МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ

УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»

ВЫСШАЯ ШКОЛА ТЕХНОЛОГИИ И ЭНЕРГЕТИКИ

Кафедра физики ВШТЭ

Электродинамика

Методические указания

Санкт-Петербург

2020

УДК 531 (07)

Электродинамика: методические указания / сост. Е.А. Яшкевич, Ю.Ю. Циовкин; ВШТЭ СПбГУПТД — СПб., 2020. — 45с.

Методические указания содержат теорию и задачи по курсу «Электродинамика». Предназначены для студентов очной и заочной форм обучения по направлению 13.00.00. «Электро- и теплоэнергетика».

Рецензент: профессор кафедры физики ВШТЭ СПбГУПТД, канд. физ.-мат. наук М.Ю. Демина.

Подготовлены и рекомендованы к печати кафедрой физики ВШТЭ СПбГУПТД (протокол № 2 от 19.10.2020 г.).

Утверждены к изданию методической комиссией института энергетики и автоматизации ВШТЭ СПбГУПТД (протокол № 2 от 29.10.2020 г.).

Содержание

Введение

Из курса общей физики хорошо известно, что электромагнитное поле — это особая форма существования материи, посредством которой осуществляется взаимодействие между заряженными частицами, токами или телами. Законы классической электродинамики — это законы Ампера и Фарадея, закон Кулона, принцип суперпозиции полей вы достаточно подробно рассматривали. Обобщением этих законов является система полевых уравнений Максвелла, которые в совокупности с материальными уравнениями и законами сохранения энергии и заряда могут быть решены в каждом конкретном случае, что позволяет определить значения основных характеристик электромагнитного поля — вектор напряженности электрического поля и вектор магнитной индукции поля в зависимости от пространственного распределения зарядов и токов (в том числе и движущихся).

Экспериментальные исследования электромагнитных взаимодействий, показали, что с одной стороны, законы классической электродинамики очень хорошо описывают поля и процессы, протекающие в макромасштабах, но с другой стороны, оказались неприменимы для процессов, протекающих на малых пространственно-временных интервалах. Развитие электродинамики микромасшабов привело к формулировке квантовой электродинамики и квантовой теории поля. Электродинамика макромасштабов получила название классической.

Три кита электродинамики

Классическая электродинамика базируется на трех фундаментальных фактах.

Во-первых — это закон сохранения заряда, который гласит, что суммарный заряд замкнутой системы Q остается неизменным в течение времени. Иными словами,

$$Q = \sum_i q_i = const \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = 0. \qquad (1)$$

Так как носителями зарядов являются элементарные частицы — электроны, мюоны, протоны, «размеры» которых порядка 10см и менее, во многих практически важных случаях без ограничения общности можно считать, что элементарные заряды — точечные объекты.

Если заряд непрерывно распределен по конечному объему, то для описания системы удобнее пользоваться понятием объемной плотности заряда:

$$\rho(r) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV}, \qquad (2)$$

Здесь dQ — заряд внутри элемента объема dV. Таким образом $\rho(r)$ в общем случае является функцией координат. Практически соотношение (2) используется в том смысле, что внутри бесконечно малого объема dv,расположенного в точке r, заключен бесконечно малый заряд $dQ = \rho(r)dv$.

$$Q = \int_V \rho(r). \qquad (3)$$

Интегрирование ведется по всему объему, занимаемому телом, а dV следует понимать как $dV = dxdydz$.

Для точечного заряда распределение плотности выражается через $\delta-$ функцию Дирака[1]

$$\rho(r) = q\delta(r - r'), \qquad (4)$$

[1] См дополнение

при этом положение точечного заряда q задается вектором r'. Данное тождество записано в векторной форме, хотя и не содержит значков вектора. Это делается для удобства записи, но при этом понимается, что

$$\delta(r-r') = \delta(r_x - r'_x)\delta(r_y - r'_y)\delta(r_z - r'_z). \quad (5)$$

Для системы, содержащей N точечных зарядов, объемное распределениеплотности имеет вид:

$$\rho(r) = \sum_{i=1}^{N} qi\,\delta(r - r_{qi}), \quad (6)$$

Здесь $\delta\ (r - r_{qi})$ — дельта — функция Дирака (см. Приложение А).

Аналогично, для зарядов, расположенных на поверхности того или иного проводника, можно ввести понятие поверхностной плотности заряда.

$$\rho s(r) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \frac{dQ}{dS}. \quad (7)$$

Однако здесь необходимо учитывать, что толщина рассматриваемой поверхности должна быть исчезающе малой. Более строго, если S — площадь рассматриваемой поверхности, а d — толщина стенки проводника, то для определения поверхностной плотности необходимо чтобы $d \langle\langle \sqrt{S}$. Например, поверхностную плотность зарядов оправданно ввести для тонкостенного цилиндрического проводника большого радиуса, а для того же толстостенного цилиндра понятие поверхностной плотности теряет смысл.

Для очень тонких и длинных проводников вводится определение линейной плотности заряда:

$$\rho L(r) = \lim_{\Delta L \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta L} = \frac{dQ}{dL}. \quad (8)$$

Однако, для математического описания свойств электромагнитного поля удобно использовать хорошо развитый аппарат дифференциального и интегрального исчислений, в рамках которого используются непрерывно меняющиеся величины. В связи с этим и проводится обобщение понятия точечного заряда на случай его непрерывного распределения в пространстве.

Устарела или нет классическая электродинамика?

С конца 50-х годов прошлого века стала интенсивно развиваться квантовая электродинамика, основанная на представлениях о квантовании взаимодействия. Квантовая электродинамика на сегодняшний день более чем современное отдельное направление физики, интенсивно развивающееся и наиболее полно описывающее наблюдаемые явления как в микромасштабах, так и макромасштабах.

Однако, классическая электродинамика, или электродинамика макромасшабов, имеющая достаточно жесткое пространственно-временное ограничение, на сегодняшний день вовсе не утратила своего значения и является основанием огромного числа разделов активно развивающихся прикладных направлений — электротехники, радиотехники, электроники (кроме квантовой), классической оптики и т.п. Именно на основе решений уравнений классической электродинамики рассчитываются антенны и радиопередатчики, линии электропередач, радиотелескопы, проектируются самые разнообразные приборы и устройства, решается широкий круг прикладных и теоретических задач многих других разделов физики.

Исторически, электродинамика стала объединением теории электрических явлений (взаимодействие покоящихся зарядов) и теории магнитных явлений (взаимодействие постоянных токов). Последующие исследования показали, что электрические и магнитные явления тесно взаимосвязаны и проявляются как частные случаи более общего, так называемого электромагнитного взаимодействия, или электромагнитного поля. Электромагнитное поле может распространяться в пространстве в виде электромагнитных волн, перенося энергию поля. Среды, в которых могут распространяться электромагнитные волны, могут быть весьма различными. Среда может быть проводящей или плохо проводящей. Средой может выступать воздух или жидкость. Электромагнитные волны могут распространяться в вакууме. Среда может рассеивать электромагнитные волны, а может и не рассеивать их. Разнообразие сред огромно. В зависимости от свойств среды может меняться скорость распространения электромагнитах волн, волны могут отклоняться средой или испытывать двойное лучепреломление. Все эти свойства сред описываются двумя тензорами — тензором диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и тензором магнитной проницаемости $\mu_{\alpha\beta}$. Вообще говоря, эти тензоры могут быть комплексными. Собственно, именно эти тензора и задают те свойства сред, которые самым непосредственным образом влияют на характер распространения электромагнитных волн.

1. Прелюдия о векторах

Теория, мой друг, суха, но зеленеет жизни древо.

И.В.Гете

Начиная курс электродинамики необходимо развеять несколько мифов, легенд и сказочных представлений относительно объектов, с которыми придется познакомиться в физике. И прежде всего, это объекты — математические понятия современного языка физики и, в частности, электродинамики.

Язык физики насыщен векторными величинами. Сила, импульс, моменты силы и моменты импульса, напряженность электрического или магнитного поля, скорость, ускорение — вот далеко не полный их перечень. Вес и значимость каждого слова определяется его содержанием. И в первую очередь необходимо разобраться с одним из ключевых понятий — вектором.

Казалось бы, что может быть проще? Вектор он и есть вектор. Зачем все это? К сожалению, это оказывается совсем не просто. В результате подмены математического, а точнее — аксиоматического в существенном определения вектора его вербальным псевдо-определением, а скорее, замещением, становится практически полное непонимание подавляющим большинством студентов целых разделов изучаемых дисциплин. И не только физики.

Первое, то узнают школьники в 8-9-х классах на уроках математики и физики, что вектор — это просто “направленный отрезок” или “стрелочка”! Это определение благополучно кочует из одного учебника в другой. Но оно просто не соответствует действительности и формирует абсолютно уродливую картину. Более того, определение вектора как “направленного отрезка” в корне неверно, и такого понятия, несмотря на “общепринятую точку зрения” в математике не существует вообще.

Естественно, что работать с “направленной палочкой” как математическим объектом, категорически нельзя и абсолютно бессмысленно.

Математически точное определение (его вы сможете найти в любом учебнике) формулируется следующим образом.

Пусть Λ- произвольное непустое множество, элементы которого мы будем называть векторами, K — поле, элементы которого мы будем называть скалярами.

Пусть на множестве Λ определена внутренняя бинарная алгебраическая операция, которую мы будем обозначать знаком “+” и называть **сложением** векторов. Пусть также на множестве Λ- определена внешняя бинарная алгебраическая операция, которую мы будем называть умножением вектора на скаляр и обозначать знаком умножения. Другими словами, определены два отображения:

$$\Lambda \times \Lambda \to \Lambda : \quad \forall x, y \in \Lambda \quad (x, y) \to x + y \in \Lambda ;$$

$$\Lambda \times K \to \Lambda : \quad \forall x \in \Lambda \vee \mu \in K \quad (x, \mu) \to \mu x \in \Lambda .$$

Множество вместе с этими двумя алгебраическими операциями называется *векторным* пространством над полем K, если выполняются следующие аксиомы:

1. Сложение ассоциативно, т.е.

$$\forall x, y, z \in \Lambda \quad x + (y + z) = (x + y) + z \in \Lambda .$$

2. Существует нулевой вектор, т.е.

$$\exists 0 \in \Lambda : \forall x \in \Lambda \quad x + 0 = x \in \Lambda .$$

3. Для любого вектора существует противоположный ему:

$$\forall x \in \Lambda \quad \exists y \in \Lambda : x + y = 0 \in \Lambda ,$$

4.

$$\forall x, y \in \Lambda : x + y = y + x \in \Lambda .$$

5. Умножение вектора на скаляр подчиняется закону ассоциативности, т.е.

$$\forall x \in \Lambda \quad \forall \alpha, \beta \in K : (\alpha\beta)x = \alpha(\alpha\beta) \in \Lambda \vee (\alpha\beta) \in K .$$

6.

$$\exists 1 \in K \quad \forall x \in \Lambda \quad 1x = x1 \in \Lambda .$$

7. Умножение вектора на скаляр подчиняется закону ассоциативности, т.е.

$$\forall x, y \in \Lambda \quad \forall \alpha \in K : \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y \in \Lambda .$$

8. Умножение вектора на скаляр дистрибутивно относительно сложения скаляров:

$$\forall x \in \Lambda \quad \forall \alpha, \beta \in K : (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \in \Lambda \vee (\alpha + \beta) \in K .$$

Таким образом, векторы как объекты, определены двумя характеристическими операциями и заданы на поле чисел К!, а не “палочек”, “стрелочек”, “направленных отрезков”, “точек плоскости”, “сторон треугольника”, “сторон параллелограмма” и других экзотических объектов.

Аксиоматика векторного множества полностью исчерпывается 8-ю предложениями. Но ни одно из этих предложений, как и следовало ожидать, не содержит терминов или обозначений, даже близко похожих на “палочки” и “стрелочки”.

Рисуя руками стрелочку, мы только *обозначаем* объект из множества векторов, руководствуясь соображениями удобства или наглядности, *но работаем всегда (часто интуитивно, но абсолютно правильно!) с координатами-числами*, т.е. представителями именно того класса математических объектов, над которым и определено самое множество векторов.

Во многих учебниках, к сожалению, принципиальные вопросы определения векторного множества или векторного пространства либо просто замалчиваются, либо “прячутся под ковер”. В результате, в “сухом остатке” у вчерашних школьников остается определение вектора как загадочной “направленной палочки” или “направленного отрезка”. Аксиоматические свойства же векторов остаются загадкой, и, за исключением правила параллелограмма для сложения векторов, из школьной физики и математики не остается ничего.

Здесь принципиально понимать следующие моменты.

На множестве векторов определен нуль-вектор, он введен аксиомой 4.

Но не существует единичный вектор в определенном аксиоматикой 1-8 множестве!

Очевидно, что нуль-вектор не есть точка. И это следует из аксиоматики множества. Понятие же “единичного вектора” принципиально невозможно вести в терминах аксиоматики векторного множества.

Понятия “длина вектора”, “единичный вектор” могут быть введены тогда и только тогда, кода мы определим дополнительно метрику (или способ измерения) на множестве векторов.

Продемонстрируем некоторые типичные, но абсурдные умозаключения большинства студентов и школьников, использующих в качестве определения вектора набор букв про “направленный отрезок”.

Если вектор — это направленный отрезок, то он имеет длину. Если он (вектор) имеет длину (как отрезок) естественны дальнейшие сопоставления и сравнения векторов-отрезков — один отрезок больше (или меньше) другого отрезка. Следуя логике и используя правильное определение отрезка, школьники заключают, что первый вектор больше второго (или наоборот)! Эти, абсолютно правильные (для отрезков) рассуждения, автоматически транслированные на вектора (вектора же были введены как направленные отрезки!) абсолютно абсурдны с точки зрения математики и физики.

Использование понятий “палочек” и “стрелочек” вместо определения вектора в дальнейшем приводит к колоссальными проблемами понимания скалярного и векторного произведений при строгом их определении, так как ни одно их этих строгих, научных и общепринятых определений не укладываются в устоявшуюся у школьников и студентов ассоциативно — вербальную схему “стрелочек” и “палочек”.

Аналогично, из определения типа “вектор — это стрелочка” категорически невозможно определить, что такое “размер” стрелочки и какие отношения и почему существуют между “длиной стрелочки” и “длиной вектора”. Но именно эти понятия лежат в основе многих ключевых определений, моделей и представлений, используемых в физике.

Что же делать в таком случае? Понять точное определение векторов в 7-9 классе школьники явно не смогут. Понятие же “стрелочки” — не соответствует определению и никак с ним не соотносится. Кажется, это замкнутый круг. Но существует выход, если ввести векторы как объекты, над которыми заданы две операции — сложения и умножения на число, т.е. воспользоваться имеющимся определением, не придумывая никаких “палочек” и “стрелочек”, но прибегая к простейшему опыту и всем знакомым наблюдениям.

К сожалению, из учебных программ полностью исчезли и другие вопросы, связанные с векторами — это определения полярных и аксиальных векторов. Следом из обсуждения пропали все тонкие моменты, связанные истинными векторами и псевдовекторами.

Вспомним, что в физике имеется масса вопросов, связанных с введением правил правой и левой руки. В самом деле, когда мы изучали векторный анализ, то узнали о правиле правой руки, которым необходимо пользоваться, чтобы определить правильно момент количества движения или момент силы, или магнитное поле (и т.д.) с указанием направления их действия.

Например, сила, действующая на заряд в магнитном поле, $\vec{F} = q\left[\vec{\upsilon} \times \vec{B}\right]$. Но представьте себе такое положение: пусть мы знаем все три вектора $\vec{F},\ \vec{\upsilon}\ \ и\ \ \vec{B}.$ Но как ее из этого узнать, где у нас правая сторона, а где левая? Если же вернуться назад и посмотреть, откуда произошли векторы, то увидим, что правило правой руки — это просто соглашение, своего рода трюк.

В самом начале такие величины, как угловая скорость, и момент количества движения, и другие, подобные им, в действительности вообще никогда не были настоящими векторами! Все они каким-то образом связаны с определенными плоскостями, например, плоскостью вращения. И только благодаря тому, что наше пространство трехмерно, эти величины можно связать с направлением, перпендикулярным данной плоскости (вращения). Вектор угловой скорости или вектор момента сил рисуется не из центра масс тела, но вдоль оси вращения Он «приложен» к оси, поэтому такие векторы и получили свое название аксиальные векторы[2].

Представление некоторого произведения вектором так же чисто условно.

Гораздо естественнее было бы изображать его площадкой, например, параллелограммом, построенным на произвольных векторах $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$, имеющим определенное направление обхода в зависимости от порядка сомножителей. Однако для целей векторного анализа гораздо удобнее оперировать с вектором, представляющим эту площадку и являющимся как бы ее дополнением в нашем трехмерном пространстве.

Векторы, связанные с направлением некоторого обхода, называются аксиальными, осевыми, или псевдовекторами. К их числу принадлежит, помимо вектора, представляющего площадку, и помимо векторного произведения двух обыкновенных или, как их обычно называют, полярных векторов, еще, например, угловая скорость вращения твердого тела, которую можно представлять вектором, направленным по оси вращения в ту или другую сторону в зависимости от направления обхода вокруг оси вращения — по часовой стрелке или против. Аксиальными векторами являются вектора моментов, углового ускорения, некоторых сил. С другой стороны, существует и множество истинных векторов. Полярными или истинными векторами являются, например, перемещение, скорость, ускорение, сила, импульс и многие другие. Полярный вектор всегда имеет *точку приложения (полюс)*, а аксиальный вектор — нет.

Природу того или другого вектора можно узнать по следующему правилу. Отразим явление в плоскости, перпендикулярной к рассматриваемому вектору. Если при этом направление, в котором протекает явление, изменится на обратное, то исходный вектор есть

[2] Ось - по латыни axis, отсюда и название аксиальный, или осевой вектор

полярный вектор; если же направление явления останется прежним, то мы имеем дело с аксиальным вектором.

Например, отражая векторное произведение двух полярных векторов и плоскости составляющих векторов, мы последние, очевидно, не изменим, явление не изменится, следовательно, векторное произведение двух полярных векторов есть вектор аксиальный.

В качестве другого примера рассмотрим вращение твердого тела вокруг выбранной оси. Отражая явление вращения в плоскости, перпендикулярной оси вращения, увидим, что вращение будет происходить опять в ту же самую сторону, поэтому вектор угловой скорости мы должны считать вектором аксиальным. Напротив, отражая вектор скорости точки в перпендикулярной к нему плоскости, мы увидим, что точка будет двигаться в обратную сторону, следовательно, вектор скорости есть полярный вектор.

Заметим, что при зеркальном отображении и при инверсии левая система координат переходит в правую и обратно, так что пока мы остаемся и области одних левых или одних правых систем координат, никакого различия между полярными и аксиальными векторами нет. Когда же мы переходим от левой системы к правой или обратно, то аксиальный вектор изменяет свое направление на прямо противоположное, в то время как полярный вектор остается без изменения. Это и вызывает то различие в поведении составляющих вектора, которое было выше указало.

Ее раз отметим, что различие между аксиальными, а полярными векторами состоит в том, что, они при операции зеркального отображения преобразуются по- разному. Это приводит к тому, что складывать аксиальные и полярные векторы *НЕЛЬЗЯ* из-за нарушения равнозначности при отображении. Действительно, хорошо известно, что складывать, вычитать и сравнивать можно только величины одинаковой размерности.

Именно поэтому аксиальные и полярные вектора невозможно ни сложить, ни сравнить, так как при переходе от левой системы координат к правой составляющие некоторых членов суммы или равенства изменили бы свой знак на обратный, в то время как другие члены сохранили бы его, при этом значение суммы изменилось бы, а равенство нарушилось.

Для понимания различий между правой и левой тройкой векторов Ричард Фейман приложил провести простую мысленную игру. Предположим, что кто-то, решив подшутить над физиками, пробрался во все лаборатории и всюду заменил слово «правое» на «левое». И в результате там, где было написано правило правой руки, мы вынуждены были бы пользоваться «правилом левой руки». А там, где было написано «правило левой руки», мы вынуждены были бы пользоваться «правилом правой руки». Заметили бы проделки этого шутника физики?

Нет, физики бы просто не заметили этого, ибо ни к какому изменению в физических законах это бы не привело, разумеется, если физические законы симметричны.

Если физический закон симметрии относительно отражения правилен, то все уравнения должны быть устроены так, чтобы при изменении знака каждого аксиального вектора и каждого векторного произведения (что соответствует отражению или замене правой тройки векторов на левую и наоборот) ничего не произошло.

Например, когда мы пишем формулу для момента количества движения $\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]$, то здесь все в порядке, потому что при переходе в левую систему координат мы изменяем знак L, а знаки p и r не изменяется. Кроме того, изменится и векторное произведение, поскольку мы должны правило правой руки заменить правилом левой руки. Таким образом, физический закон выглядит по-разному в левой и правой системах координат, в природе же такого различия не существует. Левая система ничем не хуже правой.

Другой пример. Известно, что сила, действующая на заряд в магнитном поле, равна $\vec{F} = q[\vec{\upsilon} \times \vec{B}]$. Попробуем здесь изменить правую тройку векторов на левую. Как известно, $\vec{F}$ *и* $\vec{\upsilon}$ — полярные или истинные векторы. Тогда изменение знака из-за наличия векторного произведения должно компенсироваться только изменением знака $\vec{B}$, а это означает, что $\vec{B}$ должен быть аксиальным вектором. Другими словами, при таком отражении $\vec{B}$ должен переходить в $-\vec{B}$. Таким образом, если мы изменяем левые координаты на правые, то одновременно нужно северный полюс магнита изменить на южный. Но это не принципиально. Вспомним при этом, что определение южного и северного полюсов — не более чем простая условность.

Рассмотрим на простом примере, как же это все получается. Пусть у нас имеются два магнита, похожих на изображенные на рисунке. Один из магнитов выглядит в точности так, как зеркальное отражение другого, т. е. витки его накручены в другую сторону, и все, что происходит внутри катушки, должно быть в точности обращено в другую сторону; ток течет, как это показано на рисунке. Теперь из законов магнетизма (которые вы хотя еще и не знаете официально, но, по-видимому, помните из школьного курса) получается, что магнитное поле направлено так, как это показано на рисунке. Там, где у первого магнита южный полюс, у другого магнита будет северный, ибо у него ток течет в другую сторону, а магнитное поле перевернуто. Таким образом, выходит, что при переходе от правой системы к левой мы действительно должны заменить северный полюс магнита на южный!

При записи какого-либо векторного равенства необходимо проверять, не изменяется ли оно при переходе от правой системы координат к левой.

Поскольку правая система координат переходит в левую при инверсии, а закон преобразования векторов при инверсии выглядит особенно просто,

пол → - пол(знак изменяется), акс → акс (знак не изменяется).

Например, исследуем равенство

$$\vec{\upsilon} = \left[\vec{\omega} \times \vec{r}\right]$$

для скорости движения материальной точки, радиус-вектор которой вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Поскольку $\vec{\upsilon}$ — полярный вектор (производная от полярного вектора $\vec{r}$ по времени), то при инверсии левая часть равенства меняет знак. Чтобы равенство осталось инвариантным по отношению к инверсии, необходимо, чтобы и правая часть $\vec{\upsilon} = \left[\vec{\omega} \times \vec{r}\right]$ изменила знак при инверсии. Угловая скорость при инверсии не изменяет свой знак (это аксиальный вектор), а радиус-вектор $\vec{r}$ — изменяет (это полярный вектор). Поэтому

$$\left[\vec{\omega} \times \vec{r}\right] \rightarrow \left[\vec{\omega} \times \vec{r}\right] = -\left[\vec{\omega} \times \vec{r}\right],$$

то есть и правая часть нашего равенства изменила знак при инверсии, а, следовательно, это тоже полярный вектор. Таким образом, после инверсии системы координат равенство осталось прежним и мы, следовательно, имеем равенство двух полярных векторов.

Из этого рассуждения можно легко прийти к выводу, что векторное произведение двух полярных векторов есть вектор аксиальный,

[**пол**$_1$ × **пол**$_2$] = **акс**,

поскольку при инверсии левая часть знака не изменяет:

[(−**пол**$_1$) × (−**пол**$_2$)] = [**пол**$_1$× **пол**$_2$].

Векторное произведение двух аксиальных векторов также является аксиальным вектором.

А что будет, если скалярно перемножить между собой полярный и аксиальный векторы?

(**пол · акс**) = псевдоскаляр.

Полученная величина, очевидно, инвариантна к любым пространственным поворотам системы координат, то есть можно сказать, что она является скалярной. Однако это не совсем обычный скаляр, так как он изменяет знак при инверсии системы координат. Такую величину называют псевдоскаляром. Оказывается, что и скаляры, подобно векторам, строго говоря, надо делить на две группы: скаляры первого рода, или просто скаляры, и скаляры второго рода или псевдоскаляры. Все величины скалярного характера, получающиеся в результате измерения какого-либо физического объекта, например, масса, температура и т. д. являются скалярами первого рода; напротив, некоторые из выражений, получающихся в результате математических операций над векторами, могут изменять свой знак на обратный при переходе от левой системы к правой или от правой системы к левой. Такие величины называются псевдоскалярами. Так, например, скалярное произведение полярного и аксиального векторов является псевдоскаляром. Если бы, например, существовал элементарный магнитный заряд, то он был бы псевдоскалярной величиной. Таким образом, скалярные величины бывают двух типов: истинный скаляр, инвариантный к любым преобразованиям системы координат (не только к вращениям, но и к инверсии), и псевдоскаляр, инвариантный к вращениям и меняющий знак, когда правая система переходит в левую (и наоборот).

2. Разложение Гельмгольца

Теорема Гельмгольца хорошо известна физикам и математикам. Суть ее заключается в следующем. Некоторое векторное поле, например, электрическое поле *E* или магнитное *H*, может быть разложено на две части: безвихревое или продольное поле *E*(*H*) и соленоидальное или поперечное поле.

Следующие формулировки делают это утверждение все боле и более строгим

Если дивергенция и ротор некоторого векторного поля $\mathrm{T}(r)$ определены в каждой точке конечной открытой области *V*пространства, то всюду в V функция может быть представлена в виде суммы безвихревого поля T_1 и соленоидального поля T_2 :

$$T = T_1 + T_2.$$

При этом, для $\forall r \in V$

$$diuT_2 = 0 \quad и \quad rotT_1 = 0.$$

Иными словами, любое векторное поле T(*r*), однозначное, непрерывное и ограниченное во всем пространстве, может быть разложено на сумму потенциального и соленоидального векторных полей и представлено в виде:

$$T(r) = -\nabla \bullet \phi + \nabla \times A.$$

Причем

$$\nabla \bullet = A0.$$

Скалярная функция Φ называется скалярным потенциалом,а векторная A векторным потенциалом.

Отрицательный градиент скалярного потенциала — это безвихревая компонента поля, а ротор векторного потенциала — соленоидальная. Представление Т в виде суммы безвихревого поля и соленоидального поля не является единственным, поскольку к Ψ всегда можно прибавить произвольную функцию ψ, удовлетворяющую уравнению Лапласа, а к А — согласованную с ψ вектор-функцию $Г$, являющуюся результатом решения задачи о восстановлении вектор-функции по ротору и дивергенции в соответствии с уравнениями $\nabla \bullet Г = 0;$

$$\nabla \times A = \nabla \phi.$$

Такая подстановка не только меняет скалярный и векторный потенциалы, участвующие в разложении Гельмгольца, но и существенным образом меняет безвихревое поле $\nabla(Г + \phi)$и соленоидальное поле

$$\nabla \times (A + Г),$$

на сумму которых распадается поле Т (r).

С теоремой Гельмгольца тесно связана задача о восстановлении векторного поля по дивергенции и ротору, которую иногда называют задачей Гельмгольца.

Пусть дано скалярное поле $K(x,y,z)$ и векторное поле $\Lambda(x,y,z)$ которые достаточно гладки и либо заданы в ограниченной области, либо убывают быстрее $1/r^2$ на бесконечности. Требуется найти такое векторное полеТ (x,y,z), что

$$\nabla \times T = K \quad и \quad \nabla \times T = \Lambda.$$

При анализе существования и единственности решения задачи следует различать:

1) **внутренняя задача** (ротор, дивергенция и сама вектор-функция рассматриваются внутри ограниченной области, имеющей достаточно гладкую границу), внешнюю задачу (ротор, дивергенция и сама вектор-функция рассматриваются для пространства R^3 с вырезанной «дыркой», имеющей достаточно гладкую границу), задачу для всего пространства R^3.Внутренняя задача (при условии её разрешимости) имеет однозначное решение, если вдоль границы области задана нормальная проекция

$$\vec{n} \bullet T|s = g(S)$$

для вектор-функции Т (x,y,z).

2) **внешняя задача** (при условии её разрешимости) имеет однозначное решение, если вдоль границы области задана нормальная проекция $\vec{n} \bullet T|s = g(S)$для вектор-функции Т (x,y,z), и на вектор-функцию Т (x,y,z) наложено требование, что она убывает на бесконечности по крайней мере как $1/r^{2+\epsilon}$

Во всех этих случаях решение задачи Гельмгольца единственно, если оно существует при заданных входных данных.

По сути, теорема Гельмгольца и задача Гельмгольца, как мы увидим, являются математическим обоснованием теории электромагнитного поля Максвелла.

3. Однородная среда без диссипации

Нейтральная и непроводящая среда в отсутствие зарядов и токов может быть описана следующей системой уравнений Максвелла[3]:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0.$$

Индукция и напряженности электрического и магнитного полей связаны материальными уравнениями:

$$\vec{D} = \in \in_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$$

соответственно, где $\in_0$ — диэлектрическая и μ_0 — магнитная проницаемость вакуума, а $\in$ — диэлектрическая и μ — магнитная проницаемость среды[4]. В нашем конкретном анализе мы ограничимся предположением, что диэлектрическая и магнитная проницаемости — С-числа.

Первая пара уравнений известна из курса общей физики как законы Фарадея и Ампера, это вихревые компоненты векторных полей E и H. Вторая пара уравнений — безвихревая составляющая анализируемых векторных полей, характеризующая отсутствие электрических и магнитных зарядов в рассматриваемой среде. Если отсутствие так называемого «магнитного заряда» является общим свойством электромагнитного поля, то отсутствие электрического заряда для данной задачи является *модельным* предположением.

Отметим, что для записи уравнений Максвелла был использован дифференциальный векторный оператор

[3] Здесь и далее мы будем использовать дифференциальную форму записи уравнений Максвелла

[4] Строго говоря, диэлектрическая и - магнитная проницаемость среды являются не только тензорами второго ранга, в реальных средах, за исключением воздуха, необходимо учитывать их частотную зависимость, так что $\in_{\alpha\beta}\left(\omega u \mu_{\alpha\beta}(\omega)\right)$являются частотно зависящими тензорами второго ранга.

$$\hat{\vec{\nabla}} = \vec{\nabla} = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{z}$ — единичные вектора вдоль выбранных (декартовых) осей координат(x,y,z). Оператор $\hat{\vec{\nabla}}$ обычно записывается в виде $\vec{\nabla}$, без украшающей его «шляпки».

С учетом материальных уравнений, система 4 может быть легко переписана в виде[5]

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (a) \quad rot\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \in\in \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (t) \tag{3.1}$$

$$div\vec{B} = 0 \quad div\vec{D} = 0 \tag{3.2}$$

Продифференцируем правую и левую части первой пары уравнений Максвелла по времени

$$\frac{\partial}{\partial t} rot\vec{E} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B} \quad (a) \quad \frac{\partial}{\partial t} rot\vec{H} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{D} \quad (b) \tag{3.3}$$

Для напряженностей полей имеем соответственно:

$$\frac{\partial}{\partial t} rot\vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{H} \quad (a) \quad \frac{\partial}{\partial t} rot\vec{H} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} \quad (b) \tag{3.4}$$

Преобразуем левую часть уравнения (3.3 (b)):

$$\frac{\partial}{\partial t} rot\vec{H} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \times \vec{H}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\right) \times \vec{H} + \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

Учитывая (3.1 (a)), и тот факт, что

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu\mu_0}\vec{\nabla} \times \vec{E},$$

находим[6]:

$$\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu\mu_0}\left(\left(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = -\nabla(\nabla E) + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{E}\right) = \frac{1}{\mu\mu_0}\nabla^2 E.$$

[5] Здесь и далее мы будем использовать символическую форму записи дифференциальных операторов:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{W} = div\vec{W}; \quad \vec{\nabla} W = gradW; \quad \vec{\nabla} \times \vec{W} = rot\vec{W}$$

[6] Здесь использовано хорошо известное тождество $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$

Преобразуя совершенно аналогично левую часть уравнения (3.3 (а)), получаем следующие волновые уравнения:

$$\nabla^2 E = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} E; \tag{3.5}$$

$$\nabla^2 H = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} H. \tag{3.6}$$

Это дифференциальные уравнения второго порядка в частных производных, что легко увидеть, заменив оператор ∇^2:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) E = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} E; \tag{3.7}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) H = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} H. \tag{3.8}$$

В правой части э~~тих~~ уравнений стоят множители $\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0$, характеризующие диэлектрические и магнитные свойства среды. Для дальнейшей работы введем обозначения $c = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}^{\,-1}$ *и* $\upsilon = \frac{c}{\left(\sqrt{\varepsilon\mu}\right)}$. Здесь с — скорость света в вакууме, а v — скорость света в среде. Тогда полученную систему уравнений можно представить в виде:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) E = \frac{c^2}{\upsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E; \tag{3.9}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) H = \frac{c^2}{\upsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} H. \tag{3.10}$$

Казалось бы, что полученные уравнения — вовсе не система, а два независимых и тождественных уравнения для определения компонент напряженностей электрического и магнитного полей. Действительно, замена $E \leftrightarrow H$ переводит одно уравнение в другое, и мы имеем два независимых уравнения, однако такое утверждение противоречит логике вывода этих уравнений — мы использовали и закон Ампера, и закон Фарадея и, следовательно, взаимосвязь электрического и магнитного полей. Очевидно, что без использования указанных законов и соответствующих уравнений, и связей, полученные системы оказались бы существенно сложнее.

3.1. Плоская электромагнитная волна

Необходимо решить и проанализировать полученное решение для простейшего случая распространения электромагнитного поля в среде без диссипации. Базовая система уравнений имеет вид:

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad rot\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$div\vec{B} = 0 \quad div\vec{D} = 0$$

Мы постараемся найти решение этой системы, предварительно заметив, что оператор *rot* можно представить в матричном виде, а оператор *div* — расписать в явном виде. Тогда, покомпонентно:

$$rot\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\mu\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \quad rot\vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}E_x + \frac{\partial}{\partial y}E_y + \frac{\partial}{\partial z}E_z = 0 \quad \frac{\partial}{\partial x}H_x + \frac{\partial}{\partial y}H_y + \frac{\partial}{\partial z}H_z = 0 \qquad (3.12)$$

Примем E_yE_z :H_yH_z, тогда должно выполняться:

$$\frac{\partial}{\partial y}E_y = \frac{\partial}{\partial z}E_z.$$

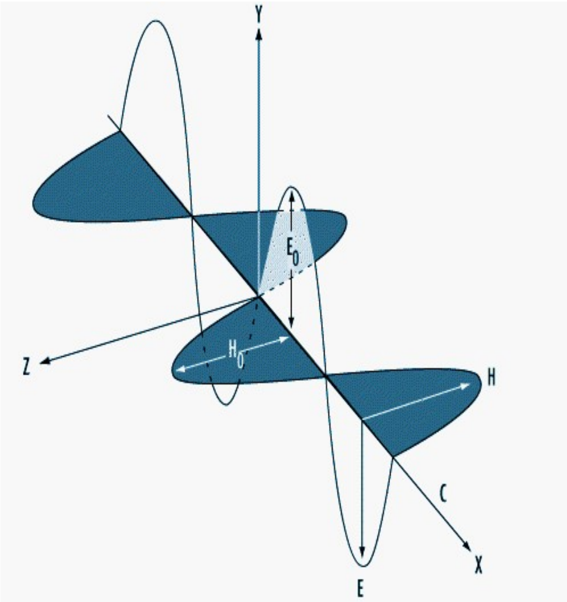

Рис. 3.1. Плоская электромагнитная волна, распространяющаяся со скоростью света *c* в направлении *x*

Следовательно:

$$\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} H_x = 0 \quad \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E_x = 0; \tag{3.13}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} E_z = -\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} H_y \quad -\frac{\partial}{\partial x} H_z = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E_y; \tag{3.14}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} E_y = -\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} H_z \quad \frac{\partial}{\partial x} H_y = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E_z; \tag{3.15}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} E_x = 0 \quad -\frac{\partial}{\partial x} H_x = 0. \tag{3.16}$$

Так как $-\frac{\partial}{\partial t} E_x = 0, \quad и \quad -\frac{\partial}{\partial x} E_x = 0$ очевидно, что E_x не зависит ни от t, ни от x. Аналогичный вывод следует и для H_x. Таким образом, E_x, H_x проекции компонент электромагнитного поля оказываются постоянными величинами, независимыми ни от времени, ни от координаты и однородны.

Для переменного поля при $E_x = 0$, $H_x = 0$, следовательно, электромагнитная волна является поперечной т.е. $\vec{E} \perp x, \quad \vec{H} \perp x$.

Докажем, что в этом случае всегда $\vec{E} \perp \vec{H}$.

$$\frac{\partial}{\partial x} E_y = -\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} H_z \quad и \quad \frac{\partial}{\partial x} H_z = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E_y$$

Заменим H_z на E_y вдоль оси *x* и E_y на H_z вдоль оси *x*. Видим, что нет поля Ez и H_y, т.е. $\vec{E} \perp \vec{H}$.

3.2. Связь мгновенных значений $\vec{E}$ и $\vec{H}$

Примем, как и в предыдущем параграфе, что электромагнитная волна распространяется вдоль оси *x*. Амплитуды волны в произвольной точке *x* (не совпадающей с началом отсчета) есть $E_y = E_y(t - x/v)$ и $H_z = E_y(t - x/v)$. Здесь сдвигом на x/v в аргументе учитывается поправка на время прохождения светом расстояния *x*.

Введем $\varphi = (t - x/v)$, тогда вычисление частных производных даст:

$$\frac{\partial}{\partial x}E_y = \frac{\partial E_y}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial \phi}\left(-\frac{1}{\upsilon}\right) \quad \frac{\partial}{\partial x}H_z = \frac{\partial H_z}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial \phi}.$$

Используя

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0\frac{\partial H_z}{\partial t} \quad \frac{\partial E_y}{\partial \phi}\left(-\frac{1}{\upsilon}\right) = -\mu\mu_0\frac{\partial H_z}{\partial \phi},$$

так как $v = (\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0)^{-1}$, несложно показать, что

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\frac{\partial E_z}{\partial \phi} = \sqrt{\mu\mu_0}\frac{\partial H_z}{\partial \phi},$$

и таким образом,

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E_y = \sqrt{\mu\mu_0}H_z + const \qquad (3.17)$$

Решение дифференциального уравнения определено с точностью до произвольной постоянной, что позволяет положить *const* = 0, следовательно, не ограничивая общности, имеем

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E_y = \sqrt{\mu\mu_0}H_z.$$

Отсюда легко видеть, что вектора полей ортогональны и образуют *правый винт*.

Действительно, для плоской бегущей гармонической волны, распространяющейся в направлении +*x* в скалярном виде имеем:

$$E = E_m\cos(\omega t - kx) \quad H = H_m\cos(\omega t - kx),$$

где ω — круговая частота, $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число.

Рассмотрим, например, электромагнитную плоскую волну, распространяющуюся в произвольном направлении ˜*k*. Выберем для определенности

$$\vec{E} = \vec{e}_z E_m \cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right). \qquad (3.18)$$

И найдем H_m. Так как волна распространяется вдоль $\vec{k}$, тройка векторов $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{k}$ должна образовывать правый винт, так что

$$\vec{H} \uparrow\uparrow \left[\vec{k} \times \vec{E}\right] = \left[\vec{n}_k \times \vec{e}_z\right] \quad \vec{n}_k = \frac{\vec{k}}{|k|}.$$

Однако, зная соотношение $H_m = \sqrt{\varepsilon_0 / \mu_0} E_m$, легко находим, что

$$\vec{H}_m = \left[\vec{n}_k, \vec{e}_z\right] \sqrt{\varepsilon_0 / \mu_0} E_m. \qquad (3.19)$$

3.2.1. Стоячая ЭМВ

Стоячая ЭМВ представляет собой суперпозицию двух волн, бегущих навстречу друг другу. Пусть бегущая волна распространяется вдоль оси *x*, в положительном направлении +*x*. Тогда, соответствующее поле

$$E_y' = E_m \cos(\omega t - kx), H_z' = H_m \cos(\omega t - kx).$$

Для волны, бегущей навстречу,

$$E_y^{“} = E_m \cos(\omega t + kx), \quad H_z'' = -H_m \cos(\omega t + kx),$$

Знак «минус» в последнем выражении появился потому, что тройка векторов $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{k}$ должна образовывать правый винт.

Уравнение стоячей волны получается сложением колебаний электрического и магнитных полей. Выполняя сложение [7]имеем

$$E' + E'' = E_m \cos(\omega t - kx) + E_m \cos(\omega t + kx) = E_y = 2E_m \cos kx \cos \omega t \quad (3.20)$$

$$H' + H'' = H_m \cos(\omega t - kx) - H_m \cos(\omega t + kx) = 2H_m \sin kx \sin \omega t, \quad (3.21)$$

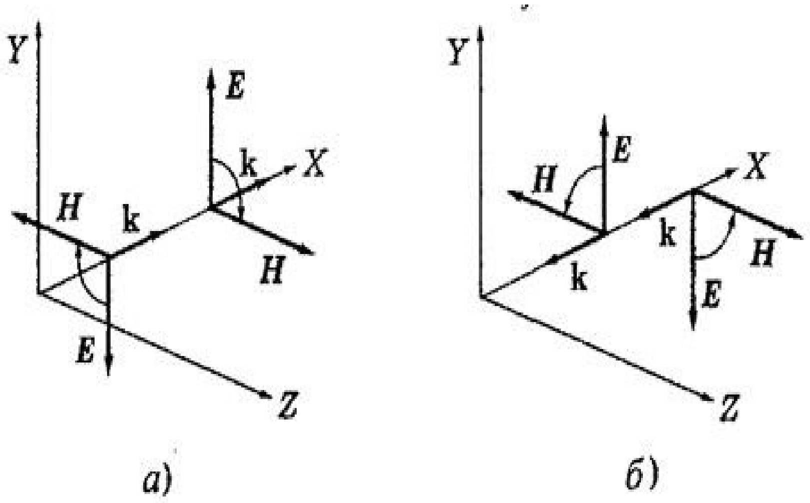

Рис. 3.2. Распространение электромагнитной волны: а — плоская электромагнитная волна, распространяющаяся в направлении *x;* б — отраженная набегающая волна, распространяющаяся в противоположном направлении

Сравнение двух полученных формул показывает, что фаза колебания электрического поля сдвинута на $\pi/2$ относительно фазы колебаний магнитного поля. Отметим, что амплитуда стоячей волны удваивается в результате наложения волн. (см. рис 3.4).

Так как колебания векторов $\vec{E}$ *и* $\vec{H}$ сдвинута по фазе на $\pi/2$, введенное ранее соотношение $\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E = \sqrt{\mu\mu_0}H$, оказывается справедливым только для амплитудных значений стоячей волны

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E_m = \sqrt{\mu\mu_0}H_m$$

[7] Сложение колебаний легко выполняется с использованием тригонометрических тождеств $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$; $\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

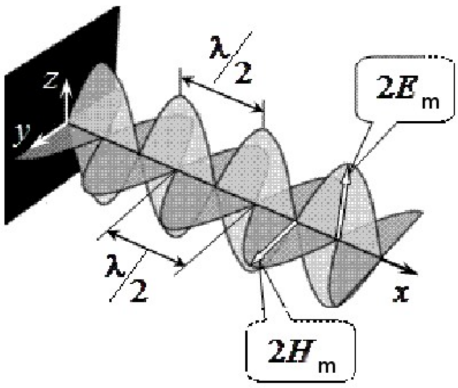

Рис. 3.3. Стоячая волна и ее основные характеристики

3.3. Энергия ЭМВ

Определим плотность энергии как

$$\omega = \frac{W}{v},$$

где W — полная энергия, а V — объем, занимаемый системой.

Используя определение полной энергии электромагнитного поля, имеем

$$\omega = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}.$$

Так как $\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E_z = \sqrt{\mu\mu_0}H_z$, легко показать, что

$$\omega = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 EH = EH/v,$$

где v — скорость ЭМВ в среде.

Очевидно, что, умножив обе части последнего равенства на v, можно определить некую универсальную величину, характеризующую распространение

плотности энергии $S = \omega\upsilon = \left(\vec{E}\vec{H}\right)$.

Однако, распространение энергии возможно только в направлении распространения самой волны, так как направления векторов $\vec{v}$ и $\vec{k}$ — совпадают.

С другой стороны, понятно, что речь всегда идет только о правой тройке векторов $\vec{E}, \quad \vec{H}, \quad \vec{k}$. Тогда

$$\left[\vec{E}\times\vec{H}\right]\uparrow\uparrow\vec{k},$$

и напрашивается простое определение

$$\vec{S}=\left[\vec{E}\times\vec{H}\right]. \tag{3.22}$$

Введенный вектор $\vec{S}$, называется вектором Умова-Пойтинга. Этот вектор характеризует направление и величину переносимой электромагнитной волной плотности энергии поля.

Для бегущей волны $\omega = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 \cos(\omega t - kx)$

$$\vec{S}=\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0/\mu\mu_0}\,E_m^2\cos^2(\omega t-kx);$$

$$\langle S\rangle=\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}\frac{E^2}{2} \tag{3.23}$$

Импульс $p = W/c$, где W — энергия потока; $\rho = \omega/c$ — плотность потока. $\rho=\left[E\times H\right]\frac{1}{c^2}$.

3.4. Давление ЭМВ

С помощью соотношения

$$P=\frac{W}{c}$$

определим импульс Р световой волны, переносимый этой световой волной[8], распространяющейся со скорость света, $dP=\frac{W}{c}cdt$

[8] Мы рассматривает световую волну как поток фотонов, имеющих нулевую массу покоя. Масса же движущихся фотонов не равна нулю.

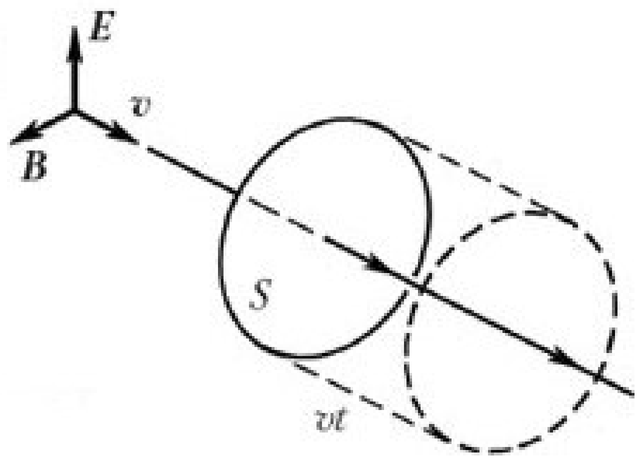

Рис. 3.4. Стоячая волна и ее основные характеристики

Пусть ρ — плотность импульса излучения, ω — плотность энергии. Тогда Re = ω/c — плотность импульса, переносимого волной.

Использую определение вектора Пойнтинга $\vec{S}$, соотношение $\frac{\omega c}{c} = \frac{S}{c}$, определим плотность импульса соотношением

$$\overrightarrow{\mathrm{Re}} = \frac{\vec{E} \times \vec{H}}{c^2}. \qquad (3.24)$$

Рассмотрим электромагнитную волну, распространяющуюся в цилиндре с площадью основания S = 1. Импульс, переносимый волной $dP = \frac{\omega}{c} cdt$. Высота цилиндра определяется временем прохождения волной расстояния H : $H = cdt$, тогда можно ввести давление p^*? оказываемое на поверхность цилиндра в единицу времени

$$p^* = \frac{dP}{dt}$$

Следовательно, для полностью поглощающей поверхности, $p^* = \omega = <\omega>$[9].

Для идеально отражающей поверхности давление будет в два раза больше.

[9] Для электромагнитной волны ω является очень быстро осциллирующей функцией. Поэтому логично ввести и рассматривать только среднюю плотность энергии

3.5. Интегралы движения

Рассмотрим несколько интегралов движения для электромагнитной волны.

Во-первых, очевидно, что

$$\left(\vec{E}\vec{k}\right) = \left(\vec{H}\vec{k}\right) = 0.$$

В силу закона сохранения энергии

$$\vec{S} = \left[\vec{E} \times \vec{H}\right] \frac{c}{4/\pi} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \frac{\varepsilon E^2}{4/\pi}.$$

Для электромагнитной волны, распространяющейся в однородной среде постоянной величиной является фазовая скорость:

$$\vec{V}_{phase} = \frac{\vec{c}}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Плотность энергии также сохраняется:

$$\rho = \frac{dW}{dV}.$$

Константой также является полная электромагнитная энергия в системе, импульс и момент импульса:

$$\vec{W} = \frac{1}{4\pi} \int \varepsilon E^2 dV; \tag{3.25}$$

$$\vec{P} = \int \frac{\vec{S}}{c^2} dV = \frac{1}{4\pi c} \int \left[\vec{E} \times \vec{H}\right] dV; \tag{3.26}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} = \frac{1}{4\pi c} \int \left[\vec{r} \times \left[\vec{E} \times \vec{H}\right]\right] dV. \tag{3.27}$$

Интегрирование в последних уравнениях проводится по всему объему, занимаемому системой.

4. Излучение диполя в вакууме

Пусть диполь образовывают заряды e^+ и e^-, расстояние между которыми, вообще говоря, зависит от времени — т.е. $L \to L(t)$. Любой движущийся заряд излучает. Излучает и диполь с зависящим от времени плечом. Пусть λ — длина волны подводимого к диполю тока. Если $L << \lambda$, то диполь называется элементарным.

Иными словами, мы будем рассматривать систему двух связанных между собой зарядов, но зарядов не статических, а динамически изменяющих свое положение в пространстве. Элементарной моделью, скорее ее механическим аналогом, могут служить связанные пружинкой шарики, закрепленные на ее концах. Конечно же, эта «модель» никак не описывает картину поля, возникающую при движении зарядов, но тем ни менее, она нам поможет установить некоторые особенности поведения системы.

4.1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу: пусть элементарный диполь, находящийся в точке r', совершает колебания. Необходимо:

1) определить энергию излучения элементарного диполя в вакууме;

2) исследовать процесс излучения в дисперсионной среде (с диссипацией);

3) найти интенсивности электрического и магнитного поля (их шесть).

Предположим, что наблюдатель находится в точке r, а источник излучения в точке r'. Естественно, точки r r' следует понимать как $r(x,y,z)$ и $r(x',y',z')$ соответственно. $H_{\varphi,\theta,r}$ — компоненты. Расстояние меду этими точками

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2},$$

время в штрихованной системе оказывается сдвинутым на $t' = t - \frac{R}{c}$. Дипольный момент, по определению, есть

$$\vec{p} = e\vec{L}(t') = e\vec{L}\left(t - \frac{R}{c}\right). \qquad (4.1)$$

В нашем случае плечо диполя есть зависящая от времени функция. Так как среда — вакуум, имеют место следующие материальные соотношения:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H};$$

ε и μ для вакуума равны 1.

Для начала запишем систему уравнений Максвелла в дифференциальной форме в точке наблюдения.

Закон Фарадея

$$rot\vec{E}(r,t) = -\frac{\partial \vec{B}(r,t)}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \qquad (4.2)$$

Закон Ампера

$$rot\vec{B}(r,t) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}(r,t)}{\partial t} + \vec{j}(r,t). \qquad (4.3)$$

Теорему Гаусса

$$div\vec{D}(r,t) = \varepsilon_0 div\vec{E}(r,t) = \sigma(r,t). \qquad (4.4)$$

И закон отсутствия магнитных зарядов

$$div\vec{B}(r,t) = 0. \qquad (4.5)$$

Дополним рассматриваемую систему законом сохранения заряда (уравнением непрерывности):

$$div'\vec{I}(r',t') + \frac{\partial \sigma}{\partial t}(r',t') = 0, \qquad (4.6)$$

и отметим, что

$$div' \equiv \nabla' = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x'} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y'} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z'}, \qquad (4.7)$$

т.е. дивергенция вычисляется в той точке, в которой находится источник.

Из уравнений Максвелла можно найти интенсивность электрического и магнитного полей по значениям интенсивности источников $\vec{j}$ *и* $\vec{\sigma}$ в среде с показателями проницаемости ε_0, μ_0 $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$.

Воспользуемся теоремой Гельмгольца, а именно утверждением, что представление векторного поля T в виде суммы безвихревого поля и соленоидального поля не является единственным, поскольку к Ψ всегда можно прибавить произвольную функцию ψ, удовлетворяющую уравнению Лапласа, а к A — согласованную с ψ вектор-функцию Γ, являющуюся результатом решения задачи о восстановлении вектор-функции по ротору и дивергенции в соответствии с уравнениями:

$$\nabla \cdot \Gamma = 0;$$

$$\nabla \times A = \nabla \phi.$$

4.2. Калибровка электромагнитного поля

Предположим, что $\exists \vec{A} \in T$ такой, что

$$\vec{B} = rotA,$$

тогда, с использованием закона Фарадея, имеем

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{E}\right] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{\nabla} \times \vec{A}\right]. \qquad (4.8)$$

Тогда

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\left[\vec{\nabla} \times \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right] \Rightarrow \left[\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right)\right] = 0 \qquad (4.9)$$

и, согласно теореме Гельмгольца, существует такая скалярная функция (скалярный потенциал) $\Phi(x,y,z,t)$, что

$$rotgrad\Phi \equiv 0, \quad или \quad \left[\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi\right] = 0. \qquad (4.10)$$

Следовательно,

$$\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} = \vec{E} + \vec{A} = \pm grad\Phi(r,t).$$

Но в стационарном состоянии, как известно, $\vec{E} = -grad\varphi(r)$, где $\varphi(r)$ электростатический потенциал и для зависящего от времени поля.

$$\vec{E} = grad\Phi - (\vec{A}). \tag{4.11}$$

Используя закон Ампера, полученные соотношения и $\vec{\nabla} \times \vec{B} = [\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{A}]]$, находим

$$rot\vec{B}(r,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(r,t) + \mu_0 \vec{j}(r,t); \tag{4.12}$$

$$[\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{A}]] = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(grad\Phi - (\vec{A})\right) + \mu_0 \vec{j}(r,t). \tag{4.13}$$

Несложные вычисления приводят к равенству:

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\vec{A} = -\mu\vec{I}_0 + \vec{\nabla}\left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right]. \tag{4.14}$$

Сравнивая полученное и исходное уравнения и имея в виду, что $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \vec{A}$, мы должны потребовать, чтобы $\vec{\nabla}\left(div\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) = 0.$ Не ограничивая общности, можно принять , что

$$div\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

Это утверждение носит название «калибровка Лоренца».

Так как

$$div\left(-\dot{\vec{\nabla}}\Phi - \dot{\vec{A}}\right) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad и \quad -\nabla^2\Phi - div\dot{\vec{A}} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

но $div\vec{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t}$, следовательно, скалярный потенциал должен удовлетворять уравнению Пуассона:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{\sigma(r,t)}{\varepsilon_0}. \tag{4.15}$$

Одним из следствий теоремы Гельмгольца является возможность однозначного решения обратной задачи Гельмгольца, а именно, восстановление векторного поля, что приводит к

$$\vec{A}(r,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{\vec{I}\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R} dV'$$

$$\Phi(r,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} \frac{\sigma}{R} dV'. \qquad (4.16)$$

Таким образом, зная векторный и скалярный потенциалы, мы можем однозначно восстановить и поле токов, скалярное поле зарядового распределения. В этих интегралах $R = r - r'$, а интегрирование ведется по объему υ'.

Приложение

δ — функция Дирака

Дельта функция Дирака $\delta(x)$ определена таким образом, что

$$\delta(x) = \infty \quad при \quad x = 0 \quad и \quad \delta(x) = 0 \quad при \quad x \neq 0,$$

более того,

$$\int_a^b \delta(x)dx = 1 \quad при \quad x \in (a,b) \quad \int_a^b \delta(x)dx = 0 \text{ в другом случае.} \tag{1}$$

Боле того, для любой функции $f(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a). \tag{2}$$

Отметим, что если аргументом дельта функции является размерная величина, то размерность дельта функции — обратна размерности аргумента.

Дельта функция четна

$$\delta(x) = \delta(-x). \tag{3}$$

И

а)
$$\int_a^b f(x)\delta(x-y)dx = \int_a^b f(y)\delta(x-y)dx = f(x) \quad при \quad x = y \in (a,b)$$

б) $\int_a^b f(x)\delta(x-y)dx = \int_a^b f(y)\delta(x-y)dx = 0$ в другом случае,

$$\delta(\alpha x) = \frac{1}{\alpha}\delta(x), \tag{4}$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{\delta(x-a) + \delta(x+a)}{2|a|}. \tag{5}$$

Производная дельта функции $\delta' x$ определяется с помощью

$\int_a^b f(x)\delta'(x-y)dx = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=y}$ при $y \in (a,b) = 0$ в другом случаеИные представления непрерывной дельта функции в параметрическом виде при $a \to 0$

$$\delta(x,\alpha)=\frac{\alpha}{\pi\left(x^2+\alpha^2\right)}=\frac{1}{\pi}arctg\,\frac{x}{\alpha}, \tag{6}$$

$$\delta(x,a)=\frac{e^{x/\alpha}}{\alpha\left(e^{x/\alpha}+1\right)^2}=\frac{d}{dx}\frac{1}{\left(e^{-x/\alpha}+1\right)}. \tag{7}$$

Интегральные представления дельта функции

$$\delta(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos(kx)dk=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikx}dk \tag{8}$$

Для многомерных пространств

$$\delta(x_1,x_2,x_3,.....x_n)=\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_2)\cdots\delta(x_n)=\Pi_{i=1}^{i=n}\delta(x_i) \tag{9}$$

Другие представления для дельта функции можно найти в специальной литературе.

Задачи для самостоятельного решения

1. Дана функция $f(r)=\frac{1}{r}$. Найти $gradf$; $div(af)$; $rot(af)$ (r — радиальная координата, a — произвольный постоянный вектор).
2. Дана функция $f=\frac{(p,R)}{r^3}$. Найти $gradf$ (R — радиус-вектор, r — радиальная координата, p — произвольный постоянный вектор).
3. Даны скалярное поле $\varphi=\varphi_0 e^{ikr}$ и векторное поле $E=E_0 e^{ikr}$. Найти $\nabla\varphi$, $divE$ и $rotE$ (φ_0– $const$ r; – радиус-вектор, E и k $_0$ — постоянные векторы).
4. *Пусть* $r=xX_0+yY_0+zZ_0$ — радиус-вектор точки. Вычислить $grad|r|$; $divr$; $rotr$ (a — постоянный вектор).
5. Даны векторы $\mathrm{A}=A(x)X_0$, $\mathrm{B}=B(y)X_0$. Найти $divA$; $rotA$; $divB$; $rotB$.
6. Найти поток радиус-вектора *r*через замкнутую поверхность S, ограничивающую объем *V*.
7. Доказать тождества $div(rotA)=0$, $rot(\nabla\varphi)=0$.
8. Найти поток вектора H через площадь круга радиуса a , лежащего в плоскости *xy*, для случаев а), б), в). Центр окружности совпадает с началом координат. Направление нормали к площади круга совпадает с положительным направлением оси*z*.
   а) $H=z_0A\quad(A=const)$;
   б) $H=x_0A\quad(A=const)$;
   в) $H=z_0\,\mathrm{P}r^3$ (*P=const*, *r* – расстояние до центра круга).
9. Найти циркуляцию вектора *E*вдоль контура в виде окружности радиуса a , лежащего в плоскости *xy*, для случаева), б), в). Центр окружности совпадает с началом координат, положительное

направление обхода контура и направления оси zсвязаны правилом правого винта.

а) $E = z_0 A \quad (A = const)$;

б) $E = x_0 A \quad (A = const)$;

в) $E = \varphi_0 Br(1 + \cos\varphi)$($B$=$const$, r и φ — радиальная и азимутальная цилиндрические координаты соответственно).

10. Диэлектрическая проницаемость среды и вектор напряженности электрического поля заданы в декартовой системе координат (x, y, z) в виде $\varepsilon(y) = a + by, \quad E = X_0 Ax + Y_0 B \quad (a, b, A, B = const)$. Найти плотность свободного заряда ρ.
11. Найти напряженность электрического поля, создаваемого в вакууме равномерно заряженной средой. Заряд сферы равен q, ее радиус — a.
12. Найти напряженность электрического поля, создаваемого в вакууме бесконечной равномерно заряженной плоскостью. Плотность поверхностного заряда плоскости равна Ω.
13. Найти напряженность электрического поля, создаваемого в вакууме электрическим диполем с дипольным моментом P.
14. Найти напряженность электрического поля, создаваемого в вакууме бесконечно прямой нитью с линейным зарядом K.
15. Найти напряженность электрического поля, создаваемого в вакууме равномерно заряженным шаром с диэлектрической проницаемостью ε. Объемная плотность заряда равна ρ, радиус шара — a.

Библиографический список

1. Л.Д. Ландау. И.М. Лившиц. Теоретическая физика в 10 т. Т. 8. Электродинамика сплошных сред: учеб. пособие. — 4-е изд., испр. и доп. – М.: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. — 248 с.
2. Л.Д. Ландау. И.М. Лившиц. Теоретическая физика в 10 т. Т. 2.Теория поля: учеб. пособие. — 7-е изд., испр. и доп. — М.: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 512 с.
3. Тамм И. Е. Основы теории электричества: учеб. пособие для вузов. — 11-е изд., испр. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 616 с.

Редактор и корректор В.А.Басова
Техн. редактор Л.Я.Титова Темплан 2020 г., поз.132

Подп. к публикации 17.12.20. Издание электронное
Объем уч.-изд.л. 2,75. Изд. № 132 .

Высшая школа технологии и энергетики СПбГУПТД, 198095, СПб., ул. Ивана Черных, 4.