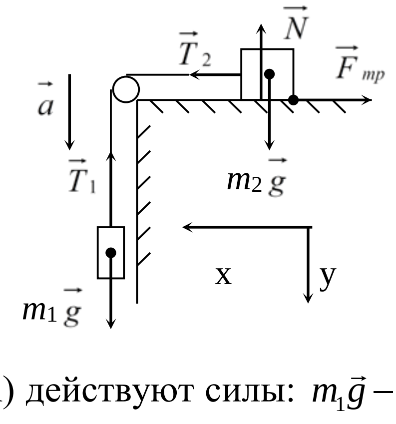
Ответ: $\Delta m =$ 43 г.

Задача 2. Блок укреплен на конце стола. Гири А и В равной массы $m = 1$ кг соединены нитью (невесомой и нерастяжимой), перекинутой через блок. Коэффициент трения гири В о стол $\mu = 0{,}1$. Найти ускорение *a*, с которым движутся гири, натяжение нити *T*. В начальный момент времени гиря А двигалась вниз. Трением в блоке и его массой пренебречь.

Дано:
$m_1 = m_2 = m = 1$ кг
$\mu = 0{,}1$

---

a = ?
T = ?



Решение:

1. На первое тело (гиря А) действуют силы: $m_1\vec{g}$ – тяжести и $\vec{T}_1$ – сила натяжения нити. На второе тело (гиря В) действуют силы: $m_2\vec{g}$ – тяжести, $\vec{N}$ – реакция опоры со стороны стола, $\vec{F}_{тр}$ – сила трения гири о стол и $\vec{T}_2$ – сила натяжения нити.

Применим II *закон Ньютона* для первого тела:

$$m_1\vec{g} + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}_1,$$

и для второго тела:

$$m_2\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}_2 + \vec{F}_{тр} = m_2\vec{a}_2.$$

Силы натяжения нити со стороны первого и второго тел одинаковы и ускорения тел одинаковы (т.к. нить невесома и нерастяжима):

$$T_1 = T_2 = T,$$

$$a_1 = a_2 = a.$$

Спроецируем векторы сил на вертикальную ось ОУ, для первого тела ось направим вниз, для второго вверх:

первое тело:

$$m_1 g - T = m_1 a, \qquad (1)$$

второе тело:

$$N - m_2 g = 0. \qquad (2)$$

Спроецируем векторы сил на ось ОХ:

второе тело:

$$T - F_{тр} = m_2 a. \qquad (3)$$

По определению *сила трения*:

$$F_{тр} = \mu N. \qquad (4)$$

Выразим из формулы (2) реакцию опоры N:

$$N = m_2 g,$$

подставим в выражение силы трения (4):

$$F_{тр} = \mu m_2 g.$$

Подставим выражение для силы трения $F_{тр}$ в формулу (3):

$$T - \mu m_2 g = m_2 a,$$

и выразим силу натяжения:

$$T = m_2 a + \mu m_2 g = m_2\left(a + \mu g\right). \qquad (5)$$

Выразим силу натяжения из формулы (1):

$$T = m_1\left(g - a\right). \qquad (6)$$

Учитывая, что массы гирь одинаковы, приравниваем правые части уравнений (5) и (6):

$$m\left(a + \mu g\right) = m\left(g - a\right) =>$$

$$a + \mu g = g - a =>$$

$$2a = g\left(1 - \mu\right).$$

Следовательно, расчетная формула для ускорения:

$$a = \frac{g\left(1 - \mu\right)}{2}.$$

Произведем вычисления

$$a = \frac{9{,}81 \cdot \left(1 - 0{,}1\right)}{2} \approx 4{,}41 \text{ м/с}^2.$$

2. Силу натяжения выразим из формулы (6):

$$T = m\left(g - \frac{g(1-\mu)}{2}\right) = \frac{mg}{2}(1+\mu).$$

Подставим числовые значения:

$$T = \frac{1 \cdot 9{,}81}{2}(1+0{,}1) \approx 5{,}4 \text{ Н}.$$

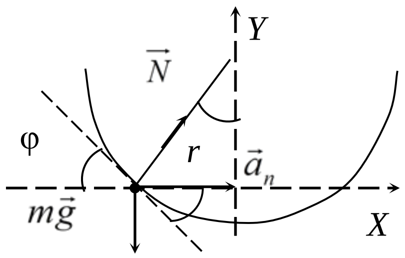
Приложение 1. Если нить невесома, на элемент нити длиной Δl и массой $\Delta m = 0$ действуют две силы $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$. По II закону Ньютона $\Delta ma = T_1 - T_2$ или $0 \cdot a = T_1 - T_2$ => $T_1 = T_2$, т. е. силы натяжения равны.

Приложение 2. Если нить нерастяжима, тогда изменение натяжения нити равно силе упругости $\Delta T = F_{упр} = kx = 0$, т.е. на тела не влияет, следовательно, ускорения тел одинаковы $a_1 = a_2$.

Ответ: a = 4, 41 м/с^2; T = 5,4 Н.

Задача 3. Сосуд с жидкостью вращается с частотой n = 2 с$^{-1}$ вокруг вертикальной оси. Поверхность жидкости имеет вид воронки. Чему равен угол φ наклона поверхности жидкости в точках, лежащих на расстоянии r = 5 см от оси? *Указание*: при равновесии жидкости равнодействующая сил, действующих на частицу, находящуюся на поверхности жидкости, со стороны остальных молекул жидкости направлена по нормали к поверхности.

Дано:	**СИ:**
n = 2 с$^{-1}$	
r = 5 см	0,05 м
φ = ?	



Решение:

Рассмотрим частицу на поверхности воды, расположенную на расстоянии r от оси вращения. На частицу действуют силы: $m\vec{g}$ – тяжести и $\vec{N}$ – равнодействующая со стороны молекул жидкости. Применим II закон Ньютона:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}_n .$$

Запишем векторное уравнение в проекциях на оси координат:

OX: $$N \sin\varphi = ma_n = m\omega^2 r \qquad (1)$$

OУ: $$N \cos\varphi - mg = 0, \qquad (2)$$

где учли, что нормальное (центростремительное) ускорение равно $a_n = \omega^2 r$ и направлено к центру окружности вращения, т.е. вдоль оси *OX*.

Угловая скорость вращения ω связана с частотой вращения n следующим соотношением:

$$\omega = 2\pi n . \qquad (3)$$

Подставим выражение для угловой скорости в формулу (1):

$$N\,sin\varphi = 4\pi^2 mn^2 r\,. \qquad (4)$$

Запишем формулу (2) в следующем виде:

$$N\,cos\varphi = mg\,. \qquad (5)$$

Разделим выражение (4) на (5), тогда:

$$tg\varphi = \frac{4\pi^2 n^2 r}{g}.$$

Откуда угол наклона поверхности:

$$\varphi = arctg\frac{4\pi^2 n^2 r}{g}.$$

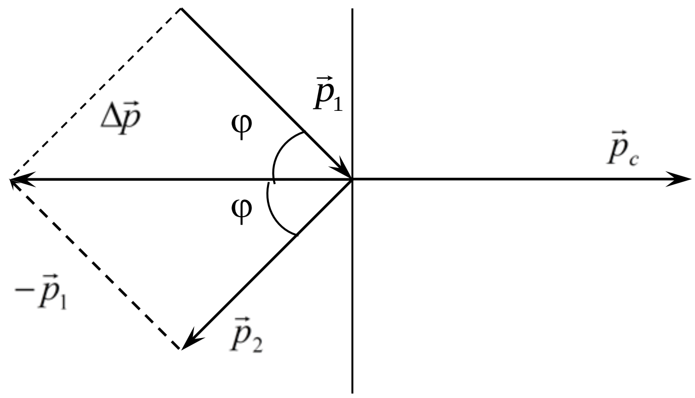
Подставим численные значения:

$$\varphi = arctg\frac{4\cdot 3{,}14^2\cdot 2^2\cdot 0{,}05}{9{,}81} \approx 38{,}8^0 \approx 38^0 50'.$$

Ответ: $\varphi = 38^0 50'$.

Задача 4. Мяч массой 250 г со скоростью 50 м/с ударяется о вертикальную стенку и упруго отскакивает. Стенка получает импульс, равный 2,2 кг·м/с. Определить угол и силу удара при продолжительности удара 0,02 с.

Дано:	**СИ:**
$m = 250$ г	0,255 кг
$\text{v} = 50$ м/с	
$p_c = 2{,}2$ кг·м/с	
$t = 0{,}02$ с	
$\varphi = ?$	
$F = ?$	



Решение:

1. Из закона сохранения импульса (рисунок векторов импульсов):

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}_c\,.$$

Откуда импульс, полученный стенкой:

$$\vec{p}_c = \vec{p}_1 - \vec{p}_2 = -\Delta\vec{p} = m\left(\vec{\text{v}}_1 - \vec{\text{v}}_2\right) = -m\Delta\vec{\text{v}}\,.$$

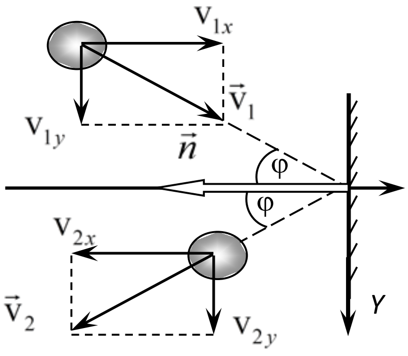
В проекции на ось *OX*:

$$p_c = -\Delta p = -m\Delta\text{v}\,. \qquad (1)$$

Найдём изменение скорости мяча:

$$\Delta\vec{\text{v}} = \vec{\text{v}}_2 - \vec{\text{v}}_1\,.$$

При абсолютно упругом ударе угол падения равен углу отражения, поэтому проекция скорости на ось *OY* не меняется, а проекция на *OX* изменяет знак после удара.



Проекция на ось *OX*:

$$\Delta v = \Delta v_x = -v_{2x} - v_{1x} = -v_2 \cos\varphi - v_1 \cos\varphi = -2v\cos\varphi,$$

где учли, что $v_1 = v_2 = v$.

Тогда изменение импульса стенки с учётом (1):

$$p_c = 2mv\cos\varphi.$$

Запишем расчетную формулу для угла:

$$\varphi = \arccos\frac{p_c}{2mv}.$$

Определим численное значение угла:

$$\varphi = \arccos\frac{2,2}{2\cdot 0,25\cdot 50} \approx 85^0.$$

2. Запишем II *закон Ньютона* в скалярном виде через импульс силы и изменение импульса тела:

$$F\Delta t = \Delta p = m\Delta v,$$

откуда сила удара:

$$F = \frac{\Delta p}{t} = \frac{m\Delta v}{t}.$$

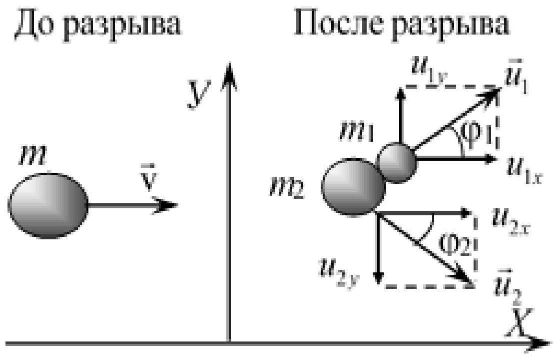
Тогда, с учётом формулы (1) сила удара:

$$F = \frac{p_c}{\Delta t} = \frac{2,2}{0,02} = 110 \text{ Н}.$$

Ответ: $\varphi = 85^0$, $F =$ 110 Н.

Задача 5. Снаряд массой m = 10 кг обладал скоростью v = 200 м/с в верхней точке траектории. В этой точке он разорвался на две части. Меньшая часть массой m_1 = 3 кг получила скорость u_1 = 400 м/с. С какой скоростью u_2 и под каким углом φ_2 к горизонту полетит большая часть снаряда, если меньшая полетела вперёд под углом φ_1 = 60º к горизонту.

Дано:	**СИ:**
$m = 10$ кг	
$\text{v} = 200$ м/с	
$m_1 = 3$ кг	
$u_1 = 400$ м/с	
$\varphi_1 = 60^o$	
$u_2 = ?$	
$\varphi_2 = ?$	



Решение:

Применим закон сохранения импульса:

$$\sum \vec{p}_i = const$$

или

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2. \qquad (1)$$

Импульс снаряда до разрыва равен:

$$\vec{p} = m\vec{\text{v}}.$$

После разрыва первый осколок имеет импульс:

$$\vec{p}_1 = m_1\vec{u}_1,$$

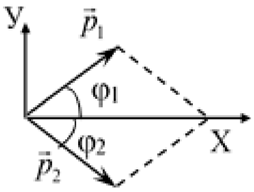
второй:

$$\vec{p}_2 = m_2\vec{u}_2.$$

Подставим в (1) выражения импульсов до и после разрыва снаряда:

$$m\vec{\text{v}} = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2. \qquad (2)$$

1) Построим треугольник импульсов,



из которого согласно теореме косинусов:

$$p_2^2 = p^2 + p_1^2 - 2pp_1\cos\varphi_1 \quad =>$$

$$\left(m_2u_2\right)^2 = \left(m\text{v}\right)^2 + \left(m_1u_1\right)^2 - 2m\text{v}m_1u_1cos\varphi_1.$$

Выразим скорость

$$u_2 = \frac{\sqrt{\left(m\text{v}\right)^2 + \left(m_1u_1\right)^2 - 2m\text{v}m_1u_1cos\varphi_1}}{m_2},$$

массу второго осколка представим, как:

$$m_2 = m - m_1,$$

получим расчетную формулу скорости второго осколка:

$$u_2 = \frac{\sqrt{(m\text{v})^2 + (m_1u_1)^2 - 2m\text{v}m_1u_1cos\varphi_1}}{m - m_1}.$$

Подставим численные значения:

$$u_2 = \frac{\sqrt{(10\cdot200)^2 + (3\cdot400)^2 - 2\cdot10\cdot200\cdot3\cdot400\cdot\frac{1}{2}}}{10-3} \approx 249\,\text{м/с}.$$

2) Для нахождения угла полёта второго осколка спроецируем на оси системы координат XOY выражение (2):

OX: $m\text{v} = m_1u_1\,cos\,\varphi_1 + m_2u_2\,cos\,\varphi_2$,

OУ: $0 = m_1u_1\,sin\,\varphi_1 - m_2u_2\,sin\,\varphi_2$.

Преобразуем полученные уравнения:

$$m_2u_2\,cos\,\varphi_2 = m\text{v} - m_1u_1\,cos\,\varphi_1, \quad (3)$$

$$m_2u_2\,sin\,\varphi_2 = m_1u_1\,sin\,\varphi_1. \quad (4)$$

Разделим (4) на (3):

$$tg\varphi_2 = \frac{m_1u_1sin\varphi_1}{m\text{v} - m_1u_1cos\varphi_1},$$

следовательно, угол полёта второго осколка к горизонту вычислим по формуле:

$$\varphi_2 = arctg\left(\frac{m_1u_1sin\varphi_1}{m\text{v} - m_1u_1cos\varphi_1}\right).$$

Подставим числовые значения:

$$\varphi_2 = arctg\left(\frac{3\cdot400\cdot\sqrt{3}/2}{10\cdot200 - 3\cdot400\cdot1/2}\right) \approx arctg\,0{,}7432 \approx 36{,}62^o.$$

Окончательный ответ: угол полёта второго осколка φ_2 = -36,62°, т.к. вектор импульса второго осколка направлен по ходу часовой стрелки относительно положительного направления оси *OX*.

Ответ: u_2 = 250 м/с; φ_2 = -36,6°.

3. РАБОТА. ЭНЕРГИЯ

Механическая работа. Мощность

Элементарной работой δA силы на бесконечно малом (элементарном) перемещении $d\vec{r}$ (рис. 8) называют величину, равную скалярному произведению силы $\vec{F}$ на элементарное перемещение $\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r}$. (3.1)

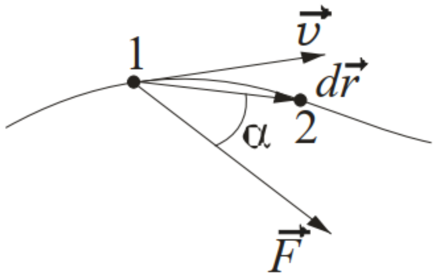


Рис. 8. Элементарная работа силы

В скалярном виде:

$$\delta A = Fdr\,cos\,\alpha\,, \tag{3.2}$$

где α – угол между направлениями силы и перемещения.

Работа силы может быть положительной и отрицательной:

а) если $0 < \alpha < \pi/2$, то работа положительна $A > 0$;

б) если $\pi/2 < \alpha < \pi$, то работа отрицательна $A < 0$;

в) при $\alpha = \pi/2$ работа равна нулю $A = 0$.

Если движение прямолинейное, а сила не меняется ни по модулю, ни по направлению $\vec{F} = const$, то работа рассчитывается по формуле

$$A = FS\,cos\,\alpha\,. \tag{3.3}$$

Работа переменной силы $\vec{F}$ на конечном перемещении, то есть на участке траектории 1-2 (рис. 9) равна

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} d\vec{r}\,. \tag{3.4}$$

Рис. 9. Работа переменной силы на конечном перемещении

Работу можно определить графически.

Проекция силы $\vec{F}$ на заданное направление $\vec{r}$ равна (рис. 10) $F_r = F\cos\alpha$.

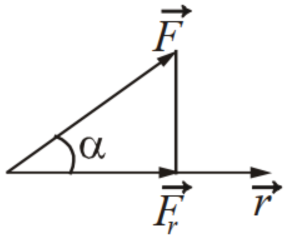


Рис. 10. Проекция силы $\vec{F}$ на направление $\vec{r}$

Работа постоянной силы равна площади заштрихованного прямоугольника в координатах F_r, r (рис. 11):

$$A = F_r\left(r_2 - r_1\right) = F_r S.$$

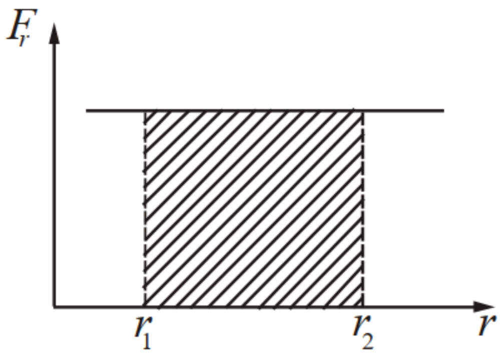


Рис. 11. Графическое представление работы постоянной силы на конечном перемещении

Работа переменной силы на конечном перемещении равна площади криволинейной трапеции в координатах F_r, r (рис. 12):

$$A = \int_{r_1}^{r_2} F_r dr$$

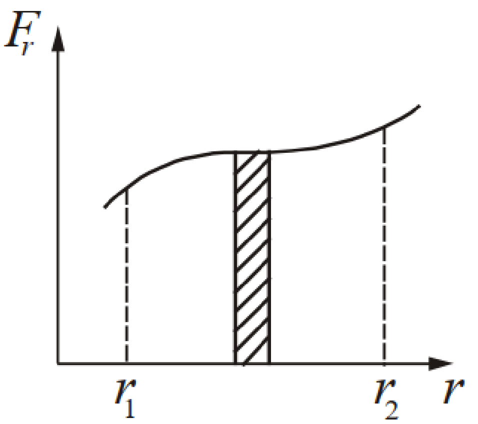


Рис. 12. Графическое представление работы переменной силы на конечном перемещении

Единица работы в СИ: $1[A] = 1H \cdot 1м = 1Дж = 1\frac{кг \cdot м^2}{с^2}$.

Для характеристики быстроты совершения работы вводят понятие мгновенной мощности силы, которая показывает работу силы в единицу времени:

$$N = \frac{\delta A}{dt}. \quad (3.5)$$

Мгновенная мощность также равна скалярному произведению силы на скорость тела:

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \frac{\left(\vec{F} \cdot d\vec{r}\right)}{dt} = \vec{F}, \vec{\mathrm{v}} = F\mathrm{v}\cos\left(\angle \vec{F}, \vec{\mathrm{v}}\right). \quad (3.6)$$

Средняя мощность определяется отношением работы к промежутку времени, за который работа была совершена:

$$N_{ср} = \frac{A}{t}. \quad (3.7)$$

Единица мощности в СИ: $1[N] = \frac{1Дж}{1с} = 1Вт$.

Энергия. Закон сохранения энергии

Энергия – универсальная мера различных форм движения и взаимодействия. Механическая энергия бывает двух видов: кинетическая и потенциальная.

Кинетическая энергия

Величина

$$E_к = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} = \frac{p^2}{2m} \quad (3.8)$$

называется кинетической энергией материальной точки.

Теорема об изменении кинетической энергии точки: работа сил, действующих на материальную точку, равна приращению ее кинетической энергии:

$$A_{1-2} = E_{к2} - E_{к1} = \Delta E_к = \frac{m\mathrm{v}_2^{\ 2}}{2} - \frac{m\mathrm{v}_1^{\ 2}}{2} \quad (3.9)$$

где v_1 – начальная, а v_2 – конечная скорости точки.

Кинетическая энергия механической системы N материальных точек равна сумме кинетических энергий точек, входящих в систему

$$E_к = \sum_{i=1}^{N} E_{кi} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \mathrm{v}_i^2}{2}, \quad (3.10)$$

где v_i – скорость i-ой точки массой m_i.

теорему об изменении кинетической энергии системы точек: работа всех сил, действующих на систему материальных точек, равна приращению кинетической энергии этой системы.

Приращение кинетической энергии определяется работой не только внешних, но и внутренних сил, действующих в системе.

Консервативные силы. Потенциальная энергия

Силы, работа которых не зависит от формы траектории, а определяется лишь начальным и конечным положениями точки, называются консервативными, а их поля – потенциальными.

Работа консервативной силы равна нулю по замкнутому пути $\oint\limits_{(L)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.

Если материальная точка находится в поле консервативных сил, то для нее можно ввести понятие потенциальной энергии, которая является функцией координат материальной точки.

Потенциальная энергия $\Pi\left(\vec{r}\right)$ – часть механической энергии, которая зависит от взаимного расположения тел или частей тела, а также от природы сил, действующих между телами.

Работа консервативных сил при элементарном (бесконечно малом) изменении конфигурации системы равна убыли потенциальной энергии

$$\delta A = -dE_{\text{п}}. \tag{3.11}$$

тогда потенциальная энергия и сила связаны соотношением

$$E_{\text{п}} = -\int \vec{F} d\vec{r} + C, \tag{3.12}$$

где C – постоянная интегрирования, т.е. потенциальная энергия определяется с точностью до некоторой произвольной постоянной.

Потенциальную энергию точки в каком-то определенном положении условно считают равной нулю (выбирают нулевой уровень отсчета), а потенциальную энергию в других положениях отсчитывают относительно нулевого уровня.

Для консервативных сил в декартовой системе координат

$$F_x = -\frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial z}, \tag{3.13}$$

или в векторном виде сила в каждой точке поля определяется градиентом функции $E_{\text{п}}\left(\vec{r}\right)$:

$$\vec{F}\left(\vec{r}\right) = -gradE_{\text{п}}\left(\vec{r}\right), \tag{3.14}$$

где

$$gradE_{\text{п}}\left(\vec{r}\right) = \frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial z}\vec{k}. \tag{3.15}$$

Конкретный вид функции $E_{\text{п}}\left(\vec{r}\right)$ зависит от характера силового поля.

Например, потенциальная энергия тела массой m, поднятого на высоту h над поверхностью Земли,

$$E_{\text{п}} = mgh, \tag{3.16}$$

где высота h отсчитывается от нулевого уровня, для которого $E_{\text{п}0} = 0$.

Потенциальная энергия упругодеформированного тела

$$E_{\text{п}} = \frac{kx^2}{2}. \tag{3.17}$$

Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия

$$E_{\text{п}} = -G\frac{Mm}{r}, \tag{3.18}$$

потенциальную энергию в бесконечности принимают равной нулю $E_{\text{п}\infty} = 0$.

Полная механическая энергия. Закон сохранения механической энергии

Сумму кинетической и потенциальной энергий называют полной механической энергией материальной точки:

$$E = E_{к} + E_{\text{п}}. \tag{3.19}$$

Закон сохранения энергии в механике: полная механическая энергия системы материальных точек, между которыми действуют только консервативные силы, остается постоянной (сохраняется):

$$E = E_{к} + E_{\text{п}} = const. \tag{3.20}$$

В системах с неконсервативными силами закон сохранения механической энергии несправедлив. Однако, энергия никогда не исчезает и не появляется вновь, она лишь превращается из одного вида в другой.

Закон изменения полной механической энергии: изменение полной механической энергии системы равно работе неконсервативных сил

$$E_2 - E_1 = \Delta E = A_{неконс}. \tag{3.21}$$

Упругие и неупругие столкновения

Удар (или **соударение**) – это столкновение двух или нескольких тел, при котором взаимодействие длится очень короткое время.

Отношение нормальных составляющих относительной скорости тел после и до удара называется коэффициентом восстановления ε:

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{v}'_n}{\mathrm{v}_n}.$$

Если для сталкивающихся тел $\varepsilon = 0$, то такие тела называются абсолютно неупругими.

Если для сталкивающихся тел $\varepsilon = 1$, то такие тела называются абсолютно упругими.

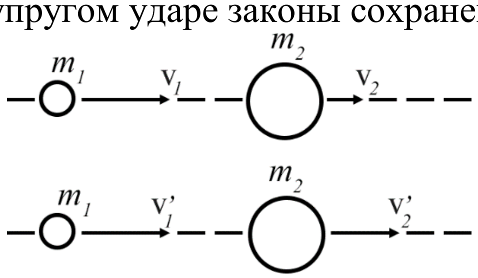
На практике обычно $0 < \varepsilon < 1$.

Например: сталь – $\varepsilon \approx 0{,}56$; слоновая кость – $\varepsilon \approx 0{,}89$; свинец – $\varepsilon \approx 0$.

Удар называется центральным, если тела до удара движутся вдоль прямой, проходящей через их центры масс.

Абсолютно упругий удар – это столкновение двух тел, в результате которого в обеих взаимодействующих телах не остается никаких деформаций и вся кинетическая энергия, которой обладали тела до удара, после удара снова превращается в кинетическую энергию.

При абсолютно упругом ударе законы сохранения имеют вид:



$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2', \quad (3.22)$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}. \quad (3.23)$$

Произведя соответствующие преобразования в выражениях (3.22) и (3.23), получаем

$$m_1\left(v_1 - v_1'\right) = m_2\left(v_2' - v_2\right), \quad (3.24)$$

$$m_1\left(v_1^2 - v_1'^2\right) = m_2\left(v_2'^2 - v_2^2\right), \quad (3.25)$$

откуда

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2'. \quad (3.26)$$

Решая уравнения (3.24) и (3.26), находим

$$v_1' = \frac{\left(m_1 - m_2\right)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad (3.27)$$

$$v_2' = \frac{\left(m_2 - m_1\right)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \quad (3.28)$$

Пример 1. $v_2 = 0$

$$v_1' = \frac{\left(m_1 - m_2\right)v_1}{m_1 + m_2}, \quad (3.29)$$

$$v_2' = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \quad (3.30)$$

Проанализируем выражения (3.29) и (3.30) для двух шаров различных масс:

а) $m_1 = m_2 \Rightarrow v_1' = 0$, $v_2' = v_1$;

б) $m_1 > m_2 \Rightarrow v_1' < v_1$, $v_2' > v_1'$, $\vec{v}_1' \uparrow\downarrow \vec{v}_1$;

в) $m_1 < m_2 \Rightarrow \vec{v}_1' \uparrow\downarrow \vec{v}_1$, $v_2' < v_1'$;

г) $m_2 >> m_1 \Rightarrow \vec{\mathrm{v}}_1' = -\vec{\mathrm{v}}_1$; $\mathrm{v}_2' \approx \dfrac{2m_1\mathrm{v}_1}{m_2} \approx 0$.

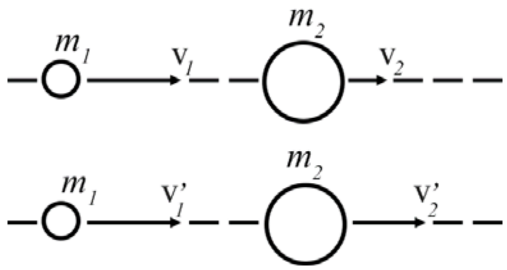
Пример 2. При $m_1 = m_2$ выражения (3.29) и (3.30) будут иметь вид:

$$\mathrm{v}_1' = \mathrm{v}_2,\ \mathrm{v}_2' = \mathrm{v}_1,$$

т.е. шары равной массы «обмениваются» скоростями.

Абсолютно неупругий удар – это столкновение двух тел, в результате которого тела объединяются, двигаясь дальше, как единое целое.

При абсолютно неупругом ударе (рис. 9) закон сохранения импульса имеет вид



$$m_1\vec{\mathrm{v}}_1 + m_2\vec{\mathrm{v}}_2 = \left(m_1 + m_2\right)\vec{\mathrm{v}},$$

откуда

$$\vec{\mathrm{v}} = \frac{m_1\vec{\mathrm{v}}_1 + m_2\vec{\mathrm{v}}_2}{m_1 + m_2}. \tag{3.31}$$

Если $m_1 = m_2$, то $\vec{\mathrm{v}} = \dfrac{\vec{\mathrm{v}}_1 + \vec{\mathrm{v}}_2}{2}$.

Потери кинетической энергии в абсолютно неупругом ударе:

$$\Delta E_к = \left(\frac{m_1\mathrm{v}_1^2}{2} + \frac{m_2\mathrm{v}_2^2}{2}\right) - \frac{\left(m_1 + m_2\right)\mathrm{v}^2}{2}.$$

Используя выражение (10), получим

$$\Delta E_к = \frac{\left(m_1 m_2\right)}{2\left(m_1 + m_2\right)}\left(\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2\right)^2.$$

Если первоначально $\mathrm{v}_2 = 0$, то

$$\mathrm{v} = \frac{m_1\mathrm{v}_1}{m_1 + m_2}, \quad \Delta E_к = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\cdot\frac{m_1\mathrm{v}_1^2}{2}.$$

Когда $m_2 >> m_1 \Rightarrow \mathrm{v} << \mathrm{v}_1$ и почти вся кинетическая энергия тела при ударе переходит в другие формы энергии.

При $m_1 >> m_2 \Rightarrow \mathrm{v} \approx \mathrm{v}_1$.

Примеры решения задач

Задача 1. На рельсах стоит платформа, на которой в горизонтальном положении закреплено орудие без противооткатного устройства. Из орудия производят выстрел вдоль железнодорожного пути. Масса m_1 снаряда равна 10 кг и его скорость v = 1 км/с. Масса m_2 платформы с орудием и прочим грузом равна 20 т. На какое расстояние l откатится платформа после выстрела, если коэффициент сопротивления μ = 0,002?

Дано:	**СИ:**
m_1 = 10 кг	
v = 1 км/с	10^3 м/с
m_2 = 20 т	$2\cdot10^4$ кг
μ = 0,002	$2\cdot10^{-3}$
l = ?	

Решение:

Определим u скорость платформы после выстрела с помощью закона сохранения импульса:

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 ,$$

или:

$$0 = m_1\vec{\text{v}} + m_2\vec{u} .$$

Запишем уравнение в проекциях на горизонтальное направление:

$$0 = m_1\text{v} - m_2 u ,$$

следовательно, скорость платформы после выстрела:

$$u = \frac{m_1\text{v}}{m_2} . \qquad (1)$$

Перемещение платформы можно определить двумя способами.

1 способ. Изменение кинетической энергии платформы равно работе сил трения:

$$A_{тр} = \Delta E_к . \qquad (2)$$

Работа силы трения:

$$A_{тр} = F_{тр} l \cos\alpha = -F_{тр} l ,$$

где α = 180º, т.к. направление вектора силы трения $\vec{F}_{тр}$ противоположно перемещению платформы.

Изменение кинетической энергии платформы:

$$\Delta E_к = \frac{m_2 u_к^2}{2} - \frac{m_2 u^2}{2} = -\frac{m_2 u^2}{2} ,$$

т.к. $u_к$ конечная скорость платформы равна нулю.

Тогда уравнение (2) запишется в виде:

$$F_{тр} l = \frac{m_2 u^2}{2} ,$$

следовательно, перемещение:

$$l = \frac{m_2 u^2}{2F_{тр}} . \qquad (3)$$

Сила трения равна произведению коэффициента трения на силу реакции опоры:

$$F_{тр} = \mu N .$$

При движении платформы по горизонтальной поверхности сила реакции опоры равна силе тяжести

$$N = m_2 g ,$$

следовательно, сила трения:

$$F_{тр} = \mu m_2 g . \qquad (4)$$

Подставим выражения (1) и (4) в формулу (3), после преобразований получим расчетную формулу для перемещения платформы:

$$l = \frac{m_1^2 v^2}{2\mu g m_2^2}$$

Подставим числовые значения:

$$l = \frac{10^2 \cdot 10^6}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}81 \cdot 4 \cdot 10^8} = 6{,}37 \text{ м.}$$

2 способ. Перемещение при равнозамедленном движении тела выразим через скорость и ускорение:

$$l = \frac{u^2 - u_к^2}{2a} = \frac{u^2}{2a}; \qquad (5)$$

Согласно II закону Ньютона:

$$F_{тр} = m_2 a . \qquad (6)$$

Приравняем правые части выражений (4) и (6):

$$\mu m_2 g = m_2 a$$

и выразим ускорение:

$$a = \mu g . \qquad (7)$$

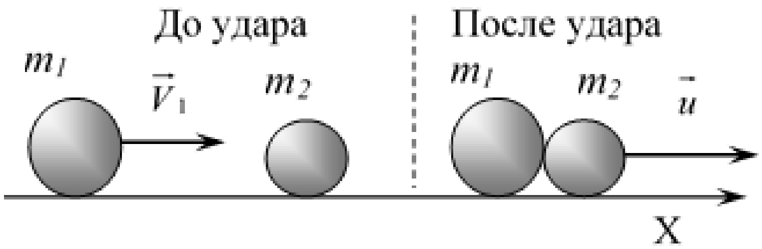
Подставим выражения для скорости v (1) и ускорения a (7) в формулу (5), получим расчетную формулу для перемещения, аналогичную первому способу:

$$l = \left(\frac{m_1 v}{m_2} \right)^2 \cdot \frac{1}{2\mu g} = \frac{m_1^2 v^2}{2\mu g m_2^2} .$$

Ответ: $l = \frac{m_1 v^2}{2\mu g m_2^2} = 6{,}37$ м.

Задача 2. Движущееся тело массой m_1 ударяется о неподвижное тело массой m_2. Считая удар неупругим, а тела движущимися после удара вместе, найти, какая часть ΔQ первоначальной кинетической энергии $E_{к1}$ переходит при ударе в тепло. Задачу решить сначала в общем виде, а затем рассмотреть случаи: 1) $m_1 = m_2$; 2) $m_1 = 9 m_2$.

Дано:	**СИ:**
m_1; m_2	
v_1; $v_2 = 0$	
1. $m_1 = m_2$	
2. $m_1 = 9m_2$	
$\dfrac{\Delta Q}{E_{к1}} = ?$	



Решение:

Удар абсолютно неупругий, следовательно, закон сохранения механической энергии не выполняется. Тела до и после удара обладают лишь кинетической энергией.

До удара второе тело покоится, а первое движется, т.е. оно обладает кинетической энергией:

$$E_{к1} = \frac{m_1 v_1^2}{2}.$$

После удара оба тела движутся с одинаковой скоростью, т.к. удар абсолютно неупругий, кинетическая энергия обоих тел:

$$E_{к2} = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2}. \tag{1}$$

Для определения скорости движения после удара воспользуемся законом сохранения импульса:

$$m_1 \vec{v}_1 = (m_1 + m_2)\vec{u}.$$

В проекции на ось *OX*:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)u.$$

Выразим скорость обоих тел после удара

$$u = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Подставим её в формулу (1)

$$E_{к2} = \frac{(m_1 + m_2) m_1^2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)^2} = \frac{m_1^2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)}. \tag{2}$$

Выделившееся тепло ΔQ определим как изменение кинетической энергии системы тел:

$$\Delta Q = E_{к1} - E_{к2}.$$

Отношение выделившегося тепла к начальной кинетической энергии:

$$\frac{\Delta Q}{E_{к1}} = \frac{E_{к1} - E_{к2}}{E_{к1}},$$

$$\frac{\Delta Q}{E_{к1}}=\frac{\dfrac{m_1 v_1^2}{2}-\dfrac{m_1^2 v_1^2}{2(m_1+m_2)}}{\dfrac{m_1 v_1^2}{2}}=1-\frac{m_1}{m_1+m_2}=\frac{m_2}{m_1+m_2}. \qquad (3)$$

1 случай: $m_1 = m_2$.

Подставим в формулу (3):

$$\frac{\Delta Q}{E_{к1}}=\frac{m_1}{2m_1}=0{,}5.$$

2 случай: $m_1 = 9m_2$.

Подставим в формулу (3):

$$\frac{\Delta Q}{E_{к1}}=\frac{m_2}{10m_2}=0{,}1.$$

Ответ: $\dfrac{\Delta Q}{E_{к1}}=\dfrac{m_2}{m_1+m_2}$; 0,5; 0,1.

Задача 3. Вычислить работу сил гравитационного поля Земли при перемещении тела массой m = 10 кг из точки 1 в точку 2. Радиус Земли и ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли считать известными.

Дано:	**СИ:**
m = 10 кг	
$r_1 = 3R$	
$r_2 = 3R$	
$R = 6400$ км	$6{,}4\cdot10^6$ м
$g = 9{,}8$ м/с^2	
A_{12} = ?	

Решение:

Силы системы – гравитационные, относятся к силам консервативным, поэтому работа сил поля совершается за счет убыли потенциальной энергии:

$$A_{12}=-\Delta E_п=E_{п1}-E_{п2}, \qquad (1)$$

где $E_{п1}$ и $E_{п2}$ – потенциальные энергии системы тело – Земля соответственно в начальном и конечном состояниях.

Условимся, что потенциальная энергия взаимодействия тела и Земли равна нулю, когда тело находится на бесконечно большом расстоянии от Земли, тогда на расстоянии r потенциальная энергия выразится равенством:

$$E_п=-G\frac{mM}{r},$$

где M – масса Земли.

Для расстояний $r_1 = 3R$ и $r_2 = 3R$ получим выражения потенциальной энергии:

$$E_{п1}=-G\frac{mM}{3R};\ E_{п2}=-G\frac{mM}{2R}.$$

Подставив эти выражения в формулу (1), получим

$$A_{12} = -G\frac{mM}{3R} - \left(-G\frac{mM}{2R}\right) = \frac{1}{6}G\frac{mM}{R}. \quad (2)$$

Ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли

$$g = G\frac{M}{R^2},$$

с помощью этого выражения преобразуем формулу (2)

$$A_{12} = \frac{1}{6}G\frac{mM}{R} = \frac{1}{6}mgR.$$

Подставим значения и вычислим

$$A_{12} = \frac{1}{6}\cdot 10\cdot 9{,}8\cdot 6{,}4\cdot 10^6 = 104\cdot 10^6 \text{ Дж} = 104 \text{ МДж}.$$

Ответ: $A_{12} =$ 104 МДж.

4. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Момент инерции

Вращательным называется движение твердого тела, при котором все точки твердого тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения (рис. 13.1).

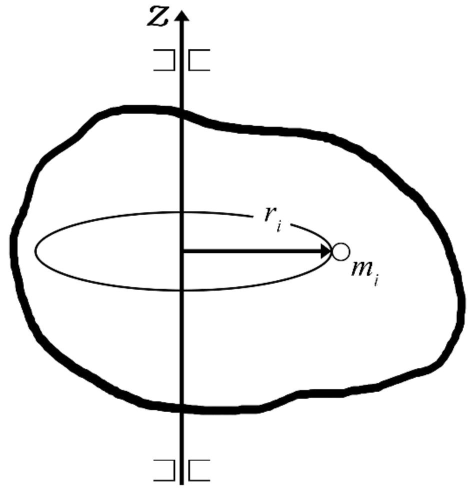


Рис. 13.1. Вращательное движение твердого тела

Моментом инерции материальной точки J_i относительно оси называется скалярная физическая величина, равная произведению массы точки m_i на квадрат расстояния r_i до этой оси:

$$J_i = m_i r_i^2. \tag{4.1}$$

Моментом инерции твердого тела относительно некоторой оси называется сумма произведений масс его материальных точек на квадрат их расстояний до выбранной оси (рис. 4.1):

$$J = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 . \tag{4.2}$$

Сумма (4.2) является в случае твердого тела интегральной и поэтому

$$J = \int\limits_{(V)} r^2 dm , \tag{4.3}$$

где интегрирование производится по всему объему тела.

Теорема Штейнера: момент инерции тела J относительно любой оси вращения равен сумме момента его инерции J_C относительно параллельной оси, проходящей через центр масс C тела и произведения массы m тела на квадрат расстояния a между осями

$$J = J_C + ma^2, \qquad (4.4)$$

где J_C – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр инерции (точка C), a - расстояние между осью (BB'), проходящей через центр инерции, и параллельной ей заданной осью (AA') (рис. 13.2).

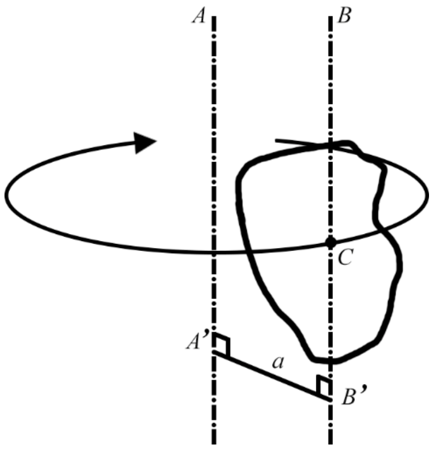


Рис. 13.2 Графическое представление теоремы Штейнера

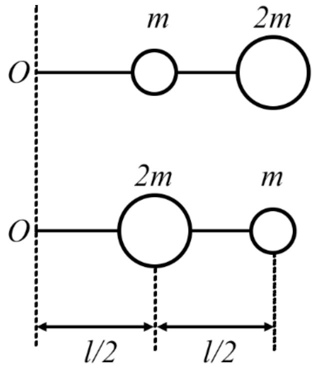
Таблица 1– Значения моментов инерции для некоторых однородных тел

Тело	Положение оси вращения	Момент инерции
Полый тонкостенный цилиндр (обруч) радиусом R	Ось симметрии	$J = mR^2$
Сплошной цилиндр или диск радиусом R	Ось симметрии	$J = \frac{1}{2}mR^2$
Прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$J = \frac{1}{12}ml^2$
Прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его конец	$J = \frac{1}{3}ml^2$
Шар радиусом R	Ось проходит через центр шара	$J = \frac{2}{5}mR^2$

Примеры решения задач

Задача 1. Два шара массами m и $2m$ (m = 10 г) закреплены на тонком невесомом стержне длиной l = 40 см так, как это указано на рис. Определить моменты инерции J системы относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец в этих двух случаях. Размерами шаров пренебречь.

Дано:	**СИ:**
m = 10 г	10^{-2} кг
$m_1 = m$	
$m_2 = 2m$	
l = 40 см	0,4 м
J = ?	



Решение:

Первый рисунок. Момент инерции материальной точки по определению

$$J = mR^2 .$$

Момент инерции первого шара относительно оси ОО:

$$J_1 = m_1R_1^2 = \frac{ml^2}{4},$$

где $R_1 = \dfrac{l}{2}$ – расстояние от оси ОО до шара массой $m_1 = m$.

Момент инерции второго шара относительно оси ОО:

$$J_2 = m_2R_2^2 = 2ml^2,$$

где $R_2 = 2l$ – расстояние от оси ОО до шара массой $m_2 = 2m$.

Момент инерции обоих шаров относительно оси ОО равен сумме моментов инерции каждого:

$$J = J_1 + J_2 = \frac{ml^2}{4} + 2ml^2 = \frac{9ml^2}{4}.$$

Подставим численные значения:

$$J = \frac{9ml^2}{4} = \frac{9 \cdot 10^{-2} \cdot 0,4^2}{4} = 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ кг·м}^2.$$

Второй рисунок. Момент инерции первого шара относительно оси ОО:

$$J_1 = m_1R_1^2 = 2m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{2}.$$

Момент инерции второго шара относительно оси ОО:

$$J_2 = m_2R_2^2 = ml^2.$$

Момент инерции обоих шаров относительно оси ОО:

$$J = J_1 + J_2 = \frac{ml^2}{2} + ml^2 = \frac{3ml^2}{2}.$$

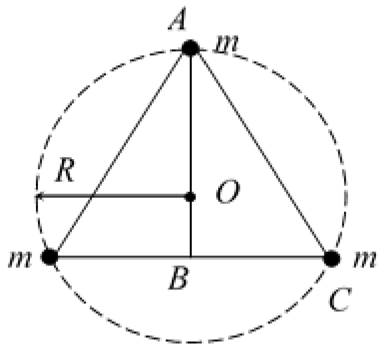
Подставим численные значения:

$$J = \frac{3ml^2}{2} = \frac{3 \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}4^2}{2} = 2{,}4 \cdot 10^{-3} \text{ кг·м}^2.$$

Ответ: а) $J = \frac{9}{4}ml^2$ = 3,6·10^{-3} кг·м^2, б) $J = ml^2$ = 2,4·10^{-3} кг·м^2.

Задача 2. Три маленьких шарика массой m = 10 г каждый расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной a = 20 см и скреплены между собой. Определить момент инерции J системы относительно оси: 1) перпендикулярной плоскости треугольника и проходящей через центр описанной окружности; 2) лежащей в плоскости треугольника и проходящей через центр описанной окружности и одну из вершин треугольника. Массой стержней, соединяющих шары, пренебречь.

Дано:	СИ:
m = 10 г	10^{-2} кг
a = 20 см	0,2 м
J = ?	



Решение:

1) Момент инерции системы трех материальных точек относительно оси, проходящей перпендикулярно плоскости рисунка через точку O – центр описанной вокруг треугольника окружности:

$$J = J_1 + J_2 + J_3.$$

Момент инерции материальной точки

$$J = mR^2.$$

По условию массы точек одинаковы, из рисунка – расстояние от тел до точки O одинаковое, следовательно:

$$J_1 = J_2 = J_3,$$

тогда момент инерции системы тел:

$$J = 3J_1 = 3mR^2 = 3m|AO|^2.$$

Расстояние $|AO| = R$ (центр описанной вокруг равностороннего треугольника окружности совпадает с точкой пересечения медиан) связано с расстоянием AB соотношением 1:2, т.е.:

$$R = \frac{2}{3}|AB| = \frac{2}{3}\sqrt{|AC|^2 - |BC|^2} = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Тогда момент инерции системы тел:

$$J = 3m\frac{a^2}{3} = ma^2 = 10^{-2} \cdot 0{,}2^2 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ кг·м}^2.$$

2) Момент инерции системы трех материальных точек относительно оси *OA*:

$$J = J_1 + J_2 + J_3.$$

Из рисунка – расстояние от тела, расположенного в точке *A* до оси *OA*, равно нулю, т.е. $J_3 = 0$. Расстояние от двух нижних точек до оси *OA* одинаковое, следовательно:

$$J_1 = J_2,$$

тогда момент инерции системы тел:

$$J = 2J_1 = 2mR^2 = 2m|BC|^2.$$

Определим сторону BC ΔABC:

$$|BC| = |AC| sin 30^0 = \frac{a}{2},$$

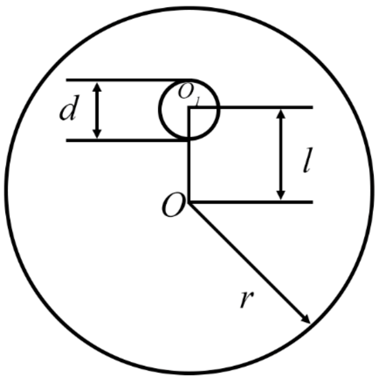
тогда момент инерции системы тел:

$$J = 2m\frac{a^2}{4} = \frac{ma^2}{2} = \frac{10^{-2} \cdot 0{,}04}{2} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ кг·м}^2.$$

Ответ: 1) J = $4·10^{-4}$ кг·м^2; 2) J = $2·10^{-4}$ кг·м^2.

Задача 3. В однородном диске массой m = 1 кг и радиусом r = 30 см вырезали круглое отверстие диаметром d = 20 см, центр которого находится на расстоянии l = 15 см от оси диска. Найти момент инерции J полученного тела относительно оси, проходящей перпендикулярно плоскости диска через его центр.

Дано:	СИ:
m = 1 кг	
r = 30 см	0,3 м
d = 20 см	0,2 м
l = 15 см	0,15 м
J = ?	



Решение:

Момент инерции диска относительно точки *O*:

$$J = J_1 - J_2,$$

где момент инерции для диска (без отверстия):

$$J_1 = \frac{1}{2}mr^2.$$

Момент инерции для отверстия по теореме Штейнера (относительно оси, не проходящей через центр тяжести тела):

$$J_2 = J_0 + m_2 l^2.$$

Здесь момент инерции отверстия относительно оси, проходящей через его центр тяжести:

$$J_0 = \frac{m_2 R^2}{2} = \frac{m_2}{2}\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{m_2 d^2}{8}.$$

Найдём массу отверстия из следующих соображений: Вся масса диска соответствует:

$$m = \rho V = \rho S h,$$

где ρ – плотность материала диска, S – площадь диска и h – толщина диска. Масса вырезанного отверстия:

$$m_2 = \rho V_2 = \rho S_2 h,$$

где S_2 – площадь отверстия.

Отношение масс:

$$\frac{m}{m_2} = \frac{m}{m_2} = \frac{\rho S h}{\rho S_2 h} = \frac{S}{S_2},$$

откуда масса вырезанного диска:

$$m_2 = m\frac{S_2}{S}.$$

Площадь диска (окружности):

$$S = \pi r^2.$$

Площадь отверстия (окружности):

$$S_2 = \pi R^2 = \frac{\pi d^2}{4},$$

следовательно, масса вырезанного диска:

$$m_2 = m\frac{\pi \cdot d^2/4}{\pi \cdot r^2} = \frac{md^2}{4r^2},$$

тогда момент инерции отверстия:

$$J_2 = \frac{m_2 d^2}{8} + m_2 l^2 = \frac{md^2}{4r^2}\left(\frac{d^2}{8} + l^2\right) = \frac{md^2}{32r^2}\left(d^2 + 8l^2\right).$$

Окончательно момент инерции системы:

$$J = \frac{1}{2}mr^2 - \frac{md^2}{32r^2}\left(d^2 + 8l^2\right).$$

Подставим в формулу числовые значения физических величин и произведем вычисления:

$$J = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 0{,}3^2 - \frac{1\cdot 0{,}2^2}{32\cdot 0{,}3^2}\left(0{,}2^2 + 8\cdot 0{,}15^2\right) = 4{,}19\cdot 10^{-2}\ \text{кг·м}^2.$$

Ответ: $J = 4{,}19\cdot 10^{-2}$ кг·м^2.

Динамика вращательного движения твердого тела

Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси.

$$\vec{M} = J\vec{\varepsilon}, \qquad (5.1)$$

где M – момент силы; J – момент инерции тела относительно оси вращения; ε – угловое ускорение.

Моментом силы относительно точки неподвижной точки O (рис. 14.1) называется векторное произведение радиуса-вектора $\vec{r}$, проведенного из точки О в точку приложения силы, на силу $\vec{F}$:

$$\vec{M} = \left[\vec{r} \times \vec{F}\right].$$

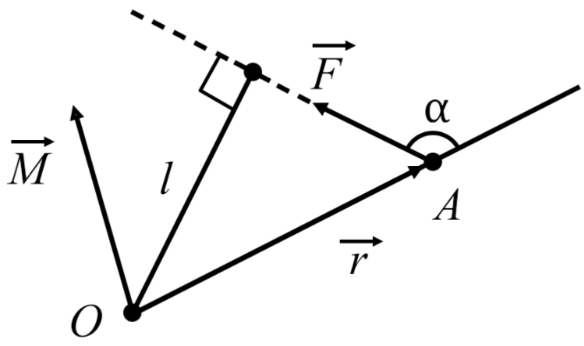


Рис. 14.1. Вектор момента силы

Модуль момента силы

$$M = rF\,sin\alpha = Fl, \qquad (5.2)$$

где α – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{F}$; $l = r\,sin\alpha$ – длина перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую, вдоль которой направлена сила; l – плечо силы.

Кинетическая энергия вращающегося тела:

$$E_к = \frac{J\omega^2}{2}, \qquad (5.3)$$

где ω – угловая скорость вращения.

Моментом импульса $\vec{L}$ частицы тела относительно точки О называется векторное произведение ее радиуса-вектора $\vec{r}$ на импульс $\vec{p}$ (рис. 14.2):

$$\vec{L} = \left[\vec{r} \times \vec{p}\right], \qquad (5.4)$$

где $L = rp\,sin\alpha = pl$ – модуль момента импульса; l – плечо импульса.

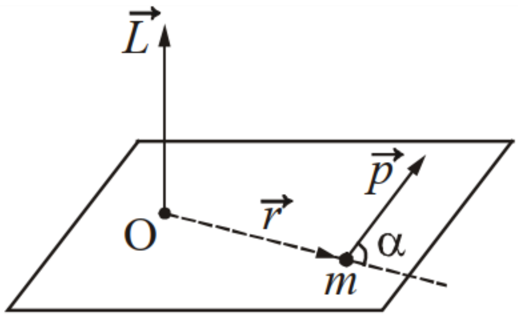


Рис. 14.2. Вектор момента импульса

Направлен вектор $\vec{L}$ перпендикулярно плоскости, в которой лежат перемножаемые векторы $\vec{r}$ и $\vec{p}$. Направление $\vec{L}$ определяется правилом «буравчика» или «правого винта»: рукоятка буравчика поворачивается по кратчайшему пути от вектора $\vec{r}$ к вектору $\vec{p}$, тогда острие буравчика совпадет с направлением вектора $\vec{L}$.

Если материальная точка движется по окружности радиусом r, то модуль момента импульса относительно центра окружности равен

$$L = m\text{v}r\,. \tag{5.6}$$

Момент импульса твердого тела относительно оси есть сумма моментов импульса отдельных частиц

$$L_Z = \sum_{i=1}^{N} m_i \text{v}_i r_i\,.$$

т.е.

$$L_Z = J_Z \omega\,. \tag{5.7}$$

Закон изменения момента импульса твердого тела: изменение момента импульса тела в единицу времени равно векторной сумме моментов всех внешних сил, действующих на это тело

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}\,. \tag{5.8}$$

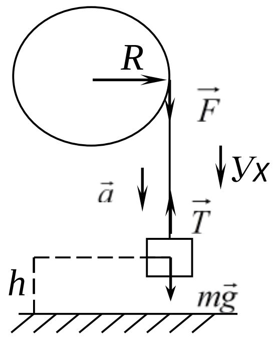
Закон сохранения импульса: момент импульса замкнутой системы сохраняется, т.е. не изменяется с течением времени

$$\vec{L} = const\,. \tag{5.9}$$

Примеры решения задач

Задача 1. На барабан радиусом R = 20 см, момент инерции которого J = 0,1 кг·м^2, намотан шнур, к которому привязан груз массой m = 0,5 кг. До начала вращения барабана высота груза над полом h = 1 м. Найти: 1) через какое время t груз опустится до пола; 2) кинетическую энергию груза $E_к$ в момент удара о пол; 3) натяжение шнура T. Трением и растяжением шнура пренебречь.

Дано:	**СИ:**
R = 20 см	0,2 м
J = 0,1 кг·м^2	
h = 1 м	
m = 0,5 кг	
t = ?	
$E_к$ = ?	
T = ?	



Решение:

1) При равноускоренном движении с нулевой начальной скоростью путь определится как:

$$h = \frac{at^2}{2},$$

тогда время движения груза

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}}. \tag{1}$$

Связь линейного a и углового ε ускорения:

$$a = \varepsilon R. \tag{2}$$

Вращающий (механический) момент по определению

$$M = FR = TR,$$

$F = T$ т.к. за счёт натяжения нити вращается барабан.

С другой стороны, согласно основному уравнению динамики вращательного движения:

$$M = J\varepsilon,$$

тогда

$$TR = J\varepsilon,$$

откуда угловое ускорение:

$$\varepsilon = \frac{TR}{J}. \tag{3}$$

Найдём натяжение нити T. По второму закону Ньютона:

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

Спроецируем векторы на ось $OУ$, направленную вниз:

$$-T + mg = ma,$$

откуда натяжение нити:

$$T = m\left(g - a\right). \qquad (4)$$

Подставим выражение (4) в выражение (3):

$$\varepsilon = \frac{m\left(g - a\right)R}{J}.$$

Подставляя полученную формулу в формулу (2), получаем:

$$a = \frac{m\left(g - a\right)R^2}{J}.$$

Следовательно,

$$Ja = mgR^2 - maR^2,$$

откуда:

$$a = \frac{mgR^2}{J + mR^2}. \qquad (5)$$

Подставляя полученную формулу в формулу (1), найдем расчетную формулу для времени опускания:

$$t = \sqrt{\frac{2h\left(J + mR^2\right)}{mgR^2}} = \sqrt{\frac{2h}{g}\left(\frac{J}{mR^2} + 1\right)}.$$

Подставим в формулу числовые значения и произведем вычисления:

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 1}{9{,}81}\left(\frac{0{,}1}{0{,}5 \cdot 0{,}2^2} + 1\right)} \approx 1{,}01 \text{ с}.$$

2) Кинетическая энергия груза в момент удара:

$$E_к = \frac{m\text{v}^2}{2}.$$

Так как путь можно выразить через скорость и ускорение:

$$h = \frac{\text{v}^2}{2a}, \qquad (6)$$

откуда квадрат скорости:

$$\text{v}^2 = 2ah,$$

тогда кинетическая энергия:

$$E_к = \frac{m\text{v}^2}{2} = mah.$$

С учётом формулы (5):

$$E_к = \frac{m^2ghR^2}{J + mR^2}.$$

Подставим значения физических величин и произведем вычисления:

$$E_к = \frac{0{,}5^2 \cdot 9{,}81 \cdot 1 \cdot 0{,}2^2}{0{,}1 + 0{,}5 \cdot 0{,}2^2} \approx 0{,}82 \text{ Дж}.$$

3) Натяжение нити найдём по формуле (4) с учётом (5):

$$T = m\left(g - \frac{mgR^2}{J + mR^2}\right).$$

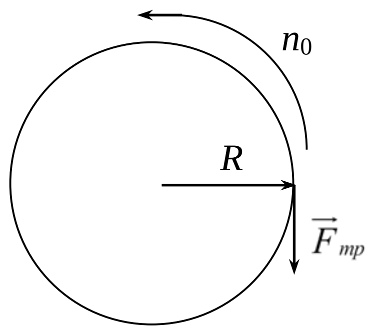
Подставим значения физических величин и произведем вычисления:

$$T = 0{,}5\cdot\left(9{,}81 - \frac{0{,}5\cdot 9{,}81\cdot 0{,}2^2}{0{,}1 + 0{,}5\cdot 0{,}2^2}\right) \approx 4{,}1 \text{ Н}.$$

Ответ: 1) t = 1,1 с; 2) $E_к$ = 0,82 Дж; 3) T = 4,1 Н.

Задача 2. Маховое колесо, имеющее момент инерции J = 245 кг·м^2, вращается (n_0 = 20 об/с). Через минуту после того, как на колесо перестал действовать вращающий момент, оно остановилось. Найти: 1) момент сил трения $M_{тр}$; 2) число оборотов N, которое сделало колесо до полной остановки.

Дано:	**СИ**
J = 245 кг·м^2	
n_0 = 20 об/с	
t = 1 мин	60 с
ω = 0 рад/с	
$M_{тр}$ = ?	
N = ?	



Решение:

1) Основное уравнение динамики вращательного движения:

$$M = J\frac{\Delta\omega}{\Delta t},$$

откуда момент сил трения:

$$M_{тр} = J\frac{\Delta\omega}{t}; \qquad (1)$$

где изменение угловой скорости:

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0 = -\omega_0,$$

так как конечная угловая скорость $\omega = 0$. Выразим начальную угловую скорость через частоту оборотов колеса n_0:

$$\omega_0 = 2\pi n_0; \qquad (2)$$

следовательно,

$$\Delta\omega = -2\pi n_0.$$

Подставим в формулу (1), получим:

$$M_{тр} = -J\frac{2\pi n_0}{t}.$$

Подставив численные значения, получаем:

$$M_{тр} = -245 \cdot \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 20}{60} = -513\,\text{Н·м},$$

минус показывает, что тормозной момент останавливает барабан.

2) Угол поворота φ и число оборотов N связаны формулой:

$$\varphi = 2\pi N\,; \tag{3}$$

С другой стороны, угол поворота (угловой путь φ) за время вращения махового колеса до остановки может быть определён по формуле для равнозамедленного вращения:

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2}\,; \tag{4}$$

где ε – угловое ускорение. Угловое ускорение для равнозамедленного вращения:

$$\varepsilon = \frac{\omega_0 - \omega}{t} = \frac{\omega_0}{t}. \tag{5}$$

Выражение (4) с учётом (5):

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{\omega_0 t}{2} = \frac{\omega_0 t}{2}. \tag{6}$$

Приравнивая формулы (3) и (6) с учётом (2), получим

$$2\pi N = \frac{\omega_0 t}{2} = \frac{2\pi n_0 t}{2} = \pi n_0 t\,,$$

откуда число оборотов до остановки:

$$N = \frac{n_0 t}{2}.$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$N = \frac{20 \cdot 60}{2} = 600.$$

Ответ: 1) $M_{тр} = -513$ Нм; 2) $N = 600$.

Задача 3. Шар массой m = 10 кг и радиусом R = 20 см вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Уравнение вращения шара имеет вид $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$, где B = 4 рад/с^2; C = – 1 рад/с^3. Найти закон изменения момента сил, действующих на шар. Определить момент сил M в момент времени t = 2 с.

Дано:	**СИ:**	**Решение:**
m = 10 кг		По условию зависимость угла поворота от времени:
R = 20 см	0,2 м	$\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$.
$\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$		Уравнение динамики вращательного движения тела относительно неподвижной оси:
B = 4 рад/с^2		
C = – 1 рад/с^3		$M = J\varepsilon$. (1)
t = 2с		
$M = f(t)$ = ?		Момент инерции шара: $J = \frac{2}{5} mR^2$.

$M(t)$ = ?	

Т. к. угловое ускорение есть первая производная угловой скорости по времени или вторая производная угла поворота по времени, то:

$$\varepsilon = \varphi'' = \left(A + Bt^2 + Ct^3\right)'' = \left(2Bt + 3Ct^2\right)' = 2B + 6Ct.$$

Подставляя в выражение (1), получим:

$$M = \frac{2}{5} mR^2 \left(2B + 6Ct\right).$$

Подставив численные значения, получим:

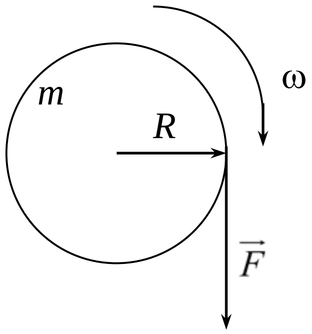
$$M = \frac{2}{5} \cdot 10 \cdot 0{,}2^2 \left(2 \cdot 4 + 6 \cdot (-1) \cdot 2\right) = -0{,}64\,\text{Нм},$$

знак минус показывает, что вращающий момент является тормозящим.

Ответ: $M = \frac{4}{5} mR^2 \left(B + 3Ct\right)$; $M = -0{,}64\,\text{Нм}$.

Задача 4. Однородный диск радиусом R = 0,2 м и массой m = 5 кг вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Зависимость угловой скорости от времени задана уравнением $\omega = A + Bt$, где B = 8 рад/с^2. Найти касательную силу, приложенную к ободу диска.

Дано:	**СИ:**
R = 0,2 м	
m = 5 кг	
$\omega = A + Bt$	
B = 8 рад/с^2	
F = ?	



Решение:

Момент силы F по определению:

$$M = FR.$$

Откуда касательная сила:

$$F = \frac{M}{R}.$$

С другой стороны, уравнение динамики вращательного движения твёрдого тела относительно неподвижной оси:

$$M = J\varepsilon,$$

следовательно,

$$F = \frac{J\varepsilon}{R}. \qquad (1)$$

Момент инерции сплошного однородного *диска*:

$$J = \frac{1}{2} mR^2. \qquad (2)$$

Угловое ускорение есть первая производная скорости по времени:

$$\varepsilon = \omega' = \left(A + Bt\right)' = B; \qquad (3)$$

Следовательно, формула (1) с учётом (2) и (3):

$$F = \frac{BmR^2}{2R} = \frac{BmR}{2}.$$

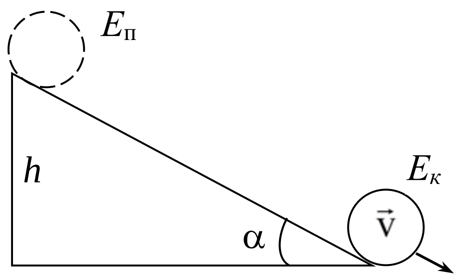
Подставляя числовые значения, получаем:

$$F = \frac{8 \cdot 5 \cdot 0{,}2}{2} = 4 \text{ Н}.$$

Ответ: $F = 4$ Н.

Задача 5. Шар скатывается без скольжения по наклонной плоскости, высота которой $h =$ 0,5 м, угол наклона α. Найти линейную скорость v_1 центра масс шара в конце спуска, если в начале движения его скорость v_0 = 0. Сравнить v_1 со скоростью тела v, соскальзывающего с этой же плоскости без трения.

Дано:	**СИ:**
h = 0,5 м	
v_0 = 0	
g = 9,81 м/с^2	
v_1 = ?	
v = ?	



Решение:

1) По закону сохранения энергии, когда шар скатывается с наклонной плоскости без скольжения, потенциальная энергия $E_п = mgh$ переходит в кинетическую энергию поступательного $E_к^{пост} = \frac{m\mathrm{v}_1^2}{2}$ и вращательного движения $E_к^{вр} = \frac{J\omega_1^2}{2}$:

$$mgh = \frac{m\mathrm{v}_1^2}{2} + \frac{J\omega_1^2}{2}. \qquad (1)$$

Момент инерции шара:

$$J = \frac{2}{5}mR^2. \qquad (2)$$

Угловая скорость шара связана с линейной скоростью соотношением:

$$\omega = \frac{\mathrm{v}}{R}. \qquad (3)$$

Формула (1) с учётом (2) и (3):

$$mgh = \frac{m\mathrm{v}_1^2}{2} + \frac{2/5\, mR^2 \cdot \mathrm{v}_1^2 / R^2}{2} = \frac{7m\mathrm{v}_1^2}{10}.$$

Сократим на m и выразим из полученной формулы v_1:

$$v_1 = \sqrt{\frac{10gh}{7}}.$$

Подставив численные значения, получаем:

$$v_1 = \sqrt{\frac{10 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5}{7}} \approx 2{,}647 \text{ м/с}.$$

2) По закону сохранения энергии, когда шар скатывается без трения (скользит), потенциальная энергия переходит в кинетическую энергию только поступательного движения:

$$mgh = \frac{mv^2}{2}.$$

Откуда скорость шара у основания плоскости:

$$v = \sqrt{2gh}.$$

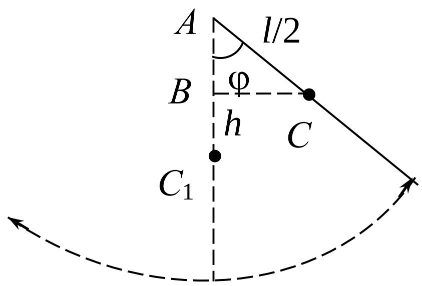
Подставив численные значения, получаем:

$$v = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5} \approx 3{,}13 \text{ м/с}.$$

Ответ: v_1 =2,65 м/с, v = 3,13 м/с.

Задача 6. Тонкий прямой стержень длиной l= 1 м прикреплён к горизонтальной оси, проходящей через его конец. Стержень отклонили на угол $\varphi = 60^\circ$ от положения равновесия и отпустили. Определить линейную скорость v нижнего конца стержня в момент прохождения через положение равновесия.

Дано:	**СИ:**
$l = 1$ м $\varphi = 60°$ $g = 9{,}81$ м/с^2	
v = ?	



Решение:

По закону сохранения энергии стержень в отклонённом от вертикали положении обладает потенциальной энергией (за нуль потенциальной энергии принимаем т. C_1), которая в момент прохождения положения равновесия (вертикальное) переходит в кинетическую энергию вращения:

$$E_п = E_к$$

или

$$mgh = \frac{J\omega^2}{2}. \tag{1}$$

Момент инерции стержня относительно его *конца*:

$$J = \frac{1}{3}ml^2. \qquad (2)$$

Угловая скорость связана с линейной скоростью незакрепленного конца стержня:

$$\omega = \frac{v}{l}. \qquad (3)$$

Определим изменение положения центра тяжести стержня:

$$h = AC_1 - AB = \frac{l}{2} - AB.$$

Из ΔABC:

$$AB = \frac{l}{2}\cos\varphi,$$

тогда высота:

$$h = \frac{l}{2} - \frac{l}{2}\cos\varphi = \frac{l}{2}(1-\cos\varphi). \qquad (4)$$

Подставим формулы (2), (3) и (4) в формулу (1):

$$mg\frac{l}{2}(1-\cos\varphi) = \frac{1}{3}ml^2\frac{v^2}{2l^2},$$

после преобразования:

$$gl(1-\cos\varphi) = \frac{v^2}{3},$$

откуда скорость:

$$v = \sqrt{3gl(1-\cos\varphi)}.$$

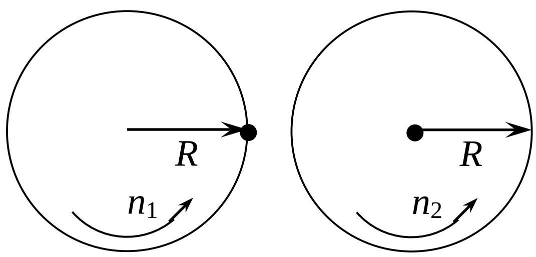
Подставляя числовые значения, получаем:

$$v = \sqrt{3\cdot 9{,}81\cdot 1\cdot\left(1-\cos 60^0\right)} \approx 3{,}84 \text{ м/с}.$$

Ответ: $v \approx 3{,}84$ м/с.

Задача 7. Платформа в виде диска радиусом R= 1 м вращается по инерции с частотой n_1 = 6 мин$^{-1}$. На краю платформы стоит человек, масса m которого равна 80 кг. С какой частотой n_2 будет вращаться платформа, если человек перейдёт в её центр? Момент инерции J платформы равен 120 кг·м^2. Момент инерции человека рассчитывать, как для материальной точки.

Дано:	**СИ:**
R = 1 м	
n_1 = 6 мин$^{-1}$	0,1 с$^{-1}$
m = 80 кг	
J = 120 кг м^2	
n_2 = ?	



Решение:
Применим к системе платформа – человек закон сохранения момента импульса:

$$L = L_{плат} + L_{чел} = const. \qquad (1)$$

Момент импульса системы вначале, когда человек стоит на краю платформы:

$$L_1 = \left(J + J_m\right)\omega_1.$$

Момент импульса системы после перехода человека в центр платформы:

$$L_2 = J\omega_2.$$

Учли, что момент инерции человека в центре платформы равен нулю, т.к. расстояние его от оси вращения равно нулю. Момент инерции человека как материальной точки на краю платформы:

$$J_m = mR^2.$$

Тогда формула (1) может быть записана в виде:

$$\left(J + mR^2\right)\omega_1 = J\omega_2.$$

Откуда угловая скорость платформы с человеком после перехода его в центр:

$$\omega_2 = \frac{J + mR^2}{J}\omega_1. \qquad (2)$$

Связь угловой скорости с частотой вращения:

$$\omega_1 = 2\pi n_1 \text{ и } \omega_2 = 2\pi n_2, \qquad (3)$$

или частота вращения:

$$n_2 = \frac{\omega_2}{2\pi}.$$

Подставляя в полученную формулу (2) и (3), получаем:

$$n_2 = \frac{\left(J + mR^2\right)\omega_1}{2\pi J}.$$

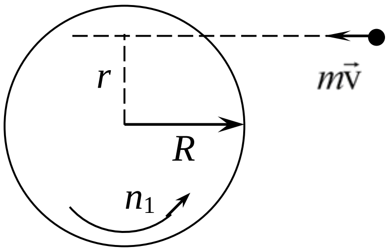
Подставим числовые значения:

$$n_2 = \frac{\left(120 + 80 \cdot 1^2\right) \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}1}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 120} \approx 0{,}167 \text{ с}^{-1} \approx 10 \text{ мин}^{-1}.$$

Ответ: n_2 = 10 мин$^{-1}$.

Задача 8. Человек стоит на скамье Жуковского и ловит рукой мяч массой m = 0,4 кг, летящий в горизонтальном направлении со скоростью v = 20 м/с. Траектория мяча проходит на расстоянии r = 0,8 м от вертикальной оси вращения скамьи. С какой угловой скоростью ω начинает вращаться скамья Жуковского с человеком, поймавшим мяч, если суммарный момент инерции J человека и скамьи равен 6 кг·м^2?

Дано:	**СИ:**
m = 0,4 кг	
v = 20 м/с	
r = 0,8 м	
J = 6 кг м^2	
ω = ?	



Решение:

Согласно закону сохранения момента импульса:

$$L_1 = L_2 . \tag{1}$$

Начальный момент импульса системы равен моменту импульса мяча относительно центра платформы:

$$L_1 = m\mathrm{v}r .$$

Момент импульса после того, как человек поймает мяч:

$$L_2 = \left(J + mr^2\right)\omega .$$

Тогда формула (1) запишется как:

$$m\mathrm{v}r = \left(J + mr^2\right)\omega .$$

Следовательно, расчетная формула для угловой скорости:

$$\omega = \frac{m\mathrm{v}r}{J + mr^2} .$$

Подставим числовые значения:

$$\omega = \frac{0{,}4 \cdot 20 \cdot 0{,}8}{6 + 0{,}4 \cdot 0{,}8^2} \approx 1{,}02 \text{ рад/с.}$$

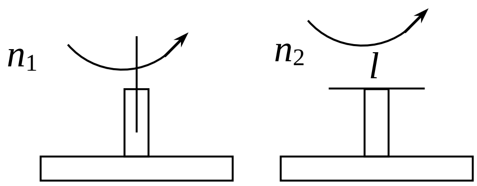
Ответ: ω = 1,02 рад/с.

Задача 9. На скамье Жуковского стоит человек и держит в руках стержень длиной l = 2,4 м и массой m = 8 кг, расположенный вертикально по оси вращения скамьи. Скамья с человеком вращается с частотой n_1 = 1 с$^{-1}$. С какой частотой будет вращаться скамья с человеком, если он повернёт стержень в горизонтальное положение? Суммарный момент инерции J человека и скамьи равен 6 кг·м^2?

Дано:
$m = 8$ кг
$n_1 = 1$ с$^{-1}$
$J = 6$ кг м^2
$l = 2{,}4$ м

$n_2 = ?$

СИ:



Решение:

Применим закон сохранения момента импульса:

$$L_1 = L_2; \tag{1}$$

Момент импульса системы при вертикальном расположении стержня:

$$L_1 = J\omega_1,$$

момент инерции стержня при расположении по оси вращения скамьи равен нулю, т.к. расстояние стержня от оси вращения равно нулю.

Момент импульса при горизонтальном расположении стержня:

$$L_2 = \left(J + J_{cm}\right)\omega_2 = \left(J + \frac{ml^2}{12}\right)\omega_2,$$

так как момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его центр тяжести, равен:

$$J_{cm} = \frac{ml^2}{12}.$$

Тогда формула (1) принимает вид:

$$J\omega_1 = \left(J + \frac{ml^2}{12}\right)\omega_2. \tag{2}$$

Выразим угловую скорость через частоту вращения:

$$\omega_1 = 2\pi n_1,$$

$$\omega_2 = 2\pi n_2.$$

и подставим в формулу (2):

$$2\pi n_1 J = 2\pi n_2\left(J + \frac{ml^2}{12}\right).$$

Получим расчетную формулу для частоты вращения после поворота стержня в горизонтальное положение:

$$n_2 = \frac{Jn_1}{J + \frac{ml^2}{12}} = \frac{12Jn_1}{12J + ml^2}.$$

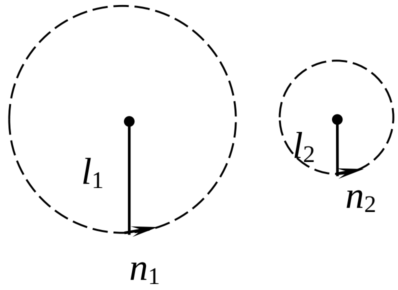
Подставим числовые значения:

$$n_2 = \frac{12 \cdot 6 \cdot 1}{12 \cdot 6 + 8 \cdot 2{,}4^2} \approx 0{,}61 \text{ с}^{-1}.$$

Ответ: $n_2 = 0{,}61$ с$^{-1}$.

Задача 10. Шарик массой $m = 100$ г, привязанный к концу нити длиной $l_1 = 1$ м, вращается, опираясь на горизонтальную плоскость, с частотой $n_1 = 1$ с$^{-1}$. Нить укорачивается, и шарик приближается к оси вращения до расстояния $l_2 = 0{,}5$ м. С какой частотой n_2 будет при этом вращаться шарик? Какую работу A совершит внешняя сила, укорачивая нить? Трением шарика о плоскость пренебречь.

Дано:	**СИ:**
$m = 100$ г	0,1 кг
$n_1 = 1$ с$^{-1}$	
$l_1 = 1$ м	
$l_2 = 0{,}5$ м	
$n_2 = ?$	
$A = ?$	



Решение:

1) Для определения частоты вращения применим закон сохранения момента импульса:

$$L = const. \qquad (1)$$

Момент импульса шарика до укорочения нити:

$$L_1 = J_1\omega_1,$$

после укорочения нити:

$$L_2 = J_2\omega_2.$$

Начальный момент инерции шарика:

$$J_1 = m_1 l_1^2.$$

конечный момент инерции:

$$J_2 = m_2 l_2^2.$$

Угловую скорость выразим через частоту вращения:

$$\omega_1 = 2\pi n_1, \qquad (2)$$

$$\omega_2 = 2\pi n_2. \qquad (3)$$

Приравняем, согласно формуле (1), моменты импульса шарика:

$$m l_1^2 2\pi n_1 = m l_2^2 2\pi n_2.$$

Выразим конечную частоту вращения:

$$n_2 = \frac{m l_1^2 2\pi n_1}{2\pi m l_2^2} = n_1\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2. \qquad (4)$$

Подставим числовые значения:

$$n_2 = 1\cdot\left(\frac{1}{0{,}5}\right)^2 = 4 \text{ с}^{-1}.$$

2) Работа внешней силы равна изменению кинетической энергии вращения шарика:

$$A = E_{к2} - E_{к1}.$$

Начальная кинетическая энергия вращения шарика

$$E_{к1} = \frac{m\mathrm{v}_1^2}{2},$$

конечная кинетическая энергия

$$E_{к2} = \frac{m\mathrm{v}_2^2}{2}.$$

Выразим линейную скорость движения шарика через угловую скорость:

$$\mathrm{v}_1 = \omega_1 l_1,$$
$$\mathrm{v}_2 = \omega_2 l_2.$$

Тогда работа внешней силы:

$$A = \frac{m\omega_2^2 l_2^2}{2} - \frac{m\omega_1^2 l_1^2}{2} = m\left(\frac{\omega_2^2 l_2^2}{2} - \frac{\omega_1^2 l_1^2}{2}\right),$$

с учётом формул (2) и (3):

$$A = 2\pi^2 m\left(n_2^2 l_2^2 - n_1^2 l_1^2\right).$$

Заменим конечную частоту выражением (5) и выполним преобразования:

$$A = 2\pi^2 m\left(n_1^2 \frac{l_1^4}{l_2^4} l_2^2 - n_1^2 l_1^2\right) = 2\pi^2 m n_1^2 \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 \left(l_1^2 - l_2^2\right).$$

Подставим числовые значения:

$$A = 2 \cdot 3{,}14^2 \cdot 0{,}1 \cdot 1^2 \cdot \left(\frac{1}{0{,}5}\right)^2 \cdot \left(1^2 - 0{,}5^2\right) \approx 5{,}92\ \text{Дж}.$$

Ответ: n_2 = 4 с$^{-1}$, A = 5,92 Дж.

5. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Материальной точке сообщили начальную скорость в горизонтальном направлении. Через 5 с вектор скорости точки составил угол 45° с вектором ускорения. Чему равен модуль скорости материальной точки в этот момент?

2. Мальчик бросил мяч горизонтально из окна, находящегося на высоте 20 м от поверхности земли. Сколько времени падал мяч? Найти модули начальной и конечной скоростей мяча, если он упал на расстоянии 6 м от основания дома.

3. Колесо радиусом 10 см вращается с постоянным угловым ускорением 3,14 рад/с^2. Найти для точек на ободе колеса к концу второй секунды после начала движения угловую скорость, линейную скорость, тангенциальное ускорение, нормальное ускорение, полное линейное ускорение.

4. Точка движется по окружности с постоянной по модулю скоростью 0,5 м/с. За 2 с вектор скорости изменяет свое направление на 30°. Чему равно центростремительное ускорение?

5. Найти частоту вращения барабана лебедки диаметром 16 см при подъеме груза со скоростью 40 см/с.

6. Угол поворота колеса радиусом 0,1 м изменяется по закону $\varphi = \pi t$. Найти угловую и линейную скорости, центростремительное ускорение точек обода колеса, период и частоту его вращения.

7. Даны кинематические уравнения движения точки по окружности: $S = 3t$ и $\varphi = 5t$, где S – путь, пройденный точкой; φ – угол поворота радиус-вектора точки относительно начального положения. На каком расстоянии от оси вращения находится указанная точка?

8. Два шара постоянной плотности радиусом 1 м каждый соприкасаются. Во сколько раз уменьшится сила гравитационного притяжения между шарами, если один из них сдвинуть на 1 м вдоль линии, соединяющей центры шаров?

9. На какой высоте ускорение свободного падения составляет 25% его значения на поверхности Земли?

10. Вокруг некоторой планеты по круговой орбите радиусом $2 \cdot 10^4$ км вращается спутник со скоростью 12 км/с. Определить ускорение свободного падения на поверхности планеты, если ее радиус равен $1 \cdot 10^4$ км.

11. Через блок перекинута невесомая нерастяжимая нить, к одному концу которой подвешен груз массой 30 г. Другой конец нити соединен с легкой пружиной, к концу которой прикреплен груз массой 50 г. При движении грузов длина пружины 17,5 см. Чему равна длина пружины в нерастянутом состоянии, если под действием силы 1 Н пружина растягивается на 20 см?

12. Тело массой 2 кг, подвешенное к нижнему концу вертикальной пружины жесткостью 400 Н/м, лежит на горизонтальной доске. Верхний конец пружины закреплен таким образом, что пружина еще не деформирована.

Доска начинает двигаться вниз с постоянным ускорением 2 м/с^2. Через какое время и при какой скорости доска оторвется от груза?

13. Тело находится в покое на наклонной плоскости, составляющей угол 30° с горизонтом. Найти отношение силы тяжести тела к силе трения, действующей на него в этот момент.

14. Камень, скользящий по горизонтальной поверхности, остановился, пройдя расстояние 20,4 м. Найти начальную скорость камня, если сила трения между камнем и поверхностью составляет 6% его силы тяжести.

15. Чтобы удержать брусок массой 2 кг на наклонной плоскости с углом наклона 30°, к нему приложили силу, направленную вдоль наклонной плоскости. Коэффициент трения между бруском и поверхностью плоскости 0,2. Чему равен модуль этой силы?

16. Тело скользит по наклонной плоскости с углом наклона 30°. Скорость тела в точке 1 составляет 0,4 м/с, а в точке 2, находящейся ниже точки 1, равна 8,6 м/с. Коэффициент трения между телом и поверхностью 0,1. Найти время движения тела из точки 1 в точку 2.

17. Брусок, лежащий на горизонтальной поверхности, прикреплен к динамометру легкой нерастяжимой нитью, перекинутой через невесомый блок. Если тянуть за динамометр вниз и он будет показывать 40 Н, то брусок переместится на 50 см в течение 0,5 с. Коэффициент трения бруска о поверхность 0,3. Найти массу бруска.

18. По склону горы, имеющей длину 50 м и высоту 10 м, на веревке спускают из состояния покоя санки массой 60 кг. Найти силу натяжения веревки, если санки у основания горы имеют скорость 5 м/с, а сила трения между санками и поверхностью горы составляет 10% силы тяжести санок.

19. По прямолинейному участку дороги автомобиль движется со скоростью $v = 86{,}4$ км/ч. Во сколько раз надо уменьшить скорость автомобиля, чтобы пройти закругление дороги радиусом $R = 64$ м? Коэффициент трения между колесами автомобиля и дорогой $\mu = 0{,}4$.

20. Грузик, подвешенный на нити, вращается с постоянной угловой скоростью в горизонтальной плоскости. Расстояние от точки подвеса до плоскости, в которой происходит вращение, равно h. Найти частоту вращения грузика.

21. Шарик совершает колебания на нити длиной 1 м, отклоняясь от вертикали на наибольший угол 30°. Определить модуль ускорения тела в верхней точке траектории.

22. С какой скоростью автомобиль должен проходить середину выпуклого моста радиусом 40 м, чтобы пассажир на мгновение оказался в состоянии невесомости?

23. На горизонтально расположенном диске, вращающемся с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси, проходящей через центр диска, находятся две шайбочки, для которых отношение расстояний до оси вращения $r_1/r_2 = 2$. Чему должно быть равно отношение коэффициентов трения шайбочек о диск, чтобы они не скользили?

24. Чему равна первая космическая скорость для Венеры, если масса планеты $4{,}9 \cdot 10^{24}$ кг, а радиус 6100 км?

25. Во сколько раз первая космическая скорость для Земли больше линейной скорости движения спутника по круговой орбите на высоте, равной восьми радиусам Земли?

26. Тело массой m равномерно движется по окружности со скоростью v. Найти изменение импульса тела при повороте радиуса на 60°, 90°, 180° и 360°.

27. Шарик массой m, летящий со скоростью, ударяется о стенку под углом α к ней и отскакивает под тем же углом без потери скорости. Определить направление и модуль вектора изменения импульса шарика за время удара.

28. Самолет массой 70 т при разгоне набирает скорость 300 км/ч. Чему равен импульс силы, действующей на самолет?

29. Конькобежец массой 70 кг, стоя на коньках на льду, бросает в горизонтальном направлении камень массой 3 кг со скоростью 8 м/с. Найти, на какое расстояние откатится при этом конькобежец, если коэффициент трения 0,02.

30. Граната массой 0,5 кг брошена со скоростью 40 м/с под углом 60° к горизонту. В верхней точке траектории она разрывается на два осколка, и после разрыва осколок массой 0,3 кг движется вертикально вниз со скоростью 50 м/с. Определить модуль и направление скорости меньшего осколка гранаты.

31. Брусок массой m_1 движется по гладкой горизонтальной плоскости со скоростью. Пуля массой m_2, летевшая в горизонтальном направлении со скоростью, застревает в бруске. Найти модуль и направление скорости бруска с пулей, если она двигалась под углом α к направлению движения бруска.

32. Ящик массой 10 кг перемещают равномерно по горизонтальной поверхности на расстояние 50 м. Коэффициент трения 0,3. Веревка, с помощью которой тянут ящик, составляет с горизонтальной поверхностью угол 30°. Какая работа затрачивается на перемещение ящика?

33. Самолет для взлета должен иметь скорость 25 м/с. Длина его пробега перед взлетом 100 м. Какова должна быть мощность моторов при взлете, если масса самолета 1 т, коэффициент сопротивления 0,02?

34. На горизонтальном участке пути длиной 2 км скорость поезда увеличилась с 54 до 72 км/ч. Определить работу и среднюю мощность, развиваемую паровозом. Масса поезда 800 т, коэффициент трения 0,05.

35. Моторы электропоезда потребляют мощность 900 кВт. Скорость поезда 54 км/ч, КПД моторов 80%. Определить силу тяги моторов.

36. Из шахты глубиной 200 м равномерно поднимают груз массой 500 кг на канате, масса каждого метра которого 1,5 кг. Какая при этом совершается работа?

37. Тело массой 5 кг движется под действием силы, равной 30 Н, направленной под углом 30° к горизонту. Определить скорость тела через 10 с от начала движения и работу против силы трения, если коэффициент трения скольжения равен 0,2.

38. Пружина жесткостью 1 кН/м была сжата на 4 см. Какую работу надо совершить, чтобы увеличить сжатие до 18 см?

39. Во сколько раз возрастет высота подъема шарика, брошенного вертикально вверх, если его начальную скорость увеличить в три раза?

40. Материальная точка падает с высоты h без начальной скорости. Чему равна ее скорость, когда кинетическая энергия точки станет равной ее потенциальной энергии?

41. Сжатие пружины игрушечного пистолета равно x. На какую высоту поднимется пулька массой m при вертикальном выстреле, если жесткость пружины k?

42. Определить, с какой высоты прыгает акробат массой $m = 60$ кг на растянутую сетку, если средняя сила, с которой он давит на сетку, $F = 6{,}6$ кН, а сетка при этом прогибается на 1 м.

43. Пуля массой 10 г, летевшая со скоростью 400 м/с, попала в дерево толщиной 10 см. Пробив дерево, пуля вылетела со скоростью 200 м/с. Определить силу сопротивления, действующую на пулю.

44. Найти коэффициент трения колес автомобиля о дорогу, если при скорости автомобиля 10 м/с тормозной путь равен 8 м.

45. Шарик массой 20 г, падая с высоты 1 м на стальную плиту, отскакивает от нее на высоту 81 см. Найти импульс силы, действовавшей на плиту, и количество теплоты, выделившееся при ударе.

46. Камень массой 200 г был брошен с горизонтальной поверхности под углом к горизонту и через 1,2 с упал на нее обратно на расстоянии 5 м от места бросания. Найти работу бросания.

47. В брусок, покоящийся на гладкой горизонтальной поверхности, попадает пуля, летящая горизонтально со скоростью 500 м/с. Скорость пули, вылетевшей из бруска, вдвое меньше начальной. Определить кинетическую энергию бруска после вылета пули. Массы пули и бруска равны соответственно 0,01 и 0,5 кг.

48. По касательной к шкиву маховика в виде диска диаметром 75 см и массой 40 кг приложена сила 1 кН. Определить угловое ускорение и частоту вращения маховика через время 10 с после начала действия силы, если радиус шкива равен 12 см. Силой трения пренебречь.

49. На обод маховика диаметром 60 см намотан шнур, к концу которого привязан груз массой 2 кг. Определить момент инерции маховика, если он, вращаясь равноускоренно под действием силы тяжести груза, за время 3 с приобрел угловую скорость 9 рад/с.

50. Нить с привязанными к ее концам грузами массами 50 г и 60 г перекинута через блок диаметром 4 см. Определить момент инерции блока, если под действием силы тяжести грузов он получил угловое ускорение 1,5 рад/с^2. Трением и проскальзыванием нити по блоку пренебречь.

51. Стержень вращается вокруг оси, проходящей через его середину, согласно уравнению $\varphi = At + Bt^3$, где A=2 рад/с, B=0,2 рад/с. Определить вращающий момент, действующий на стержень через время 2 с после начала вращения, если момент инерции стержня 0,048 кг·м^2.

52. Определить момент силы, который необходимо приложить к блоку, вращающемуся с частотой 12 с$^{-1}$, чтобы он остановился в течение времени 8 с. Диаметр блока 30 см. Массу блока 6 кг считать равномерно распределенной по ободу.

53. Блок, имеющий форму диска массой 0,4 кг, вращается под действием силы натяжения нити, к концам которой подвешены грузы массами 0,3 кг и 0,7 кг. Определить силы натяжения нити по обе стороны блока.

54. К краю стола прикреплен блок. Через блок перекинута невесомая и нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены грузы. Один груз движется по поверхности стола, а другой – вдоль вертикали вниз. Определить коэффициент трения между поверхностями груза и стола, если массы каждого груза и масса блока одинаковы и грузы движутся с ускорением 5,6 м/с^2. Проскальзыванием нити по блоку и силой трения, действующей на блок, пренебречь.

55. К концам легкой и нерастяжимой нити, перекинутой через блок, подвешены грузы массами 0,2 кг и 0,3 кг. Во сколько раз отличаются силы, действующие на нить по обе стороны от блока, если масса блока 0,4 кг, а его ось движется вертикально вверх с ускорением a =2 м/с^2? Силами трения и проскальзывания нити по блоку пренебречь.

56. На скамье Жуковского стоит человек и держит в руке за ось велосипедное колесо, вращающееся вокруг своей оси с угловой скоростью 25 рад/с. Ось колеса расположена вертикально и совпадает с осью скамьи Жуковского. С какой скоростью станет вращаться скамья, если повернуть колесо вокруг горизонтальной оси на угол α = 90°? Момент инерции человека и скамьи равен 2,5 кг·м^2, момент инерции колеса J = 0,5 кг·м^2.

57. Однородный стержень длиной 1,0 м может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. В другой конец абсолютно неупругое ударяет пуля массой 7 г, летящая перпендикулярно стержню и его оси. Определить массу стержня, если в результате попадания пули он отклонится на угол α = 60°. Принять скорость пули 360 м/с.

58. На краю платформы в виде диска, вращающейся по инерции вокруг вертикальной оси с частотой 8 мин$^{-1}$, стоит человек массой m_1=70 кг. Когда человек перешел в центр платформы, ее частота вращения стала равна 10 мин$^{-1}$. Определить массу платформы. Момент инерции человека рассчитывать, как для материальной точки.

59. На краю неподвижной скамьи Жуковского диаметром 0,8 м и массой 6 кг стоит человек массой 60 кг. С какой угловой скоростью начнет вращаться скамья, если человек поймает летящий на него мяч массой 0,5 кг? Траектория мяча горизонтальна и проходит на расстоянии 0,4 м от оси скамьи. Скорость мяча 5 м/с.

60. Горизонтальная платформа массой 150 кг вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, с частотой 8 мин$^{-1}$. Человек массой 70 кг стоит при этом на краю платформы. С какой угловой скоростью начнет вращаться платформа, если человек перейдет от края платформы к ее центру? Считать платформу круглым, однородным диском, а человека – материальной точкой.

Учебное издание

Дёмина Маргарита Юрьевна
Циовкин Юрий Юрьевич
Яшкевич Екатерина Александровна

ФИЗИКА
ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

Редактор и корректор Е. О. Тарновская
Техн. редактор Е. О. Тарновская

Учебное электронное издание сетевого распространения

Системные требования:
электронное устройство с программным обеспечением
для воспроизведения файлов формата PDF

Режим доступа: http://publish.sutd.ru/tp_get_file.php?id=202016, по паролю.
- Загл. с экрана.

Дата подписания к использованию 22.02.2022 г. Изд. № 5282/21

Высшая школа технологии и энергетики СПбГУПТД
198095, СПб., ул. Ивана Черных, 4.