

**Д. А. Ковалёв
В. А. Шаряков
О. Л. Шарякова**

**ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ**

Практикум

**Санкт-Петербург
2022**

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

**«Санкт-Петербургский государственный университет
промышленных технологий и дизайна»
Высшая школа технологии и энергетики**

**Д. А. Ковалёв
В. А. Шаряков
О. Л. Шарякова**

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Практикум

Утверждено Редакционно-издательским советом ВШТЭ СПбГУПТД

Санкт-Петербург
2022

УДК 62-5(075)
ББК 32.965я7
К 560

Рецензент

кандидат технических наук, доцент кафедры информационно-измерительных технологий и систем управления Высшей школы технологии и энергетики Санкт-Петербургского государственного университета промышленных технологий и дизайна
А. В. Бахтин

Ковалёв, Д. А.

К 560 Теория автоматического управления: Практикум / Д. А. Ковалёв, В. А. Шаряков, О. Л. Шарякова. — СПб.: ВШТЭ СПбГУПТД, 2022. — 134 с.

Практикум соответствует программам и учебным планам дисциплины «Теория автоматического управления» для студентов, обучающихся по направлению подготовки 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств».

Рассмотрены практические аспекты применения структурно-топологических методов преобразования динамических моделей САУ и частотных методов исследования линейных систем. Даны алгебраические и частотные критерии для определения устойчивости линейных САУ. Предложены простые способы синтеза регуляторов САУ, а также раскрыт синтез каскадной системы управления.

Практикум ориентирован на самостоятельную работу студентов, содержит большое количество примеров и заданий по указанным частям курса. Предназначен для подготовки бакалавров и магистров очной и заочной форм обучения.

УДК 62-5(075)
ББК 32.965я7

© ВШТЭ СПбГУПТД, 2022
© Ковалёв Д. А., Шаряков В. А.,
Шарякова О. Л., 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНЫХ САУ	5
1.1. Основные понятия и определения автоматических систем.....	5
1.2. Обобщенная структура системы автоматического управления.....	6
1.3. Классификация систем автоматического управления	7
1.3.1. По виду параметров и моделей	10
1.3.2. По виду математической модели	12
1.4. Получение передаточных функций САУ путем структурных преобразований моделей систем.....	13
1.5. Использование теоремы Мейсона при получении передаточных функций САУ. Правило некасающихся контуров (теорема Мейсона)	22
1.6. Структурно-матричные преобразования динамических моделей САУ	30
2. ЧАСТОТНЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИКИ САУ	34
2.1. Построение логарифмических частотных характеристик разомкнутых САУ	34
2.2. Построение логарифмических частотных характеристик замкнутых САУ	39
3. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНОЙ САУ	44
3.1. Основные определения	44
3.2. Алгебраические критерии устойчивости.....	47
3.2.1. Необходимое и достаточное условие устойчивости непрерывной системы управления (корневой критерий)	47
3.2.2. Алгебраический критерий устойчивости Гурвица.....	50
3.3. Частотные критерии устойчивости	53
3.3.1. Оценка устойчивости непрерывной системы управления с использованием критерия Михайлова	53
3.3.2. Частотный критерий устойчивости Найквиста в логарифмической форме	55
4. СИНТЕЗ КОНТУРА РЕГУЛИРОВАНИЯ	64
4.1. Виды коррекции	64
4.2. Законы регулирования	65
4.3. Типовые регуляторы	68
4.4. Стандартная настройка простейших контуров. Настройка на оптимум по модулю.....	69

4.4.1. Неизменяемая часть системы состоит из апериодического звена с малой постоянной времени и интегрирующего звена с большой постоянной времени.....	70
4.4.2. Неизменяемая часть системы состоит из апериодического звена	74
4.4.3. Неизменяемая часть системы состоит из нескольких апериодических звеньев	77
4.4.4. Неизменяемая часть системы состоит из нескольких апериодических звеньев, причем постоянная времени одного из звеньев больше суммы постоянных времени оставшихся звеньев.....	85
4.4.5. Неизменяемая часть системы состоит из нескольких апериодических звеньев, причем у двух звеньев большие постоянные времени	86
4.4.6. Неизменяемая часть системы состоит из нескольких апериодических звеньев, причем одно звено имеет запаздывание	87
5. СИСТЕМЫ ПОДЧИНЕННОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ (КАСКАДНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ)	93
6. ЗАДАНИЕ № 1	99
7. ЗАДАНИЕ № 2	117
8. ЗАДАНИЕ № 3	122
9. ЗАДАНИЕ № 4	128
10. ЗАДАНИЕ № 5	131
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	134

1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНЫХ САУ

1.1. Основные понятия и определения автоматических систем

Теория автоматического управления (ТАУ) – это наука о принципах построения и методах расчета систем автоматического управления. Подходы ТАУ справедливы для различных систем независимо от назначения и физической природы. Применение систем, их проектирование и эксплуатация невозможны без знания ТАУ.

Система – совокупность связанных друг с другом объектов, называемых элементами, или отдельных частей, действующих как одно целое и обуславливающих ее существование и функционирование. Элементом системы называется объект, описание которого достаточно для решаемой задачи, т. е. не требует учета внутренних переменных или зависимостей, а определяется только внешними характеристиками, связывающими входные и выходные переменные.

Система характеризуется разделением области материального мира на две части объект управления (ОУ) и внешняя среда. Внешняя среда определяется множеством объектов, которые оказывают воздействие на объект управления. Сложными называют системы, в которых число элементов и взаимных связей велико. Каждый элемент сложной системы, в свою очередь, может рассматриваться как система, а выделенная в данном случае сложная система представляет собой один из элементов более обширной системы. Система обладает свойством иерархичности, т. е. система, включающая в себя несколько элементов, взаимодействующих друг с другом, может являться частью более сложной, обширной системы.

Под функционированием системы или процессом, протекающим в ней, понимают последовательную смену состояний системы во времени. Системы, состояние которых во времени изменяется, называются динамическими.

Примерами систем могут являться: предприятие или цех, живой организм, технологическая машина, транспортное средство, и т. д. Состояние системы во времени может изменяться.

Управление – функция системы, обеспечивающая целенаправленное изменение ее состояний, позволяющее выполнять заданные функции.

Объектом управления может быть любая динамическая система или ее модель. Состояние объекта управления определяется контролируемыми величинами, которые изменяются во времени, такие величины называются выходными к ним относятся: температура, плотность определенного вещества в организме, механические перемещения (угловые или линейные) и их скорость, электрические переменные, температуры и т. д.

По роли человека в контуре управления системы управления делятся на:

- Автоматизированные системы управления (АСУ) – с участием человека в контуре управления.
- Системы автоматического управления (САУ) – без участия человека в контуре управления.

Автоматическое управление – это воздействие на объект управления с целью достижения заданной цели управления, то есть охватывает более широкий круг задач. Под автоматическим управлением понимается автоматическое осуществление совокупности воздействий, выбранных из множества возможных на основании определенной информации и направленных на обеспечение функционирования объекта в соответствии с целью управления.

Регулирование – частный случай автоматического управления.

Автоматическое регулирование – это обеспечение:

- изменения по заданному закону регулируемой величины;
- постоянства регулируемой величины при изменяющихся внешних воздействиях.

Автоматическое регулирование осуществляется автоматическим измерением состояний объекта управления и выработкой управляющего воздействия на регулирующий орган объекта управления.

1.2. Обобщенная структура системы автоматического управления

При построении структурных схем отдельные части системы изображают в виде геометрических фигур (прямоугольники, квадраты, окружности и т. д.), не раскрывая внутренне устройство частей систем. На структурных схемах указывают входы и выходы блоков, а связи между блоками показывают стрелками, указывая направления управляющих/возмущающих воздействий, потоков энергии и направление передачи информации.

В общем виде структурная схема системы автоматического управления САУ может быть представлена следующим образом (рис. 1).

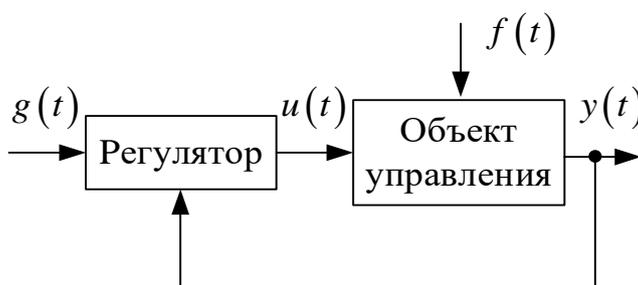


Рис. 1. Обобщенная структура системы автоматического управления (САУ):

$g(t)$ – задающее воздействие; $u(t)$ – управляющее воздействие;
 $f(t)$ – возмущающее воздействие; $y(t)$ – регулируемая (выходная) переменная

Объект управления (ОУ) – это устройство, где протекает какой-либо процесс, требующий управления.

Регулируемая (выходная) переменная – это переменная, которая должна поддерживаться на заданном уровне или изменяться по заданному закону.

Внешнее воздействия – величины, отражающие влияние внешних сил на объект управления.

Текущее значение регулируемой величины – это измеренное в текущий момент времени значение выходной переменной.

$$e(t) = g(t) - y(t) \quad (1)$$

Ошибка регулирования ($e(t)$) – это разность между заданным значением и текущим значением регулируемой величины.

Ошибка системы автоматического регулирования – это разность между заданным и текущим значением регулируемой переменной.

Отклонение регулируемой величины – это разность между значением регулируемой величины в текущий момент времени и некоторым фиксированным ее значением ($y_{t=0}$), принятым за начало отсчета.

$$\Delta y(t) = y_{t=0} - y(t) \quad (2)$$

Регулятор (P) – устройство, которое на основе вычисленной ошибки (1) регулирования определяет величину управляющего воздействия.

Цель работы регулятора – минимизировать ошибку регулирования

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \rightarrow 0 \quad (3)$$

Регулирующий орган – устройство, предназначенное для воздействия непосредственно на параметры объекта.

Устройство для измерения регулируемой величины называется *чувствительным элементом*.

1.3. Классификация систем автоматического управления

Систем автоматического управления существует большое количество, однако их можно разделить на следующие большие группы, которые в свою очередь разделяются на подгруппы:

- По способу организации управляющего воздействия:
 - Управляющие воздействие вырабатываются человеком или управляющим устройством.
 - Возмущающие – отражают внешние влияния на объект.
- По цели управления:
 - Системы автоматического регулирования (САР). Если целью управления является поддержание постоянства регулируемой величины.
 - Системы программного управления (СПУ). Если закон изменения регулируемой величины задан заранее.

- Следящие системы (СС). Если закон изменения регулируемой переменной заранее неизвестен.
- По виду параметров и моделей.
- По отношению к возмущающему (управляющему) воздействию:
 - Разомкнутые, в т. ч. с регулировкой по возмущению.
 - Замкнутые.
- По виду математической модели.

В зависимости от типа воздействия система регулирования должна вести существенно различным образом. Управляющие воздействия определяют изменения регулируемых величин:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Delta y(t)}{\Delta u(t)} \rightarrow K, \quad (4)$$

где K – постоянный коэффициент.

При возникновении возмущающего воздействия, наоборот, изменение выходной величины должно быть минимально.

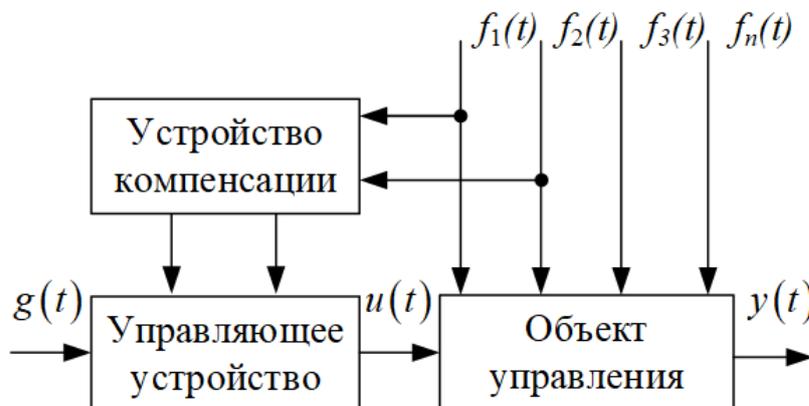
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Delta y(t)}{\Delta f(t)} \rightarrow 0 \quad (5)$$

Вследствие наличия воздействий требуемые и действительные значения регулируемой величины отличаются друг от друга.

Разомкнутые системы (системы без обратной связи). В простейшем случае разомкнутая система состоит из объекта управления и управляющего устройства (рис. 2а).

В случаях, когда возмущающие воздействия можно измерить и их можно и компенсировать (рис. 2а), то в структуру вводят устройство компенсации (УК). В такой структуре величина выходной переменной $y(t)$ не оказывает влияния на формирование управляющего воздействия $u(t)$.

$$u(t) \neq f(y(t), t) \quad (6)$$



a)

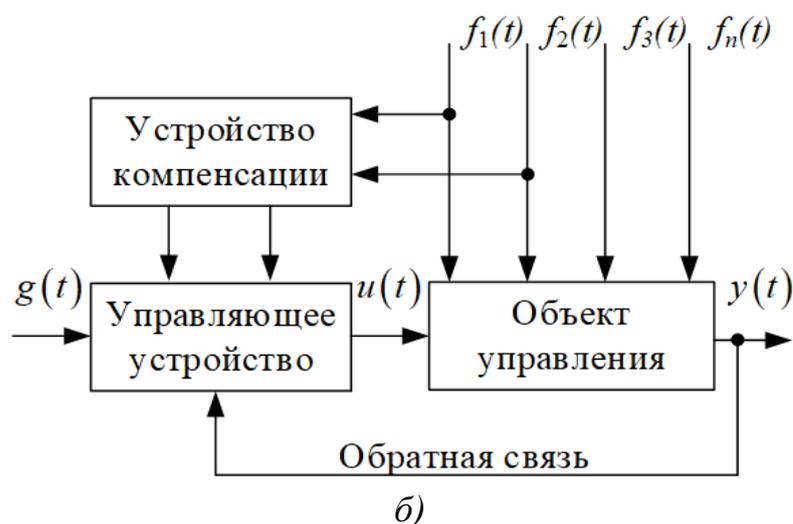


Рис. 2. Виды САУ:

а) без обратной связи; б) с обратной связью:

$g(t)$ – задающее воздействие; $u(t)$ – управляющее воздействие; $y(t)$ – регулируемая выходная переменная; $f_i(t)$ – внешние возмущения ($f_1(t)$, $f_2(t)$ – измеряемые, $f_3(t) \dots f_n(t)$ – неизменяемые)

Сущность принципа разомкнутых САУ состоит в том, что алгоритм управления вырабатывается только на основе заданного алгоритма функционирования и не контролируется другими факторами – фактическим значением управляемой величины или величиной возмущения.

Замкнутые системы (системы с обратной связью). Для повышения точности управления можно, измерив возмущения, ввести по результатам измерения коррективы в алгоритм управления, которые компенсировали бы вызываемые возмущениями отклонения алгоритма функционирования (рис. 2б).

$$u(t) = f(y(t), t) \quad (7)$$

Однако при таком управлении не учитывается и не компенсируется отклонение выходной переменной, вызываемое другими факторами.

В обратной связи (ОС) стоит датчик, измеряющий изменения в выходном сигнале. Выход y оказывает влияние на расчет управляющего воздействия.

Обратная связь может быть положительной, если сигнал обратной связи складывается с сигналом задающего воздействия, или отрицательной, если сигнал обратной связи вычитается из входного сигнала.

Преимущества и недостатки разомкнутых и замкнутых САУ приведены в табл. 1.

Таблица 1 – Преимущества и недостатки разомкнутых и замкнутых САУ

Разомкнутые		Замкнутые	
достоинства	недостатки	достоинства	недостатки
Простота системы, особенно при одном сильном возмущении	Усложнение структуры и конструкции устройства компенсации при многих возмущениях	Регулирование по отношению ко всем возмущениям (опосредованное через выход)	Возможна неустойчивость
Устойчивость	Трудности компенсации, связанные с нелинейностью и не стационарностью параметров, в результате чего появляется большая ошибка	Обеспечение чрезвычайно малых ошибок в установившемся режиме путем выбора звеньев с большими коэффициентами усиления	Увеличение стоимости
Невысокая стоимость	Отсутствие регулирования по отношению к неучтенному (не измеряемому) возмущающемуся воздействию	—	—

1.3.1. По виду параметров и моделей

Автоматическая система (АС) состоит из нескольких звеньев или блоков, соединенных между собой. Каждый отдельно взятый блок имеет вход и выход (рис. 3). Входная величина $u(t)$ и выходная $y(t)$ имеют любую физическую природу (ток, напряжение, перемещение, температура, освещенность и т. п.) [5].

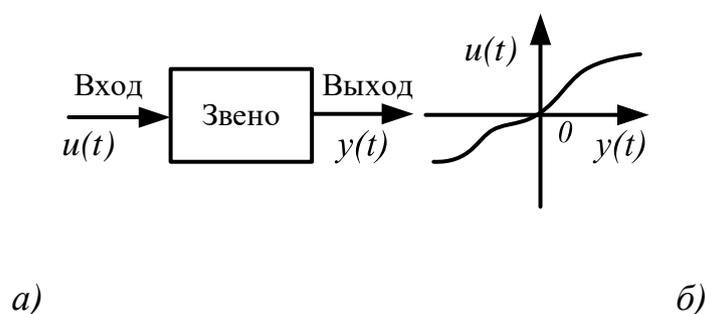


Рис. 3. Звено и его характеристика

В процессе работы автоматической системы величины $u(t)$ и $y(t)$ изменяются во времени. Динамика процесса преобразования сигнала в данном звене описывается некоторым уравнением (или экспериментально снятой характеристикой), связывающим выходную переменную $u(t)$ с входной переменной $y(t)$. Совокупность уравнений и характеристик всех звеньев описывает динамику процессов управления или регулирования во всей системе в целом.

Основными признаками деления автоматических систем на большие классы по характеру внутренних динамических процессов являются следующие:

- Линейные системы – системы, динамические процессы в которых описываются линейными уравнениями:
 - непрерывные системы, обладающие непрерывностью динамических процессов во времени;
 - стационарные системы;
 - нестационарные системы – системы, в которых имеется хотя бы один изменяющийся во времени коэффициент;
 - системы со сосредоточенными параметрами;
 - системы с распределенными параметрами – система, у которой какое-либо звено описывается линейным уравнением в частных производных.
- Нелинейные системы:
 - дискретные системы (импульсные и цифровые), обладающие прерывистостью динамических процессов во времени;
 - системы релейного действия;
 - стационарные системы;
 - нестационарные системы – системы, в которых имеется хотя бы один изменяющийся во времени коэффициент;
 - системы со сосредоточенными параметрами;
 - системы с распределенными параметрами – система, у которой какое-либо звено описывается линейным уравнением в частных производных.

Если процесс внутри звеньев системы описывается обыкновенными линейными дифференциальными (и линейными алгебраическими) уравнениями с постоянными коэффициентами, то систему называют обыкновенной линейной системой.

Вся система может быть линейной, только если состоит из блоков (звеньев), описываемых линейными уравнениями.

Непрерывная система – это система, в которой в каждом из звеньев непрерывному изменению входной величины во времени соответствует непрерывное изменение выходной величины. При этом закон изменения выходной величины во времени может быть произвольным, в зависимости от формы изменения входной величины и от вида уравнения динамики (или характеристики) звена.

Дискретная система это – система, в которой хотя бы в одном блоке при непрерывном изменении входной величины выходная величина изменяется не непрерывно, а имеет вид отдельных импульсов, появляющихся через некоторые промежутки времени.

Импульсное звено – это звено, которое преобразует непрерывный входной сигнал в последовательность импульсов. Цифровые дискретные системы формируют результат вычисления на выходе через определенные промежутки времени в виде чисел для отдельных дискретных числовых значений входной величины [5].

Релейная система – это система, в которой хотя бы в одном звене при непрерывном изменении входной величины выходная величина в некоторых точках процесса, зависящих от значения входной величины, изменяется скачком. Такое звено называется релейным звеном. Статическая характеристика релейного звена имеет точки разрыва.

1.3.2. По виду математической модели

Передаточной функцией звена (системы) от данного входа $u(t)$ к выходу $y(t)$ называется отношение изображений по Лапласу выходной переменной к входной переменной при нулевых начальных условиях и равенстве нулю прочих входов:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}, \quad (8)$$

$$Y(s) = \int_0^{\infty} y(t)e^{-st} dt = L\{y(t)\} \text{ и } U(s) = \int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt = L\{u(t)\} \quad (9)$$

Переменную s в преобразовании Лапласа можно рассматривать как оператор дифференцирования, т. е.:

$$\frac{d}{dt} \equiv s \equiv p \quad (10)$$

$$W(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}, \quad (11)$$

$$Y(p) \equiv Y(s) \text{ и } U(p) \equiv U(s) \quad (12)$$

Пример 1.

Определить передаточную функцию системы. Дифференциальное уравнение, описывающее эту систему, имеет вид:

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = r(t). \quad (13)$$

Произведем замену символа дифференцирования оператором « p » $\frac{d}{dt} \Rightarrow p$,

$$m \cdot p^2 \cdot y(p) + b \cdot p \cdot y(p) + k \cdot y(p) = r(p) \quad (14)$$

вынесем общий множитель за скобки:

$$y(p)(m \cdot p^2 + b \cdot p + k) = r(p). \quad (15)$$

Определим из выражения (15) величину $y(p)$:

$$y(p) = \frac{r(p)}{m \cdot p^2 + b \cdot p + k}. \quad (16)$$

Учитывая, что $y(p)$ выходной переменной, а $r(p)$ – входной, то для получения передаточной функции системы правые и левые части выражения (16) необходимо разделить на $r(p)$:

$$y(p) \left\{ \cancel{r(p)} \right\} = \frac{r(p)}{m \cdot p^2 + b \cdot p + k} \left\{ \cancel{r(p)} \right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{y(p)}{r(p)} = \frac{r(p)}{m \cdot p^2 + b \cdot p + k} \cdot \frac{1}{r(p)} \quad (17)$$

$$\Downarrow$$

$$W(p) = \frac{y(p)}{r(p)} = \frac{1}{m \cdot p^2 + b \cdot p + k}$$

Структурное звено, описывающее систему, показано на рис. 4.

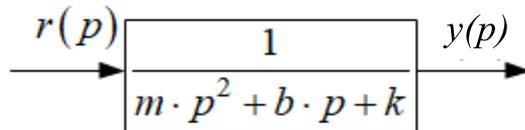


Рис. 4. Передаточная функция системы

1.4. Получение передаточных функций САУ путем структурных преобразований моделей систем

Если система состоит из нескольких звеньев, соединенных последовательно, параллельно или встречно параллельно, то для исследования таких систем необходимо получить единую передаточную функцию.

1. Пусть звенья системы соединены последовательно.

В случае последовательно соединенных звеньев используют следующие соотношения:

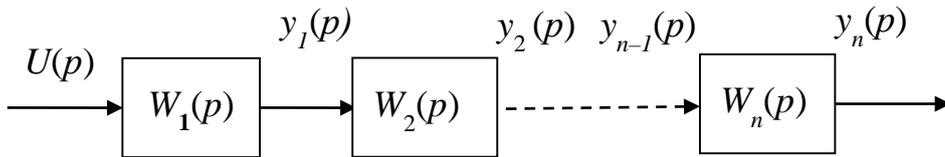


Рис. 5. Система из последовательно соединенных звеньев

$$\left. \begin{aligned} y_1(p) &= W_1(p)u(p) \\ y_2(p) &= W_2(p)y_1(p) \\ &\vdots \\ y_n(p) &= W_n(p)y_{n-1}(p) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} y_n(p) &= W_n(p) \cdot y_{n-1}(p) = \\ &= W_n(p) \cdot W_{n-1}(p) \cdot W_{n-2}(p) \cdot y_{n-2}(p) = \\ &= [W_n(p) \cdot W_{n-1}(p) \cdot W_{n-2}(p) \cdot \dots \\ &\dots \cdot W_3(p) \cdot W_2(p) \cdot W_1(p)] \cdot u(p) \end{aligned} \quad (19)$$

Передаточная функция последовательно включенных звеньев равна произведению их передаточных функций.

$$\begin{aligned} y_n(p) &= [W_n(p) \cdot W_{n-1}(p) \cdot W_{n-2}(p) \cdot \dots \\ &\dots \cdot W_3(p) \cdot W_2(p) \cdot W_1(p)] \cdot u(p) = \\ &= \prod_{i=1}^n W_i(p) \cdot u(p) \end{aligned} \quad (20)$$

2. Пусть звенья системы соединены параллельно.

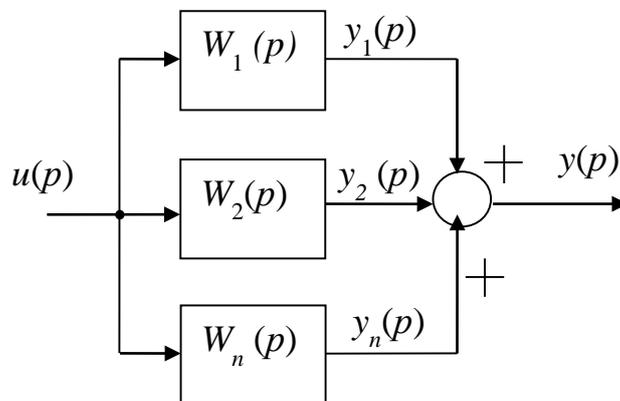


Рис. 6. Система из параллельно соединенных звеньев

В этом случае система уравнений звеньев, включенных параллельно, имеет вид:

$$\begin{aligned}
 y(p) &= y_1(p) + y_2(p) + \dots + y_n(p) = \\
 &= W_1(p)u(p) + W_2(p)u(p) + \dots + W_n(p)u(p) = \\
 &= [W_1(p) + W_2(p) + \dots + W_n(p)]u(p)
 \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
 y(p) &= y_1(p) + y_2(p) + \dots + y_n(p) = \\
 &= W_1(p)u(p) + W_2(p)u(p) + \dots + W_n(p)u(p) = \\
 &= [W_1(p) + W_2(p) + \dots + W_n(p)]u(p)
 \end{aligned} \tag{22}$$

Передаточная функция такой системы равна сумме передаточных функций звеньев, входящих в соединение.

$$\begin{aligned}
 y(p) &= [W_1(p) + W_2(p) + \dots + W_n(p)] \cdot u(p) = \\
 &= \sum_{i=1}^n W_i(p) \cdot u(p)
 \end{aligned} \tag{23}$$

3. Звено, охваченное обратной связью (встречно-параллельное соединение звеньев).

Обратная связь может быть положительной, если сигнал обратной связи складывается с входным сигналом, или отрицательной, если сигнал обратной связи вычитается из входного сигнала.

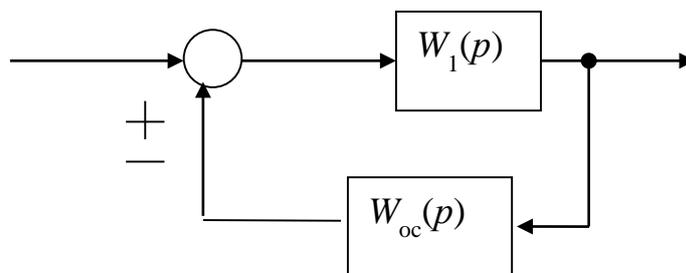


Рис. 7. Система из встречно-параллельно соединенных звеньев

В этом случае система уравнений звеньев, включенных встречно-параллельно, имеет вид:

$$\begin{aligned}
y(p) &= W_1(p)e(p); \\
e(p) &= u(p) \pm y_{oc}(p); \\
y_{oc}(p) &= W_{oc}(p)y(p); \\
y(p) &= W_1(p)(u(p) \pm W_{oc}(p)y(p)); \\
y(p) \mp W_1(p)W_{oc}(p)y(p) &= W_1(p)u(p); \\
y(p)(1 \mp W_1(p)W_{oc}(p)) &= W_1(p)u(p).
\end{aligned} \tag{24}$$

$$W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{W_1(p)}{(1 \mp W_1(p)W_{oc}(p))}. \tag{25}$$

Знак «+» в знаменателе передаточной функции (25) соответствует минусу на сумматоре рис. 7.

4. Эквивалентные структурные преобразования:

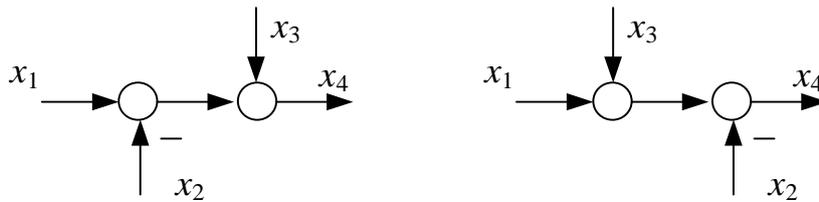


Рис. 8. Перестановка сумматоров

$$x_4 = (x_1 - x_2) + x_3 \quad \Rightarrow \quad x_4 = (x_1 + x_3) - x_2 \tag{26}$$

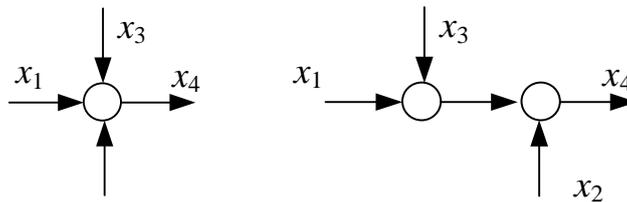


Рис. 9. Объединение и расщепление сумматоров

$$x_4 = x_1 + x_2 + x_3 \quad \Rightarrow \quad x_4 = (x_1 + x_3) + x_2 \tag{27}$$



Рис. 10. Перестановка звеньев (коммутативность)

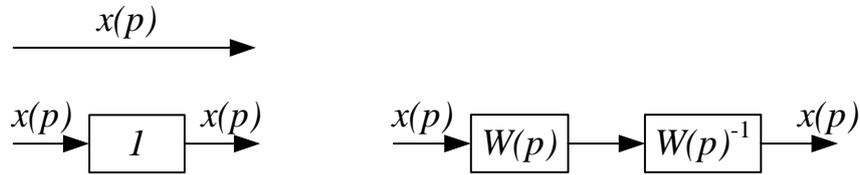


Рис. 11. Эквивалентирование единичной связи

$$x(p) = 1 \cdot x(p) \Rightarrow x(p) = W(p) \cdot W(p)^{-1} \cdot x(p) \quad (28)$$

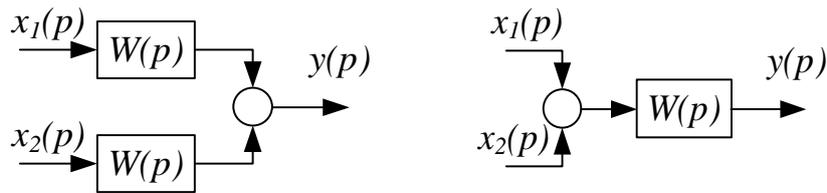


Рис. 12. Вынесение общего звена за сумматор

$$\begin{aligned}
 y(p) &= W(p) \cdot x_1(p) + W(p) \cdot x_2(p) \\
 &\Downarrow \\
 y(p) &= [x_1(p) + x_2(p)] \cdot W(p)
 \end{aligned} \quad (29)$$

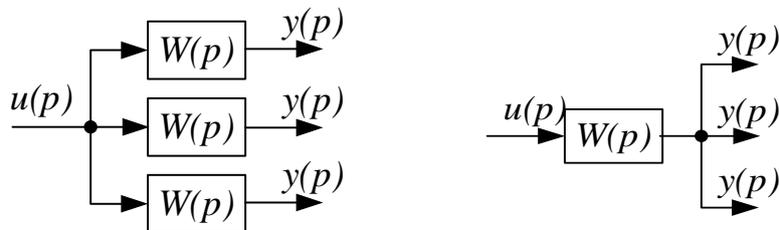


Рис. 13. Вынесение общего звена за отвод

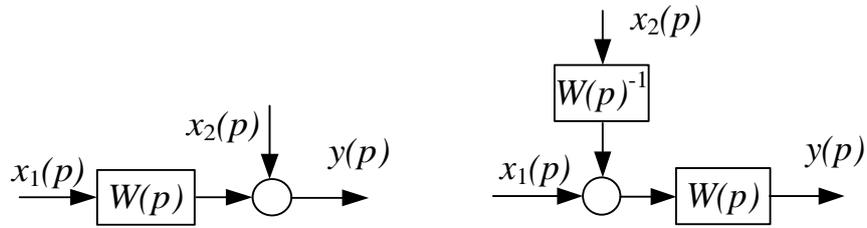


Рис. 14. Перестановка звена через сумматор

$$\begin{aligned}
 y(p) &= W(p) \cdot x_1(p) + x_2(p) \\
 &\Downarrow \\
 y(p) &= [x_1(p) + W(p)^{-1} \cdot x_2(p)] \cdot W(p) = \\
 &= x_1(p) \cdot W(p) + W(p)^{-1} \cdot W(p) \cdot x_2(p) = \\
 &= x_1(p) \cdot W(p) + x_2(p)
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

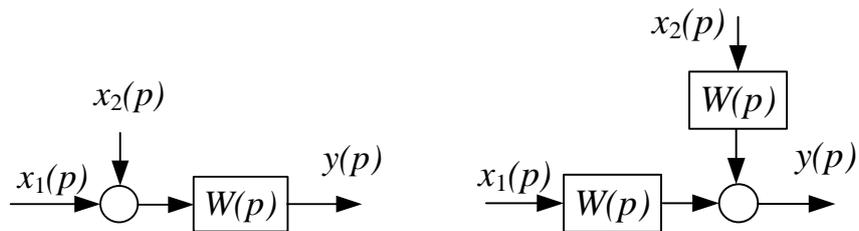


Рис. 15. Перенесение сумматора через звено

$$\begin{aligned}
 y(p) &= W(p) \cdot [x_1(p) + x_2(p)] \\
 &\Downarrow \\
 y(p) &= W(p) \cdot x_1(p) + W(p) \cdot x_2(p)
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

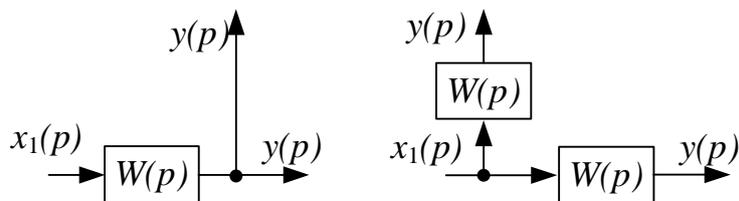


Рис. 16. Перенесение звена через отвод

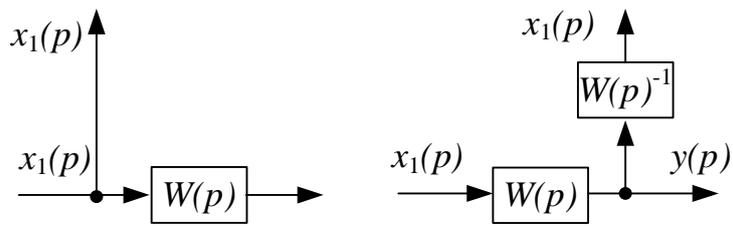


Рис. 17. Перенесение отвода через звено

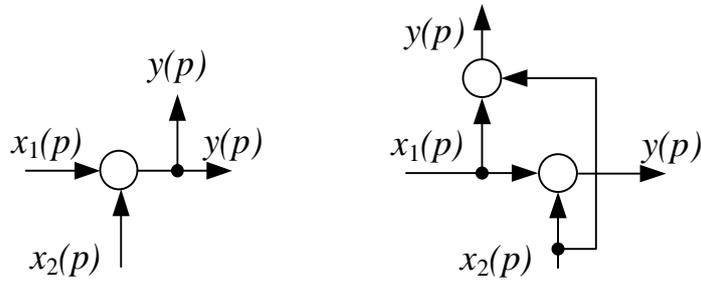


Рис. 18. Перестановка сумматора

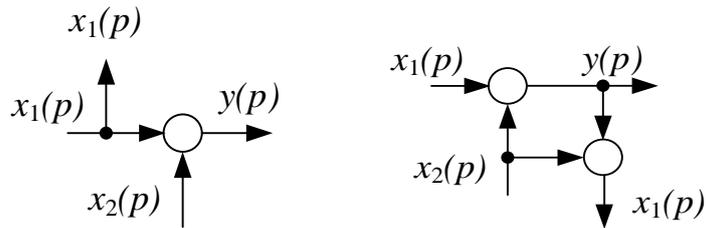


Рис. 19. Перестановка отвода

Пример 2.

Определить передаточную функцию системы рис. 20.

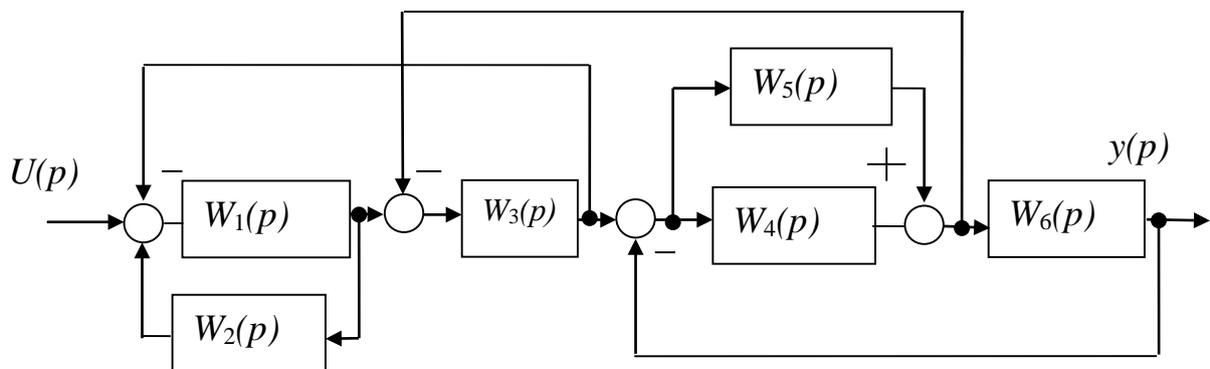


Рис. 20. Пример 2

Чтобы получить передаточную функцию системы, необходимо начать с внутренних локальных контуров и связей, не пересекающихся с другими связями. Для данной схемы сначала целесообразно свернуть участок схемы с $W_1(p)$ и $W_2(p)$. Звенья соединены встречно-параллельно (соединение с отрицательной обратной связью). Следовательно, передаточная функция локального контура будет иметь вид:

$$W_7(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p)} \quad (32)$$

Звенья $W_4(p)$ и $W_5(p)$ соединены параллельно, следовательно передаточная функция соединения имеет вид:

$$W_8(p) = W_4(p) + W_5(p) \quad (33)$$

Тогда исходная структурная схема примет следующий вид (рис. 21).

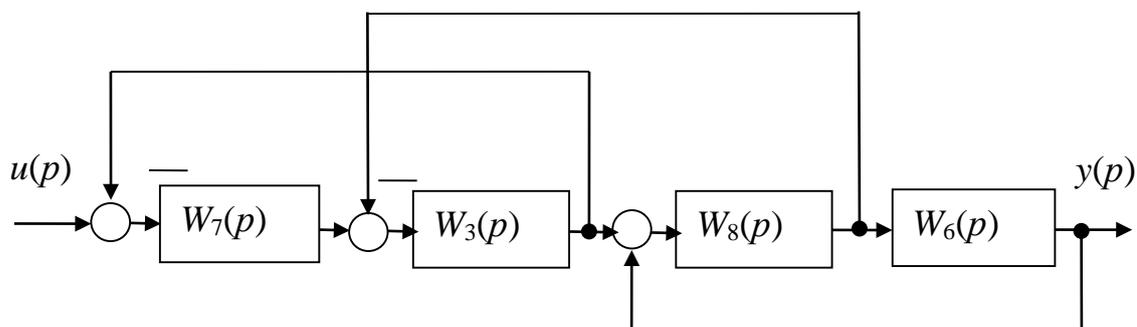


Рис. 21. Преобразованная структурная схема

Для дальнейшей свертки структурной схемы необходимо избавиться от перекрещивающихся связей. Воспользуемся правилом перестановки отвода и звена $W_6(p)$; получим структурную схему в виде рис. 22.

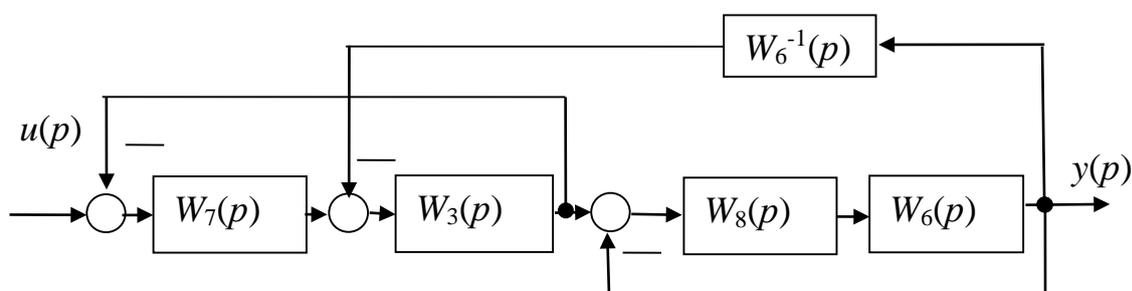


Рис. 22. Преобразованная структурная схема

Далее воспользуемся правилом перестановки звена $W_7(p)$ и сумматора одновременно, используя правило перестановки сумматоров. Таким образом, получена структурная схема в следующем виде (рис. 23):

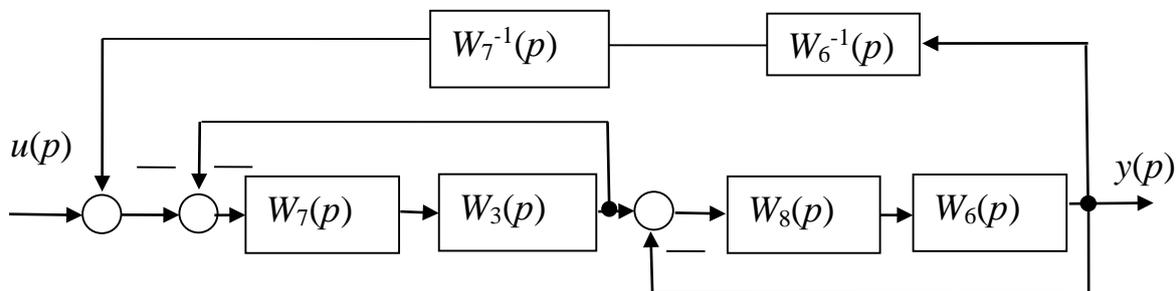


Рис. 23. Преобразованная структурная схема

Как видно из рис. 23, данная схема не содержит перекрещивающихся связей. Пары звеньев $W_7(p) - W_3(p)$ и $W_8(p) - W_6(p)$ соединены последовательно, поэтому структурную схему можно упростить, если ввести в рассмотрение передаточные функции (34):

$$\begin{cases} W_9(p) = W_7(p) \cdot W_3(p) \\ W_{10}(p) = W_8(p) \cdot W_6(p) \end{cases} \quad (34)$$

При этом схема примет вид:

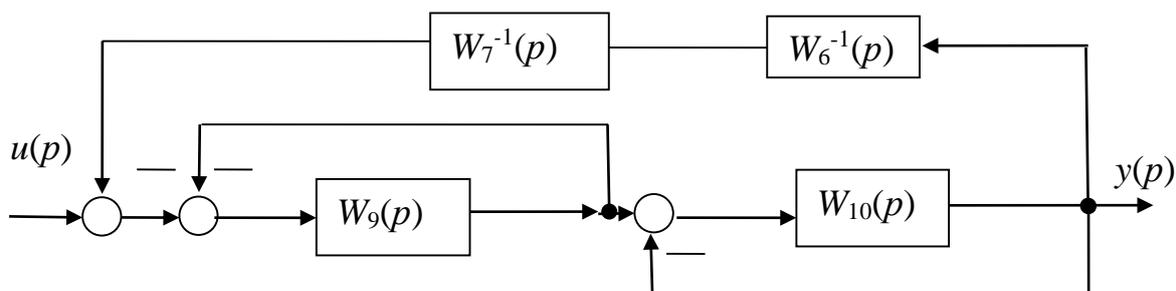


Рис. 24. Преобразованная структурная схема с учетом (34)

Звенья $W_9(p)$ и $W_{10}(p)$ охвачены единичной обратной связью. Свернем эти локальные контуры и получим передаточные функции:

$$\begin{cases} W_{11}(p) = \frac{W_9(p)}{1 + W_9(p)} \\ W_{12}(p) = \frac{W_{10}(p)}{1 + W_{10}(p)} \end{cases} \quad (35)$$

Таким образом, полученная структура имеет один контур:

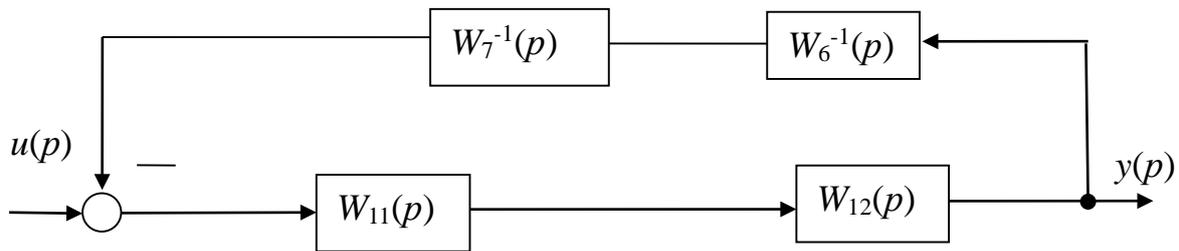


Рис. 25. Преобразованная структурная схема с учетом (35)

Передаточная функция этого контура, а следовательно, и всей системы будет:

$$W_c(p) = \frac{W_{11}(p) \cdot W_{12}(p)}{1 + W_{11}(p) \cdot W_{12}(p) \cdot W_6^{-1}(p) \cdot W_7^{-1}(p)} \quad (36)$$

1.5. Использование теоремы Мейсона при получении передаточных функций САУ. Правило некасающихся контуров (теорема Мейсона)

Путь – это непрерывная направленная последовательность звеньев между двумя переменными, называемыми вход и выход, в которой ни одна переменная не встречается дважды.

Контур – это замкнутый путь, где входная и выходная переменные совпадают.

Некасающийся контур (относительно другого контура или пути) – это контур, который не имеет ни одной общей переменной с другим контуром или путем. Рассмотрим пример, приведенный выше. Данная система содержит:

- два пути:
 - $u-W_1-W_3-W_4-W_6-y$,
 - $u-W_1-W_3-W_5-W_6-y$.
- Шесть контуров:
 - W_1-W_2 ;
 - W_1-W_3-1 ;
 - W_4-W_6-1 ;
 - W_3-W_4-1 ;
 - W_3-W_5-1 ;
 - W_5-W_6-1 .
- Все контуры являются касающимися относительно приведенных путей.

– Контуры некасающиеся друг друга:

- $W1-W2$ и $W4-W6-1$;
- $W1-W2$ и $W5-W6-1$;
- $W1-W3-1$ и $W4-W6-1$;
- $W1-W3-1$ и $W5-W6-1$;
- $W1-W2$ и $W3-W4-1$;
- $W1-W2$ и $W3-W5-1$.

Передаточная функция системы от любой входной переменной к любой выходной переменной, согласно теореме Мейсона [13], может быть определена по формуле:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{\sum_i W_i(p) \cdot \Delta_i(p)}{\Delta(p)}, \quad (37)$$

где i – суммирование по всем путям; $W_i(p)$ – передаточная функция i -го пути.

$$\Delta(p) = 1 - \sum_k W_{k1}(p) + \sum_k W_{k2}(p) - \sum_k W_{k3}(p) + \dots, \quad (38)$$

где $\sum_k W_{k1}(p)$ – сумма передаточных функций всех контуров, входящих в систему;

$\sum_k W_{k2}(p)$ – сумма произведений передаточных функций некасающихся друг друга контуров, взятых по два;

$\sum_k W_{k3}(p)$ – сумма произведений передаточных функций некасающихся друг друга контуров, взятых по три.

$$\Delta_i(p) = 1 - \sum_k W_{ik1}(p) + \sum_k W_{ik2}(p) - \sum_k W_{ik3}(p) + \dots, \quad (39)$$

где $\sum_k W_{ik1}(p)$ – сумма передаточных функций всех контуров, не касающихся i -го пути;

$\sum_k W_{ik2}(p)$ – сумма произведений передаточных функций контуров, не касающихся друг друга и i -го пути, взятых по два;

$\sum_k W_{ik3}(p)$ – сумма произведений передаточных функций контуров, некасающихся друг друга и i -го пути, взятых по три, и т. д.

Пример 3.

Определить передаточную функцию системы рис. 20.

Передаточная функция системы в соответствии с теоремой Мейсона будет (40):

$$W(p) = \frac{W_1 \cdot W_3 \cdot W_4 \cdot W_6 \cdot (1-0) + W_1 \cdot W_3 \cdot W_5 \cdot W_6 \cdot (1-0)}{1 - [(-W_1 \cdot W_2) + (-W_1 \cdot W_3) + (-W_4 \cdot W_6) +$$

$$\overline{[(-W_5 \cdot W_6) + (-W_3 \cdot W_4) + (-W_3 \cdot W_5) +$$

$$\overline{+(-W_3 \cdot W_5)}] + [(-W_1 \cdot W_2) \cdot (-W_4 \cdot W_6) + (-W_1 \cdot W_2) \cdot (-W_5 \cdot W_6) +$$

$$\overline{[+(-W_1 \cdot W_2) \cdot (-W_3 \cdot W_4) + +(-W_1 \cdot W_2) \cdot (-W_3 \cdot W_5) +$$

$$\overline{+(-W_1 \cdot W_3) \cdot (-W_4 \cdot W_6) + (-W_1 \cdot W_3) \cdot (-W_5 \cdot W_6)}] - [0]}$$
(40)

В числителе приведены все указанные пути. В данном случае множитель равен единице ($\Delta_i(p) = (1-0)$), так как все контуры являются касающимися данных путей.

В знаменателе в первых квадратных скобках приведена сумма всех контуров системы. Знак минус в круглых скобках слагаемого указывает на то, что обратная связь в контуре является отрицательной. Если обратная связь в контуре положительная, то и соответствующее слагаемое войдет в сумму со знаком плюс. Во-вторых, квадратных скобках приведена сумма произведений передаточных функций не касающихся контуров, взятых по два. Как видно из формулы, знаки обратных связей также учитываются. В-третьих, квадратных скобках стоит ноль, так как данная система не содержит таких трех контуров, которые не касаются друг друга.

Пример 4.

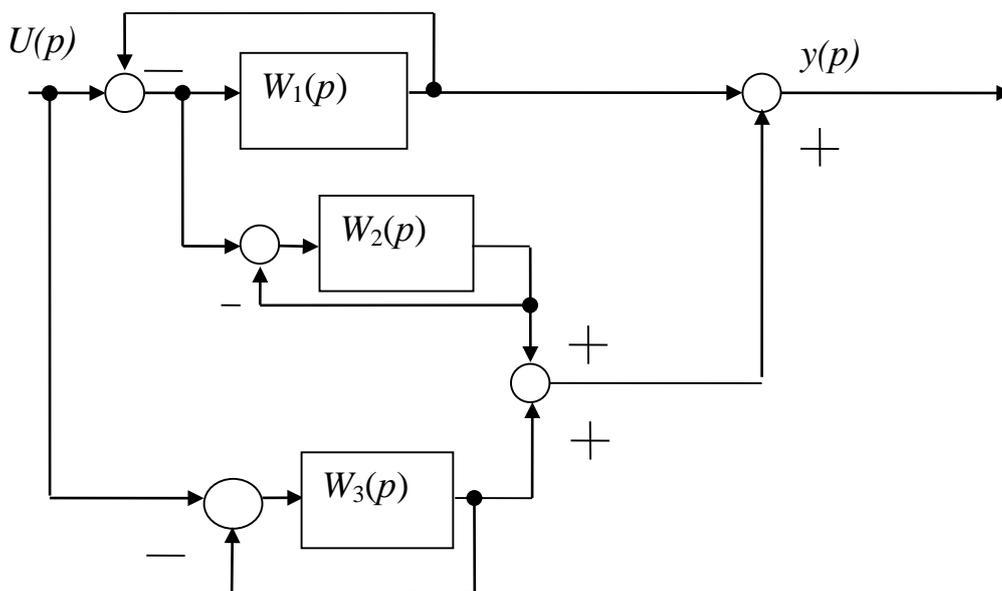


Рис. 26. Пример 4.

Необходимо найти передаточную функцию системы $W(p)$ двумя способами: с помощью структурных преобразований и с помощью теоремы Мейсона.

Рассмотрим первый способ.

Свернем контуры, содержащие передаточные функции $W_2(p)$ и $W_3(p)$ (соединение звеньев с обратной связью).

$$\begin{cases} W_4(p) = \frac{W_2(p)}{1 + W_2(p)} \\ W_5(p) = \frac{W_3(p)}{1 + W_3(p)} \end{cases} \quad (41)$$

Получаем схему на рис. 27.

Далее необходимо преобразовать схему. Для этого, во-первых, воспользуемся правилом перестановки звена $W_1(p)$ и отвода, во-вторых, правилом расщепления и объединения сумматоров.

Теперь свернем контур, содержащий звено $W_1(p)$ в цепи обратной связи, и преобразуем участок схемы с параллельно соединенными звеньями $W_1(p)$ и $W_4(p)$.

$$\begin{cases} W_6(p) = \frac{1}{1 + W_1(p)} \\ W_7(p) = W_1(p) + W_4(p) \end{cases} \quad (42)$$

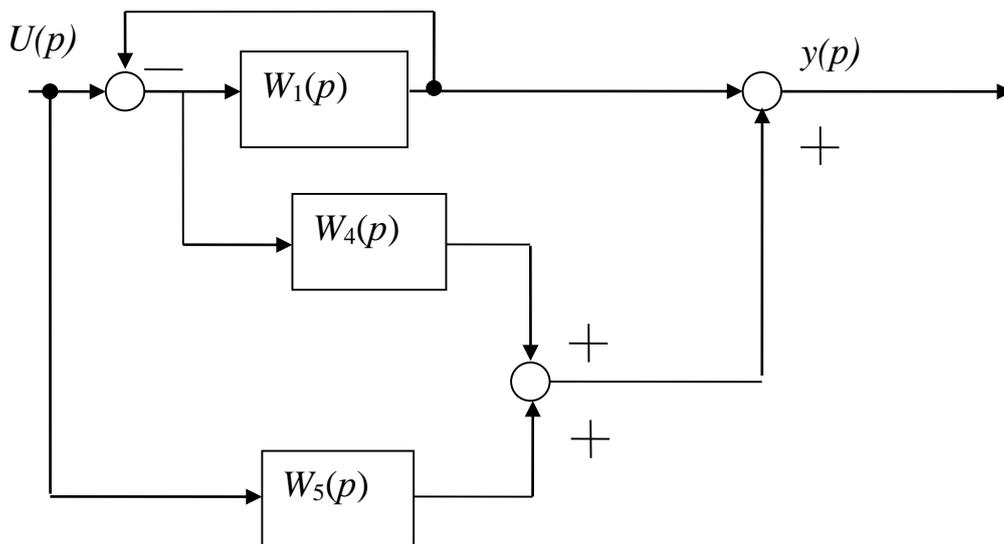


Рис. 27. Преобразованная структурная схема с учетом (41)

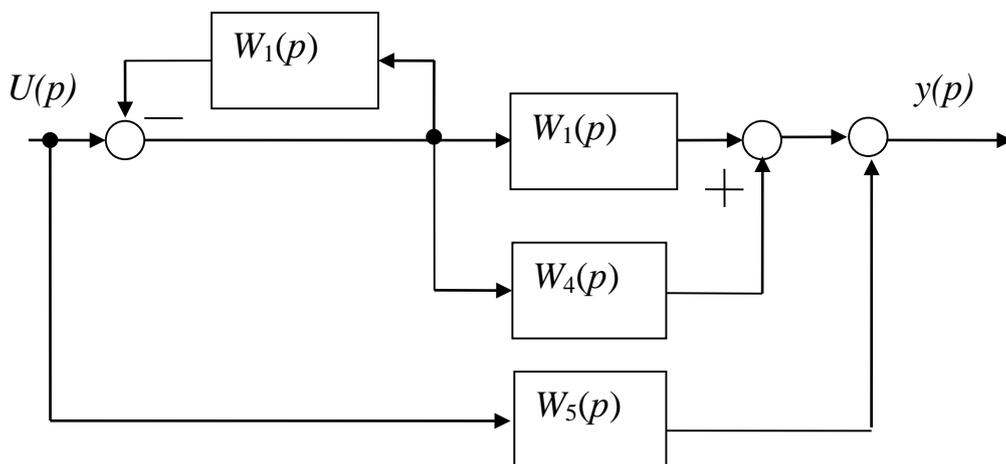


Рис. 28. Преобразованная схема согласно правилам перестановки звена и расщепления и объединения сумматоров

При получении передаточной функции $W_6(p)$ в числителе стоит 1, так как прямой путь контура представляет собой единичную связь.

Схема примет вид:

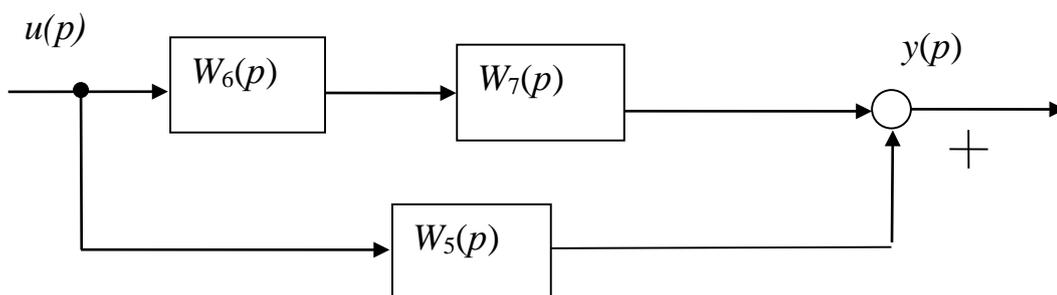


Рис. 29. Преобразованная структурная схема с учетом (42)

Звенья $W_6(p)$ и $W_7(p)$ соединены последовательно:

$$W_8(p) = W_6(p) \cdot W_7(p) \quad (43)$$

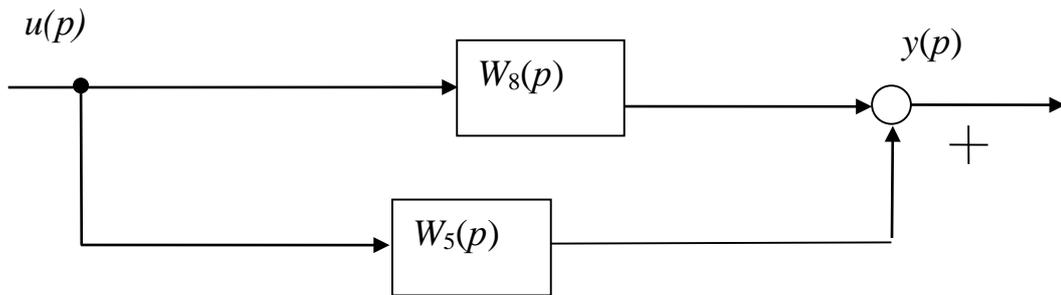


Рис. 30. Преобразованная структурная схема с учетом (43)

Звенья $W_5(p)$ и $W_8(p)$ соединены параллельно. Следовательно, передаточная функция системы примет вид:

$$W_9(p) = W_5(p) + W_8(p) \quad (44)$$

Найдем передаточную функцию системы вторым способом.

– В данной системе три прямых пути:

- $u-W_1(p)-y$;
- $u-W_2(p)-y$;
- $u-W_3(p)-y$.

– Система содержит три контура:

- $W1(p)-1$;
- $W2(p)-1$;
- $W3(p)-1$.

– Не касаются пути и контуры:

- $u-W1(p)-y$ и $W2(p)-1$;
- $u-W1(p)-y$ и $W3(p)-1$;
- $u-W2(p)-y$ и $W3(p)-1$;
- $u-W3(p)-y$ и $W1(p)-1$;
- $u-W3(p)-y$ и $W2(p)-1$.

– Контуры, не касающиеся друг друга:

- $W1(p)-1$ и $W2(p)-1$;
- $W1(p)-1$ и $W3(p)-1$;
- $W2(p)-1$ и $W3(p)-1$.

Найдем передаточную функцию всей системы:

$$\begin{aligned}
W(p) = & \frac{W_1(p) \cdot \{1 - [(-W_2(p)) + (-W_3(p))]\} +}{1 - [(-W_1(p)) + (-W_2(p)) + (-W_3(p))]\} +} \\
& \frac{+ [(-W_2(p)) \cdot (-W_3(p))]\} +}{+ [(-W_1(p)) \cdot (-W_2(p)) +} \\
& \frac{+ W_2(p) \cdot \{1 - [(-W_3(p))]\} + W_3(p) \cdot}{+ (-W_1(p)) \cdot (-W_3(p)) + (-W_2(p)) \cdot (-W_3(p))]\} -} \\
& \frac{\cdot \{1 - [(-W_1(p)) + (-W_2(p))]\} + [(-W_1(p)) + (-W_2(p))]\}}{- [(-W_1(p)) \cdot (-W_2(p)) \cdot (-W_3(p))]\}
\end{aligned} \tag{45}$$

Пример 5.

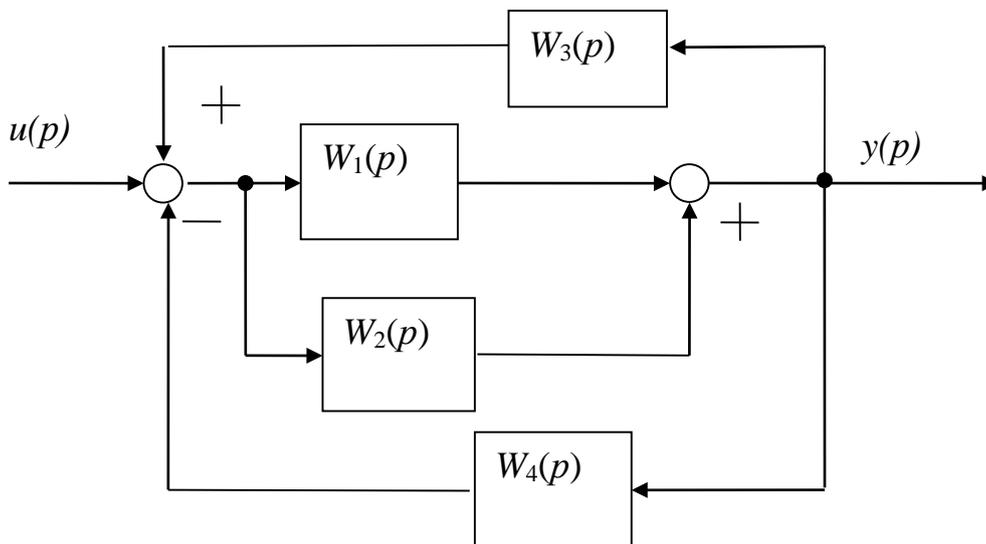


Рис. 31. Пример 5

Необходимо найти передаточную функцию системы двумя способами.

Воспользуемся первым способом. Звенья $W_1(p)$ и $W_2(p)$ соединены параллельно:

$$W_5(p) = W_1(p) + W_2(p) \tag{46}$$

Звенья $W_3(p)$ и также включены параллельно в цепь обратной связи:

$$W_6(p) = W_3(p) - W_4(p) \tag{47}$$

Знак минус в передаточной функции $W_6(p)$ обусловлен тем, что обратная связь $W_4(p)$ является отрицательной.

Свернутая схема примет вид:

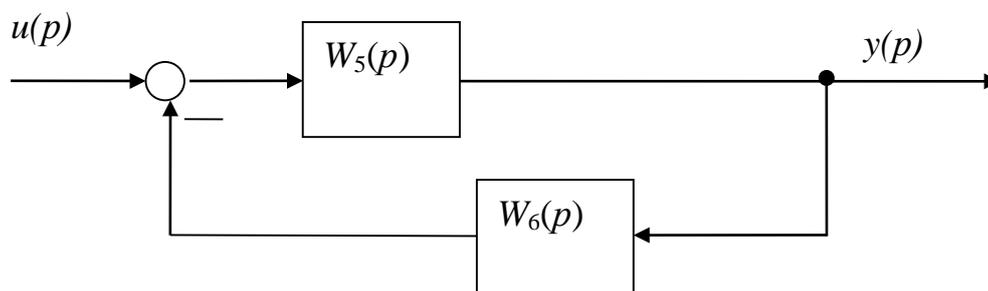


Рис. 32. Преобразованная структурная схема с учетом (46) и (47)

Передаточная функция данного контура (соединение звеньев с положительной обратной связью) имеет вид:

$$W(p) = \frac{W_5(p)}{1 + W_5(p) \cdot W_6(p)} \quad (48)$$

Теперь для нахождения передаточной функции системы воспользуемся теоремой Мейсона.

- В системе два пути:
 - $u - W_1(p) - y$;
 - $u - W_2(p) - y$.
- Система содержит четыре контура:
 - $W_1(p) - W_3(p)$;
 - $W_1(p) - W_4(p)$;
 - $W_2(p) - W_3(p)$;
 - $W_2(p) - W_4(p)$.

Все пути и контуры являются касающимися. Передаточная функция системы примет вид:

$$W(p) = \frac{W_1(p) \cdot (1-0) + W_2(p) \cdot (1-0)}{1 - \left[(W_1(p) \cdot W_3(p)) + (-W_1(p) \cdot W_4(p)) + \right.} \quad (49)$$

$$\left. \overline{(W_2(p) \cdot W_3(p)) + (-W_2(p) \cdot W_4(p)) + 0} \right]$$

При получении передаточной функции необходимо обращать внимание на знак обратной связи в контуре (слагаемое в знаменателе, соответствующее контуру $W_1(p) - W_3(p)$ имеет знак плюс, слагаемое, соответствующие контуру $W_1(p) - W_4(p)$ – знак минус).

1.6. Структурно-матричные преобразования динамических моделей САУ

Если известна математическая модель объекта в одной форме, то можно получить модель в любой другой форме. Переход от структурной схемы системы к векторно-матричной модели (ВММ) удобнее всего осуществлять по детализированной схеме (ДСС). Напомним, что ДСС системы называется ее алгебраизированная структурная модель, состоящая только из элементарных звеньев типа интегрирующих, безынерционных, дифференцирующих и нелинейных с полностью вскрытыми связями между ними.

Заметим, что составление дифференциальных уравнений по структурной схеме является неоднозначной задачей, поскольку выбор переменных состояния для ВММ можно осуществлять различными путями. Однако ВММ с различными базисами (т. е. различными основными переменными состояниями) могут быть формально преобразованы одна в другую.

Будем в дальнейшем выбирать в качестве переменных состояния выходы интегрирующих звеньев.

Методика перехода от ДСС к ВММ может быть следующей:

1. Выбор в качестве переменных состояния $x = [x_1, \dots, x_n]$ выходных переменных интегрирующих звеньев. Размерность n вектора состояния x определяется числом интеграторов в системе.
2. Запись для каждого блока структурной схемы и для сумматоров уравнений, связывающих выходные переменные по правилу: – выход блока равен произведению входной переменной блока на передаточную функцию.
3. Исключение из уравнений промежуточных переменных, не являющихся для системы в целом входными переменными или переменными состояния.
4. Преобразование уравнений к виду, не содержащему оператор Лапласа $\{p\}$ в знаменателе (например, до умножения левой и правой части уравнения на оператор $\{p\}$).
5. Замена оператора $\{p\}$ на производную по времени $\left\{\frac{d}{dt}\right\}$.
6. Решение полученной системы дифференциальных уравнений относительно первых производных переменных состояния, а возможно, и входных переменных.
7. Формирование матрицы объекта A , матрицы управлений B , матрицы наблюдений C , связав в уравнении матрицу D выходы переменных состояния x_1, \dots, x_n , входы U_1, \dots, U_m и выходы y_1, \dots, y_k .

Пример 6.

Перейти от представленной детализированной структурной схемы к векторно-матричной модели. Все промежуточные переменные обозначены через $e_1, e_2 \dots, e_8$ (рис. 33).

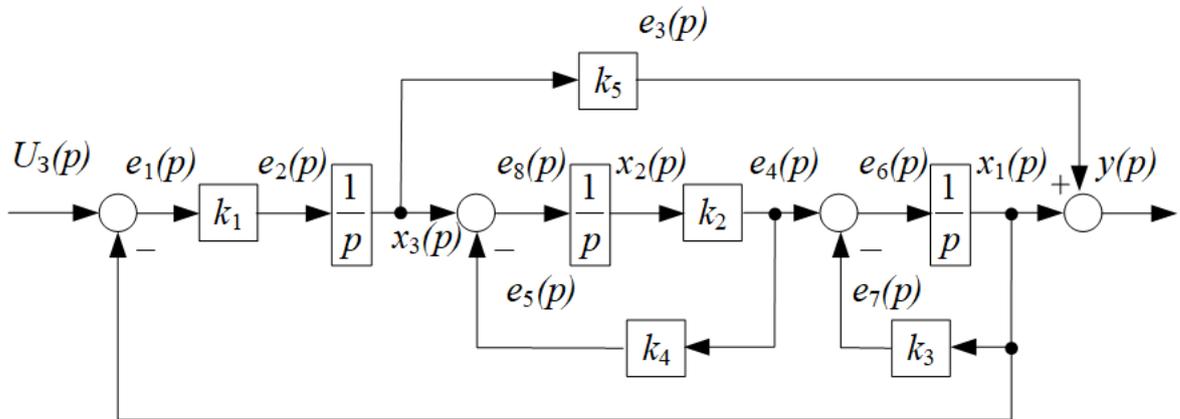


Рис. 33. Детализированная структурная схема (пример 6)

1. Выберем в качестве переменных состояния выходы интеграторов x_1, x_2, x_3 ; следовательно, порядок системы $n = 3$, т. е. $x = [x_1, x_2, x_3]^T \cdot 1/p$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \cdot U_3 \quad (50)$$

Уравнение выхода:

$$y = [c_1 \quad c_2 \quad c_3] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (51)$$

Требуется найти a_{ij}, b_j, c_k .

2. Выпишем для каждого блока и сумматора уравнения, связывающие выходные и входные переменные (число уравнений равно числу блоков плюс число сумматоров).
3. Уравнения для переменных состояния и промежуточных переменных:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{p} \cdot e_6 \\ x_2 = \frac{1}{p} \cdot e_8 \\ x_3 = \frac{1}{p} \cdot e_2 \end{cases} \quad (52)$$

$$\begin{cases} e_1 = U_3 - x_1 \\ e_2 = k_1 \cdot e_1 \\ e_3 = k_5 \cdot x_3 \\ e_4 = k_2 \cdot x_2 \\ e_5 = k_4 \cdot e_4 \\ e_6 = e_4 - e_7 \\ e_7 = k_3 \cdot x_1 \\ e_8 = e_3 - e_5 \end{cases} \quad (53)$$

$$y = x_1 + e_3, \quad (54)$$

где (54) – уравнение выхода.

4. Исключим уравнения для промежуточных переменных, получив, таким образом, уравнения, связывающие переменные состояния x_1 , x_2 , x_3 , вход U_3 и выход y :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{p} \cdot e_6 = \frac{1}{p} \cdot (e_4 - e_7) = \frac{1}{p} \cdot (k_2 \cdot x_2 - k_3 \cdot x_1) \\ x_2 = \frac{1}{p} \cdot e_8 = \frac{1}{p} \cdot (e_3 - e_5) = \frac{1}{p} \cdot (k_5 \cdot x_3 - k_4 \cdot e_4) = \frac{1}{p} \cdot (k_5 \cdot x_3 - k_4 \cdot k_2 \cdot x_2) \\ x_3 = \frac{1}{p} \cdot e_2 = \frac{1}{p} \cdot k_1 \cdot e_1 = \frac{1}{p} \cdot k_1 \cdot (U_3 - x_1) \\ y = x_1 + e_3 = x_1 + k_5 \cdot x_3 \end{cases} \quad (55)$$

5. Осуществим переход к дифференциальным уравнениям. Для этого умножим левую и правую части уравнений, связывающих переменные состояния, на оператор $\{p\}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{p} \cdot (k_2 \cdot x_2 - k_3 \cdot x_1) \Big| \{ \cdot p \} \Rightarrow x_1 \cdot p = k_2 \cdot x_2 - k_3 \cdot x_1 \\ x_2 = \frac{1}{p} \cdot (k_5 \cdot x_3 - k_4 \cdot k_2 \cdot x_2) \Big| \{ \cdot p \} \Rightarrow x_2 \cdot p = k_5 \cdot x_3 - k_4 \cdot k_2 \cdot x_2 \\ x_3 = \frac{1}{p} \cdot k_1 \cdot (U_3 - x_1) \Big| \{ \cdot p \} \Rightarrow x_3 \cdot p = k_1 \cdot (U_3 - x_1) \end{array} \right. \quad (56)$$

6. Заменяем оператор $\{p\}$ на производные по времени $\left\{\frac{d}{dt}\right\}$: $p \rightarrow \frac{d}{dt}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \cdot p = k_2 \cdot x_2 - k_3 \cdot x_1 \Big| \left\{ p \rightarrow \frac{d}{dt} \right\} \Rightarrow \frac{dx_1}{dt} = -k_3 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2 \\ x_2 \cdot p = k_5 \cdot x_3 - k_4 \cdot k_2 \cdot x_2 \Big| \left\{ p \rightarrow \frac{d}{dt} \right\} \Rightarrow \frac{dx_2}{dt} = -k_4 \cdot k_2 \cdot x_2 + k_5 \cdot x_3 \\ x_3 \cdot p = k_1 \cdot (U_3 - x_1) \Big| \left\{ p \rightarrow \frac{d}{dt} \right\} \Rightarrow \frac{dx_3}{dt} = -k_1 \cdot x_1 + k_1 \cdot U_3 \end{array} \right. \quad (57)$$

7. Составление матриц A, B, C:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_3 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_4 \cdot k_2 & k_5 \\ -k_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_1 \end{bmatrix} \cdot U_3 \quad (58)$$

$$y = [c_1 \quad c_2 \quad c_3] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [1 \quad 0 \quad k_5] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (59)$$

$$A = \begin{bmatrix} -k_3 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_4 \cdot k_2 & k_5 \\ -k_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (60)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad (61)$$

$$C = [1 \quad 0 \quad k_5] \quad (62)$$

2. ЧАСТОТНЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИКИ САУ

2.1. Построение логарифмических частотных характеристик разомкнутых САУ

Передаточная функция системы при последовательном соединении звеньев равна произведению передаточных функций этих звеньев:

$$W(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot \dots \cdot W_n(p), \quad (63)$$

где $W_i(p)$ – передаточная функция звена, $i = 1 \dots n$.

Тогда частотная передаточная функция системы:

$$W(j\omega) = W_1(j\omega) \cdot W_2(j\omega) \cdot \dots \cdot W_n(j\omega) \quad (64)$$

Представим частотную передаточную функцию звена в виде:

$$W_i(j\omega) = A_i(\omega) \cdot e^{j\varphi_i(\omega)} \quad (65)$$

Проведем подстановку и получим выражение:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= A_1(\omega) \cdot e^{j\varphi_1(\omega)} \cdot A_2(\omega) \cdot e^{j\varphi_2(\omega)} \cdot \dots \cdot A_n(\omega) \cdot e^{j\varphi_n(\omega)} = \\ &= A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}, \end{aligned} \quad (66)$$

где $A(\omega) = A_1(\omega) \cdot A_2(\omega) \cdot \dots \cdot A_n(\omega)$; $\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \dots + \varphi_n(\omega)$.

Найдем логарифмическую амплитудно-частотную характеристику системы:

$$\begin{aligned} L(\omega) &= 20 \cdot \lg A(\omega) = 20 \cdot \lg A_1(\omega) \cdot A_2(\omega) \cdot \dots \cdot A_n(\omega) = \\ &= 20 \cdot \lg A_1(\omega) + 20 \cdot \lg A_2(\omega) + \dots + 20 \cdot \lg A_n(\omega) \end{aligned} \quad (67)$$

Как видно из формулы, логарифмическая амплитудная характеристика (ЛАХ) системы при последовательном соединении звеньев равна сумме логарифмических частотных характеристик этих звеньев.

Порядок построения ЛЧХ системы:

1. На логарифмической оси частот наносятся точки, соответствующие сопрягающим частотам звеньев, входящих в систему (сопрягающая частота – это величина, обратно-пропорциональная постоянной времени звена).
2. Если в передаточной функции системы $W(p)$ имеются интегрирующие или дифференцирующие звенья типа $W(p) = T \cdot p$ и $W(p) = \frac{1}{T} \cdot p$, то построение результирующей ЛАХ начинается с них.
3. Если в передаточной функции системы $W(p)$ нет интегрирующего или дифференцирующего звена, то построение результирующей

ЛАХ начинается с горизонтального участка, соответствующего коэффициенту усиления $20 \lg K$, K – общий коэффициент усиления системы.

4. Наличие в числителе или знаменателе передаточной функции сомножителей типа $(T \cdot p + 1)$, $(T^2 \cdot p^2 + 2 \cdot T \cdot \xi \cdot p + 1)$, или в общем виде $(T^n \cdot p^n + T^{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + T^2 \cdot p^2 + T \cdot p + 1)$ учитывается тем, что на соответствующих сопрягающих частотах ЛАХ претерпевает излом на величину $\pm n \cdot 20 \frac{\text{дБ}}{\text{дек}}$ (где n – порядок звена) знак плюс соответствует нахождению этих сомножителей в числителе передаточной функции, а знак минус – в знаменателе передаточной функции $W(p)$.
5. Для построения логарифмической фазовой характеристики системы $\varphi(\omega)$ необходимо построить частотные ЛФХ, соответствующие каждому сомножителю, а результирующая ЛФХ получается их геометрическим сложением.

Пример 7.

Рассмотрим передаточную функцию (68).

$$W(p) = \frac{100 \cdot (0,0001 \cdot p^2 + 0,002 \cdot p + 1)}{(p + 1) \cdot (10 \cdot p + 1) \cdot (0,001 \cdot p + 1)} \quad (68)$$

Перед тем как построить ЛЧХ данной системы, необходимо определить коэффициент демпфирования звена второго порядка, которое находится в числителе передаточной функции. Если этот коэффициент меньше единицы, то данное звено оставляем без изменения, если больше – то разбиваем на два звена первого порядка.

Рассмотрим тождество:

$$0,0001 \cdot p^2 + 0,002 \cdot p + 1 = T_1^2 \cdot p^2 + 2 \cdot T_1 \cdot \xi \cdot p + 1, \quad (69)$$

где ξ – коэффициент демпфирования.

Из этого тождества следует: $T_1^2 = 0,0001$ $2 \cdot T_1 \cdot \xi = 0,002$, откуда получаем $T_1 = 0,01$ с; $\xi = 0,1$. Следовательно, звено второго порядка является колебательным и остается без изменения.

Далее, в соответствии с алгоритмом построения ЛЧХ, необходимо определить сопрягающие частоты:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \frac{1}{T_1} = 100c^{-1} \\ \omega_2 = \frac{1}{T_2} = 1c^{-1} \\ \omega_3 = \frac{1}{T_3} = \frac{1}{10} = 0,1c^{-1} \\ \omega_4 = \frac{1}{T_4} = \frac{1}{0,001} = 1000c^{-1} \end{array} \right. \quad (70)$$

Нанесем данные частоты на логарифмическую ось абсцисс. В данной передаточной функции отсутствуют интегрирующие и дифференцирующие звенья. Следовательно, построение ЛАХ необходимо начать с горизонтального участка $20\lg K$ (рис. 34).

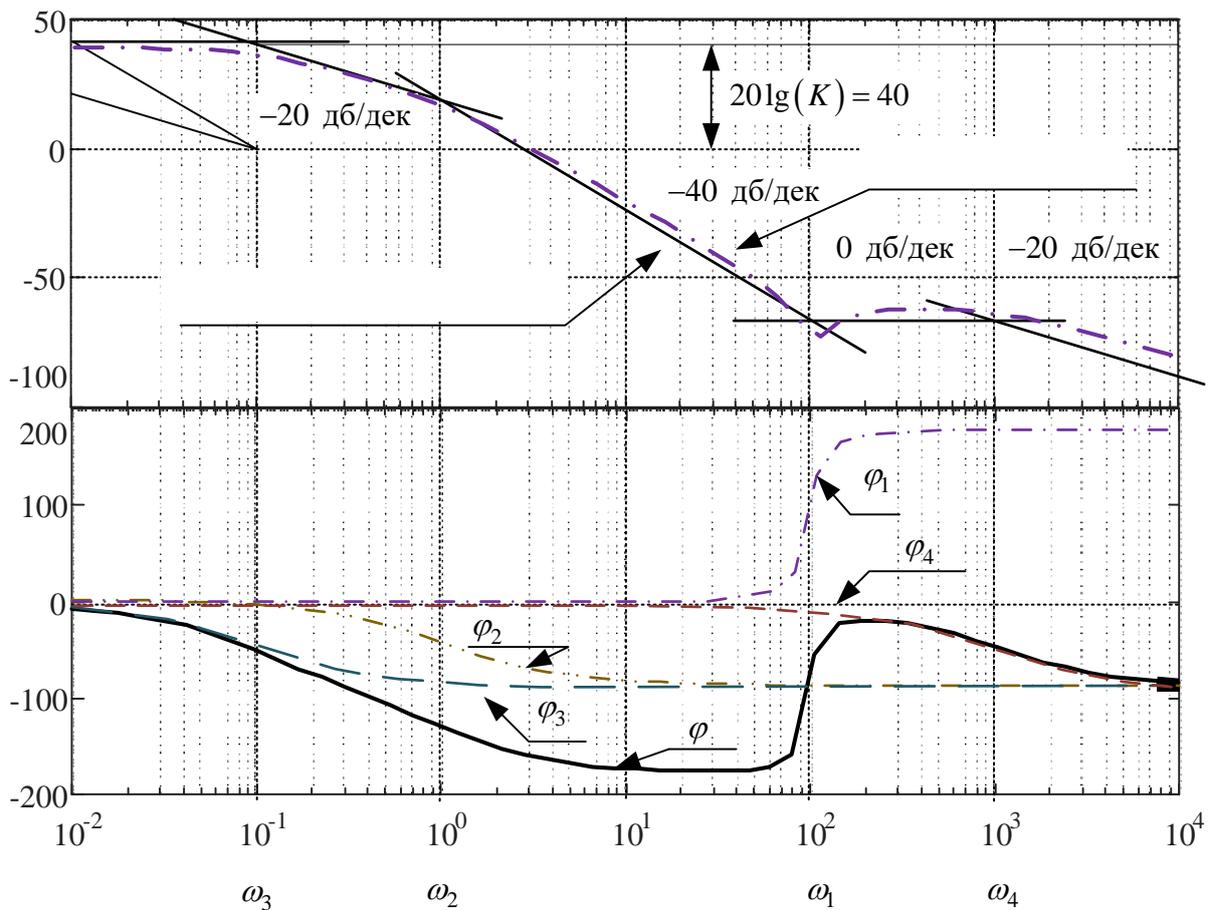


Рис. 34. Логарифмическая характеристика системы (пример 7)

В рассматриваемом примере $K = 100$. Тогда $20 \lg K = 20 \lg 100 = 40 \text{дб}$. Данная прямая находится в области низких частот слева от всех сопрягающих частот (рис. 34).

На частоте ω_3 прямая претерпевает излом на -20дб/дек , так как эта частота относится к 1-му звену первого порядка (апериодическому звену), находящемуся в знаменателе передаточной функции. Прямую с этим наклоном проводим до частоты ω_2 (рис. 34).

На частоте ω_2 прямая претерпевает излом на -20дб/дек . Суммарный наклон прямой теперь составляет -40дб/дек . С этим наклоном ведем прямую до частоты ω_1 (рис. 34).

Частота ω_1 относится к звену второго порядка, расположенного в числителе передаточной функции (форсирующему звену второго порядка). Следовательно, результирующая ЛАХ на этой частоте претерпевает излом на $+40 \text{дб/дек}$ и на отрезке частот от ω_1 до ω_4 пройдет горизонтально (рис. 34).

На частоте ω_4 снова изменит свой наклон на -20дб/дек .

На рис. 34 показана сплошной линией асимптотическая ЛАХ, а штрихпунктирной – точная ЛАХ построенная с учетом поправок на изломах асимптотической характеристики системы.

Для построения ЛФХ системы $\varphi(\omega)$ строят фазовые характеристики каждого звена в отдельности, а затем их складывают геометрически рис. 34.

Пример 8.

Рассмотрим передаточную функцию (71):

$$W(p) = \frac{10 \cdot (0,01 \cdot p + 1)}{p \cdot (p + 1) \cdot (0,001 \cdot p + 1)} \quad (71)$$

Найдем сопрягающие частоты

$$\omega_1 = 10c^{-1}, \omega_2 = 100c^{-1}, \omega_3 = 1c^{-1}, \omega_4 = 1000c^{-1}. \quad (72)$$

Нанесем их на логарифмическую частотную ось (см. рис. 35). В данной передаточной функции присутствует интегрирующее звено $\left(\frac{10}{p}\right)$, поэтому построение ЛАХ начинается с него. Для этого через частоту среза, частота где $\lg(\omega_c) = 0$ проводится прямая линия с наклоном -20дб/дек , частотой среза будет $\omega_c = \omega_1 = 10c^{-1}$. На частоте $\omega_3 = 1c^{-1}$ данная прямая претерпевает излом еще на -20дб/дек , так как данная частота относится к апериодическому звену $\left(\frac{1}{(p+1)}\right)$.

До частоты $\omega_2 = 100c^{-1}$ прямая будет проходить с наклоном -40 дб/дек. На частоте ω_2 прямая изменит наклон на $+20$ дб/дек, так как эта частота относится к звену первого порядка, расположенного в числителе (форсирующему звену) $(0.01 \cdot p + 1)$. Данный наклон (-20 дб/дек) сохранится до частоты $\omega_4 = 1000c^{-1}$, соответствующей апериодическому звену $\left(\frac{1}{(0.001 \cdot p + 1)}\right)$. На частоте ω_4 результирующая ЛАХ ($W(p)$) снова претерпит излом на -20 дб/дек и далее будет иметь наклон -40 дб/дек.

Построение результирующей ЛФХ представлено на рис. 35. Как и в предыдущем случае, сначала строятся фазовые характеристики каждого звена в отдельности, а затем результирующая характеристика получается путем их геометрического сложения. В данном случае результирующая ЛФХ $\varphi(\omega)$ начинается не от нуля, а от $-\pi/2$ из-за наличия интегрирующего звена.

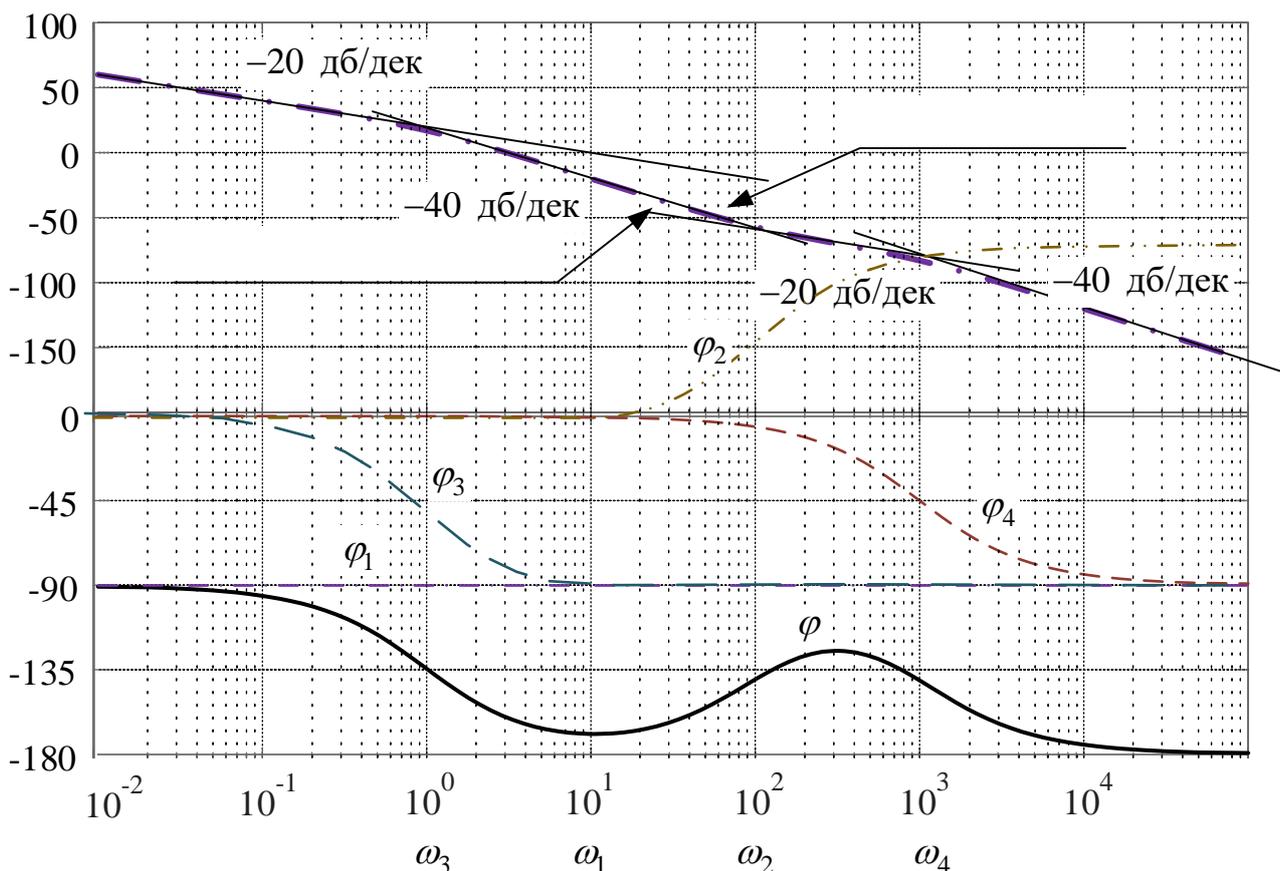


Рис. 35. Логарифмическая характеристика системы (пример 8)

2.2. Построение логарифмических частотных характеристик замкнутых САУ

Для последовательного соединения звеньев САУ, результирующие ЛАХ и ЛФХ могут быть получены графическим сложением соответствующих частотных характеристик звеньев.

Для соединений типа согласно-параллельного (рис. 36а) или встречно-параллельного (рис. 36б) (замкнутая САУ) построение результирующих логарифмических частотных характеристик осуществляется несколько сложнее.

Если звенья с частотными передаточными функциями (ЧПФ) $W_1(j\omega) = A_1 \cdot e^{j\varphi_1}$ и $W_2(j\omega) = A_2 \cdot e^{j\varphi_2}$ соединены согласно-параллельно, то результирующая ЧПФ:

$$W(j\omega) = W_1(j\omega) + W_2(j\omega) = A_1(\omega) \cdot e^{j\varphi_1(\omega)} + A_2(\omega) \cdot e^{j\varphi_2(\omega)} \quad (73)$$

Звену с большей амплитудой присвоим индекс «Б», а с меньшей – «М».

$$W(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = A_B(\omega) \cdot e^{j\varphi_B(\omega)} \cdot \left(1 + \frac{A_M}{A_B} \cdot e^{j(\varphi_M - \varphi_B)(\omega)} \right) \quad (74)$$

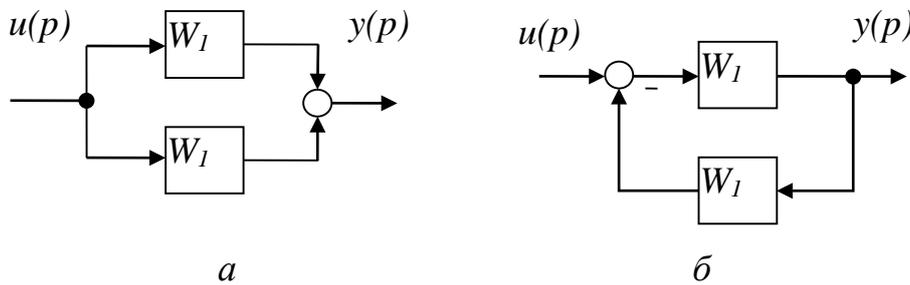


Рис. 36. Соединение звеньев:

а – согласно-параллельное соединение; б – встречно-параллельное соединение

Перепишем выражение (73) в виде произведения звена с большей амплитудой и эквивалентного последовательного звена:

$$W(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = A_B(\omega) \cdot e^{j\varphi_B(\omega)} \cdot W_{\Pi}(\omega) \quad (75)$$

$$W_{\Pi}(j\omega) = 1 + A_{\Pi} \cdot e^{j\varphi_{\Pi}(\omega)}, \quad (76)$$

где $A_{\Pi} = A_M/A_B$; $\varphi_{\Pi}(\omega) = \varphi_M - \varphi_B$ при условии, что $A_M/A_B \leq 1$.

Тогда выражения для ординат результирующих характеристик примут вид:

$$\left. \begin{aligned} L(\omega) &= L_{\text{Б}}(\omega) + L_{\text{П}}(\omega) \\ \varphi(\omega) &= \varphi_{\text{Б}}(\omega) + \varphi_{\text{П}}(\omega) \end{aligned} \right\}, \quad (77)$$

где $L(\omega) = 20 \cdot \lg A(\omega)$; $L_{\text{Б}}(\omega) = 20 \cdot \lg A_{\text{Б}}(\omega)$; $L_{\text{П}}(\omega) = 20 \cdot \lg A_{\text{П}}(\omega)$.

Из выражения (77) видно, что ординаты искомым частотных характеристик при согласно-параллельном соединении звеньев (рис. 36а) определяется ординатами характеристик звена с большей на данной частоте амплитудой $A_{\text{Б}}$, сложенной с поправкой, определяемой по ординатам характеристик эквивалентного последовательного звена.

Для замкнутой САУ (рис. 36б) ЧПФ имеет вид:

$$W(j\omega) = \frac{A_1 \cdot e^{j\varphi_1}}{1 + A_1 \cdot e^{j\varphi_1} A_2 \cdot e^{j\varphi_2}} = \frac{A_1 \cdot e^{j\varphi_1}}{1 + \frac{A_1}{A_{2\text{обр}}} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_{2\text{обр}})}}; \quad (78)$$

где $A_{2\text{обр}} = 1/A_2$; $\varphi_{2\text{обр}} = -\varphi_2$ – обратные значения амплитудной и фазовой характеристик звена в обратной связи.

Тогда в диапазоне частот, где $A_1 < A_{2\text{обр}}$ осуществляется замена $A_{\text{М}} = A_1$; $\varphi_{\text{М}} = \varphi_1$; $A_{\text{Б}} = A_{2\text{обр}}$; $\varphi_{\text{Б}} = \varphi_{2\text{обр}}$, и для результирующей ЧПФ получим:

$$W(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = \frac{A_{\text{М}} \cdot e^{j\varphi_{\text{М}}(\omega)}}{1 + A_{\text{П}} \cdot e^{j\varphi_{\text{П}}(\omega)}}, \quad (79)$$

где $A_{\text{П}} = A_{\text{М}}/A_{\text{Б}} \leq 1$; $\varphi_{\text{П}} = \varphi_{\text{М}} - \varphi_{\text{Б}}$.

Введем ЧПФ поправочного эквивалентного звена $W(j\omega) = 1 + A_{\text{П}} \cdot e^{j\varphi_{\text{П}}(\omega)} = A_{\text{П}} \cdot e^{j\varphi_{\text{П}}(\omega)}$ и запишем выражения для результирующих ЛАХ и ЛФХ:

$$\left. \begin{aligned} L(\omega) &= L_{\text{М}}(\omega) - L_{\text{П}}(\omega) \\ \varphi(\omega) &= \varphi_{\text{М}}(\omega) - \varphi_{\text{П}}(\omega) \end{aligned} \right\}, \quad (80)$$

где $L(\omega) = 20 \cdot \lg A(\omega)$; $L_{\text{М}}(\omega) = 20 \cdot \lg A_{\text{М}}(\omega)$; $L_{\text{П}}(\omega) = 20 \cdot \lg A_{\text{П}}(\omega)$.

В диапазоне частот, где $A_1 > A_{2\text{обр}}$ осуществляется замена $A_{\text{Б}} = A_1$; $\varphi_{\text{Б}} = \varphi_1$; $A_{\text{М}} = A_{2\text{обр}}$; $\varphi_{\text{М}} = \varphi_{2\text{обр}}$, которая также приводит к форме (79) для нахождения искомым характеристик.

Таким образом, ординаты искомым частотных характеристик при встречно-параллельном соединении звеньев определяется в большей мере ординатами характеристик звена с меньшей на данной частоте амплитудой $A_{\text{Л}}$ за вычетом поправок, вычисляемых по значению ординат характеристик исходных звеньев.

Подчеркнем, что для звена, стоящего в обратной связи, необходимо изображать обратные ЛЧХ, которые могут быть получены из исходных $L_2(\omega)$ и $\varphi_2(\omega)$ симметричным отражением относительно частотной оси.

На практике используется простейший способ приближенного построения ЛЧХ параллельных соединений, основанный на аппроксимированных характеристиках. Данный подход правомерен для систем, в которых отсутствуют соединения, приводящие к возникновению резонансных всплесков ЛАХ или к появлению, но минимально-фазовых эквивалентных звеньев.

Правила построения аппроксимированных ЛАХ параллельных соединений получаются из сформулированных выше правил (76) и (79) построения точных ЛЧХ таких соединений в предположении, что амплитудные поправки равны нулю.

Тогда правило для построения приближенных ЛЧХ может быть сформулировано следующим образом.

Результирующая ЛАХ параллельно соединенных звеньев проводится по верхним участкам ЛАХ составляющих звеньев при согласно-параллельном соединении и по нижним участкам ЛАХ при встречно-параллельном соединении, причем при изображении исходных ЛАХ при встречно-параллельном соединении для звена в обратной связи изображается обратная ЛАХ.

Пример 9.

Построить ЛАХ для согласно-параллельного соединения интегрирующего звена и апериодического первого порядка (рис. 37), где $k_1 = 100$; $k_2 = 1000$, $T = 0,1$ с.

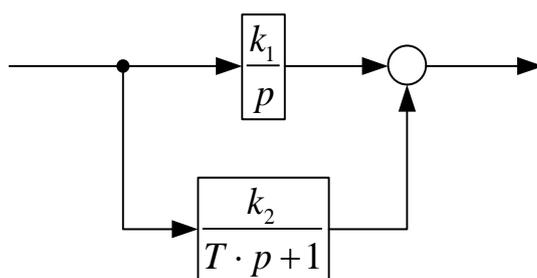


Рис. 37. ЛАХ для согласно-параллельного соединения интегрирующего звена и апериодического первого порядка (пример 9)

Решение. Изобразим ЛАХ указанных звеньев.

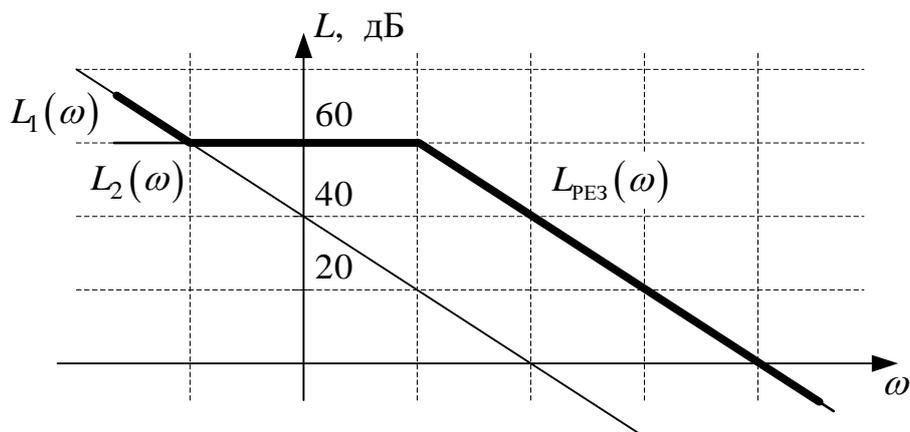


Рис. 38. Построение ЛАХ

Обозначим ЛАХ интегрирующего звена $L_1(\omega)$, а ЛАХ аperiodического звена $L_2(\omega)$. Очевидно, что в диапазоне частот $0 < \omega < 0,1\text{с}^{-1}$ выше расположена $L_1(\omega)$, а при $\omega > 0,1\text{с}^{-1}$ выше ЛАХ аperiodического звена. Следовательно, результирующая ЛАХ $L_{\text{рез}}(\omega)$ при $\omega < 0,1\text{с}^{-1}$ проходит по $L_1(\omega)$, а при $\omega \geq 0,1\text{с}^{-1}$ – по ломаной $L_2(\omega)$.

Пример 10.

Построить ЛЧХ для встречно-параллельного соединения звеньев (рис. 39):

$$W_{\text{ИП}}(p) = \frac{k_1}{p}, \quad W_{\text{ОС}}(p) = k_2; \quad k_1 = 100; \quad k_2 = 0,01.$$

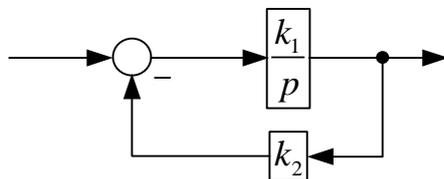


Рис. 39. ЛАХ для встречно-параллельного соединения звеньев (пример 10)

Изобразим ЛАХ интегратора, стоящего в прямой связи ($L_{\text{ИП}}(\omega)$) и отрицательную ЛАХ звена в обратной связи: ($-L_{\text{ОС}}(\omega)$), представляющую собой прямую, параллельную частотной оси, проходящую на уровне +40дБ. Проводя

результующую ЛАХ $L_{\text{PE3}}(\omega)$ по нижним участкам, имеем ЛАХ $L_{\text{PE3}}(\omega) = L_{\text{OC}}(\omega)$ при $\omega < 1\text{c}^{-1}$ и $L_{\text{PE3}}(\omega) = L_{\text{TP}}(\omega)$ при $\omega \geq 1\text{c}^{-1}$.

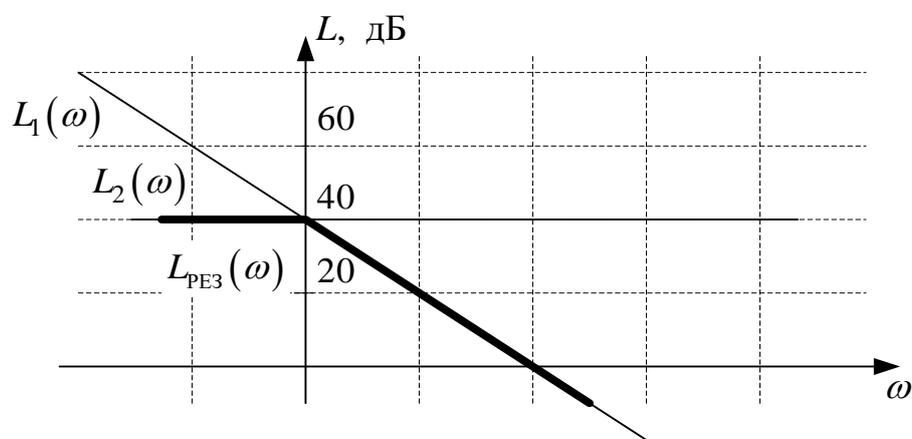


Рис. 40. Построение ЛАХ

3. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНОЙ САУ

3.1. Основные определения

Автоматическая система, прежде всего, должна быть работоспособна, то есть после пуска она должна нормально функционировать в заданных режимах, в том числе и при действиях различных возмущающих воздействии.

Данное свойство в теории автоматического управления связывают с понятием устойчивости. Устойчивость САУ не гарантирует требуемого качества процессов в объекте, а лишь означает способность возвращаться с определенной точностью в первоначальное положение после того, как силы, выведшие систему из этого положения, сняты.

Устойчивость – это свойство системы возвращаться в исходный или близкий к нему установившийся режим после всякого выхода из него в результате какого-либо воздействия.

Например:

- Шар, находящийся на вершине горки, является примером неустойчивой системы, так как при приложении к нему конечного возмущения (сторонней силы) он скатится с горки и в исходное положение не вернется.
- Шар, находящийся во впадине, является примером устойчивой системы, так как при приложении к нему конечного возмущения он вернется в исходное положение.
- Шар, находящийся на плоскости, является примером системы, находящейся на границе устойчивости, так как при приложении к нему конечного возмущения он остановится, но уже в другом положении.

Система называется устойчивой, если из возмущенного состояния она перейдет в некоторую конечную область, окружающую невозмущенное состояние равновесия.

Аналогично случаю положения равновесия заданное движение можно назвать невозмущенным движением. Приложение внешних сил к рассматриваемой системе вызовет отклонение действительного движения от заданного.

Проявлением, по которому можно судить об устойчивости или неустойчивости системы, является характер изменения ее сигналов во времени, например, управляемой величины $x(t)$. Если управляемая величина $x(t)$ после прекращения изменения, например, задающего воздействия $x_3(t)$ становится с течением времени постоянной, то система ведет себя устойчиво. Если же управляемая величина $x(t)$ – возрастает, то система ведет себя неустойчиво (рис. 41).

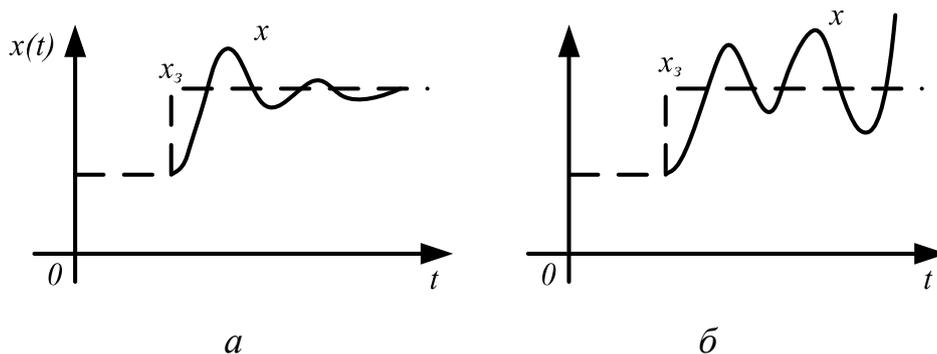


Рис. 41. Графики изменения сигналов АСУ во времени:
a – устойчивая АСУ; *б* – неустойчивая АСУ

Понятие устойчивости можно распространить и на случай движения некоторой системы. Пусть ее состояние определяется независимыми координатами $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$. Заданное движение системы определяется некоторым законом изменения координат: $x_{10}(t)$, $x_{20}(t)$, ..., $x_{n0}(t)$.

Аналогично случаю равновесия положение заданное движение можно назвать невозмущенным движением. Приложение внешних сил к рассматриваемой системе вызовет отклонение действительного движения от заданного: $x_1(t) \neq x_{10}(t)$, $x_2(t) \neq x_{20}(t)$, ..., $x_n(t) \neq x_{n0}(t)$. Это движение будет возмущенным.

Заданное невозмущенное движение будет устойчивым, если в результате приложения внешних сил, которые затем снимаются, возмущенное движение по истечении некоторого времени войдет в заданную область:

$$|x_i(t) - x_{i0}(t)| \leq \varepsilon_i \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Рассмотрим движение систем на рис. 42.

Все три системы были выведены из положения равновесия x^* в точку «О», которая расположена внутри δ – окрестности, затем возмущающие силы были сняты и системы начали движение по трем траекториям:

- траектория «1» не выходит из ε – области;
- траектория «2» стремится к положению равновесия к x^* ;
- траектория «3» вышла из ε – области.

Если система движется по траектории «1», то говорят, что такая система устойчива по Ляпунову.

Система устойчива по Ляпунову, если при начальном отклонении от положения равновесия x^* не более чем на $\delta > 0$, траектория движения

отклоняется не более чем на $\varepsilon > 0$, причем для каждого ε можно найти соответствующее ему $\delta(\varepsilon)$.

$$|x_0 - x^*| < \delta \Rightarrow |x(t) - x^*| < \varepsilon \text{ при всех } t > 0 \quad (81)$$

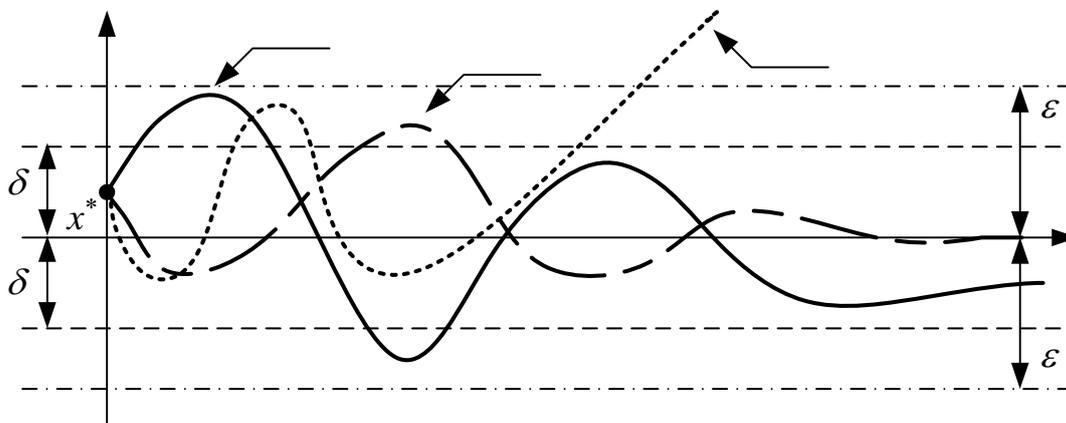


Рис. 42. Движение систем после снятия возмущающего воздействия:
 1 – система устойчива по Ляпунову; 2 – система асимптотически устойчива;
 3 – система не устойчива

Для системы, которая движется по траектории «2» говорят, что она асимптотически устойчива.

Асимптотически устойчива система, если система устойчива по Ляпунову, и с течением времени возвращается в положение равновесия x^* .

$$|x(t) - x^*| \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty \quad (82)$$

Траектория «3» свидетельствует о неустойчивой системе.

Причинами неправильного действия главной обратной связи АСУ являются:

– Выполнение главной обратной связи АСУ по ошибке положительной вместо отрицательной, что практически при любых параметрах делает систему неустойчивой.

– Значительная инерционность элементов замкнутого контура АСУ (например, объекта управления), из-за которой в режиме колебаний системы сигнал главной обратной связи (например, управляемая величина) значительно отстает от входного сигнала (например, задающего воздействия) и оказывается с ним в фазе. Это означает, что связь, выполненная конструктивно как отрицательная, в динамическом режиме (режиме гармонических колебаний) начинает на определенной частоте действовать как положительная. Это ведет к раскачиванию системы и нарушению ее устойчивости.

Существует много критериев устойчивости объекта в зависимости от типов его моделей. Обычно применяют два подхода к определению устойчивости:

- прямой (непосредственный);
- косвенный;
 - алгебраический;
 - частотный.

При прямом подходе записывают любой процесс управления и, зная его желаемое состояние, исходя из определения устойчивости и неустойчивости, делают заключения о его качествах. Однако прямой метод исследования устойчивости объекта не всегда целесообразен, а иногда и невозможен. В этой ситуации для исследования устойчивости объекта используются обычно следующие косвенные методы.

Задачами анализа устойчивости АСУ обычно являются:

- определение устойчивости или неустойчивости системы при заданных параметрах;
- определение допустимого по условиям устойчивости диапазона изменения некоторых незадаваемых параметров системы;
- выяснение принципиальной возможности устойчивости системы при заданной ее структуре.

Получается, что устойчивость определяется характером движения системы, когда воздействия, выведшие ее из состояния равновесия, прекратили действовать или изменяться во времени. Такое движение системы называют свободным. Оно происходит за счет внутренней энергии самой системы и зависит только от ее свойств (параметров).

3.2. Алгебраические критерии устойчивости

3.2.1. Необходимое и достаточное условие устойчивости непрерывной системы управления (корневой критерий)

Свободное движение линейной или линеаризованной АСУ описывается однородным дифференциальным уравнением:

$$a_0 \cdot \frac{d^n \cdot x(t)}{dt^n} + a_1 \cdot \frac{d^{n-1} \cdot x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_n \cdot x(t) = 0, \quad (83)$$

где $x(t)$ – свободная составляющая выходной (управляемой) величины системы.

Вынужденная составляющая выходной величины, зависящая от вида внешнего воздействия и соответственно от правой части уравнения, на устойчивость системы не влияет.

С математической точки зрения:

- система устойчива, если свободная составляющая $x(t)$ переходного процесса с течением времени стремится к нулю;
- система неустойчива, если свободная составляющая $x(t)$ переходного процесса с течением времени неограниченно возрастает;

- система находится на границе устойчивости, если свободная составляющая $x(t)$ переходного процесса с течением времени не стремится ни к нулю, ни к бесконечности.

Решение уравнения (83) равно сумме:

$$x(t) = \sum_{k=1}^n C_k \cdot e^{-p_k \cdot t}, \quad (84)$$

где C_k – постоянные, зависящие от начальных условий; p_k – корни характеристического уравнения:

$$a_0 \cdot p^n + a_1 \cdot p^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (85)$$

Корни характеристического уравнения могут быть действительными ($p_k = \alpha_k$), мнимыми ($p_k = \pm j\beta_k$) и комплексными ($p_k = \alpha \pm j\beta_k$). При этом комплексные корни всегда попарно сопряжены между собой: если есть корень с положительной мнимой частью, то обязательно существует корень с такой же по модулю, но отрицательной мнимой частью.

Переходная составляющая (84) $x(t)$ при времени $t \rightarrow \infty$ стремится к нулю лишь в том случае, если каждое слагаемое вида $C_k \cdot e^{-p_k \cdot t} \rightarrow 0$. Характер этой функции времени зависит от вида корня p_k .

Общее математическое условие устойчивости: для устойчивости линейной АСУ необходимо и достаточно, чтобы действительные части всех корней характеристического уравнения системы были отрицательными (или чтобы все корни характеристического уравнения системы располагались в левой части комплексной плоскости).

Устойчивость системы зависит только от вида корней характеристического уравнения и не зависит от характера внешних воздействий на систему, т. е. устойчивость есть внутреннее свойство системы, присущее ей вне зависимости от внешних условий.

Если хотя бы один корень имеет положительную действительную часть (располагается в правой части комплексной плоскости), то система будет неустойчивой.

Мнимая ось является границей устойчивости в плоскости корней. Если характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней, то в системе устанавливаются незатухающие гармонические колебания, в этом случае говорят, что система находится на *границе устойчивости*.

Пример 11.

Рассмотрим систему с единичной обратной связью на рис. 43.

Передаточная функция замкнутой системы будет (86):

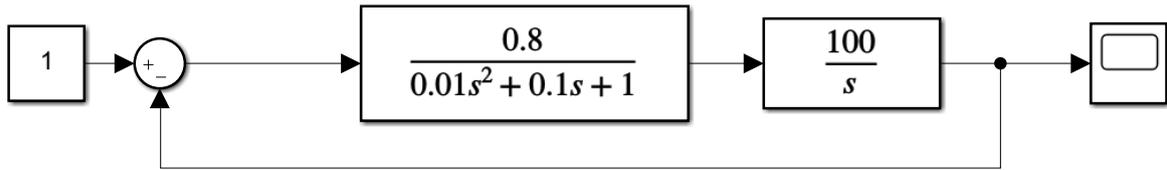


Рис. 43. Система с единичной обратной связью

$$\begin{aligned}
 W_{\text{зам}}(s) &= \frac{\frac{0.8}{0.01 \cdot s^2 + 0.1 \cdot s + 1} \cdot \frac{100}{s}}{1 + \frac{0.8}{0.01 \cdot s^2 + 0.1 \cdot s + 1} \cdot \frac{100}{s}} = \\
 &= \frac{0.8 \cdot 100}{0.01 \cdot s^3 + 0.1 \cdot s^2 + s + 0.8 \cdot 100}
 \end{aligned}
 \tag{86}$$

Эта система будет устойчивой, если вещественные части корней характеристического полинома будут отрицательными.

С помощью пакета Mathcad такую проверку можно сделать следующим образом рис. 44.

$$0.01 \cdot s^3 + 0.1 \cdot s^2 + s + 0.8 \cdot 100 \xrightarrow{\text{solve, } s} \begin{bmatrix} -21.992803147365323203 \\ 5.9964015736826616014 - 18.105207178385033151i \\ 5.9964015736826616014 + 18.105207178385033151i \end{bmatrix}$$

Рис. 44. Определение корней характеристического полинома

Из рис. 44 следует, что система не устойчива, т. к. имеются положительные корни.

Провести подобное исследование можно и в пакете MatLab, листинг и результат приведены ниже:

```
>> pole(tf([0.8*100],[0.01 0.1 1 0.8*100]))
```

```
ans =
```

```
-21.9928 + 0.0000i
 5.9964 + 18.1052i
 5.9964 - 18.1052i
```

```
Или
```

```
>> q = [0.01 0.1 1 0.8*100]
```

```
q =
```

```
0.0100 0.1000 1.0000 80.0000
```

```
>> roots(q)
```

```
ans =
```

```
-21.9928 + 0.0000i  
5.9964 +18.1052i  
5.9964 -18.1052i
```

3.2.2. Алгебраический критерий устойчивости Гурвица

Критерий Гурвица позволяет провести анализ по коэффициентам характеристического полинома замкнутой системы $D(p)$. Рассмотрим данный критерий.

Пусть линейная стационарная система задана передаточной функцией:

$$W(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n} \quad (87)$$

Характеристический полином системы представляет собой полином, стоящий в знаменателе передаточной функции:

$$D(p) = a_0 \cdot p^n + a_1 \cdot p^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot p + a_n \quad (88)$$

По его коэффициентам составляется матрица Гурвица размерности $n \times n$:

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & a_n \end{bmatrix} \quad (89)$$

Порядок составления матрицы H :

1. По главной диагонали выписываются коэффициенты полинома $D(p)$ в порядке возрастания индексов, начиная с a_1 .
2. Каждая строка заполняется коэффициентами полинома $D(p)$ таким образом, чтобы индексы слева направо возрастали, и чтобы строки с четными и нечетными индексами чередовались. Вместо коэффициентов с индексами, меньшими нуля и большими n выписываются нули.

Определителями Гурвица Δ_i , где $i = 1, \dots, n$ называются главные диагональные миноры матрицы Гурвица.

$$\Delta_1 = a_1; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}; \dots; \Delta_n = \det H, \quad (90)$$

где обозначение $\begin{vmatrix} \dots \\ \dots \end{vmatrix}$ подразумевает определитель матрицы.

Формулировка критерия: для того, чтобы линейная стационарная система была асимптотически устойчива, необходимо и достаточно, чтобы при a_0 все определители Гурвица были строго положительными: $\Delta_i > 0$ где $i = 1, \dots, n$.

Частные случаи критерия:

- 1) для асимптотической устойчивости системы первого порядка ($n=1$) необходимо и достаточно:

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0; \quad (91)$$

- 2) для асимптотической устойчивости системы второго порядка ($n=2$) необходимо и достаточно:

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0; \quad (92)$$

- 3) для асимптотической устойчивости системы третьего порядка ($n=3$) необходимо и достаточно:

$$a_i > 0 \quad \text{где } i = 1, \dots, 3; \quad (93)$$

$$a_1 \cdot a_2 > a_0 \cdot a_3; \quad (94)$$

- 4) для асимптотической устойчивости системы четвертого порядка ($n=4$) необходимо и достаточно:

$$a_i > 0 \quad \text{где } i = 1, \dots, 4; \quad (95)$$

$$a_1 \cdot a_2 > a_0 \cdot a_3; \quad a_3 \cdot (a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3) > a_1^2 \cdot a_4 \quad (96)$$

- 5) для асимптотической устойчивости системы пятого порядка ($n=5$) необходимо и достаточно:

$$a_i > 0 \quad \text{где } i = 1, \dots, 5; \quad a_1 \cdot a_2 > a_0 \cdot a_3; \quad (97)$$

$$(a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3) \cdot (a_3 \cdot a_4 - a_2 \cdot a_5) > (a_1 \cdot a_4 - a_0 \cdot a_5)^2 \quad (98)$$

Пример 12.

Определить методом Гурвица является ли устойчивой система, заданная структурной схемой на рис. 45.

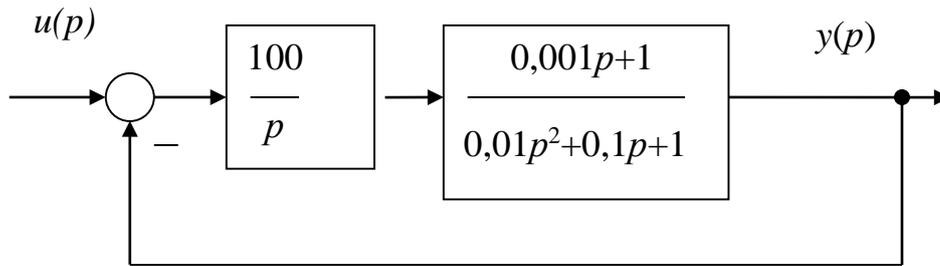


Рис. 45. Структурная схема замкнутой САУ (пример 12)

Решение. Свернем контур регулирования и выпишем передаточную функцию замкнутой системы в виде.

$$\begin{aligned}
 W(p) &= \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{W_{\text{ИП}}(p)}{1 + W_{\text{ИП}}(p) \cdot W_{\text{ОС}}(p)} = \\
 &= \frac{100 \cdot (0,001 \cdot p + 1)}{p \cdot (0,010 \cdot p^2 + 0,1 \cdot p + 1)} = \\
 &= \frac{100 \cdot (0,001 \cdot p + 1)}{1 + \frac{100 \cdot (0,001 \cdot p + 1)}{p \cdot (0,010 \cdot p^2 + 0,1 \cdot p + 1)}} = \\
 &= \frac{100(0,001p + 1)}{0,01 \cdot p^3 + 0,1 \cdot p^2 + 1,1 \cdot p + 100}.
 \end{aligned} \tag{99}$$

Очевидно, что данная система является системой третьего порядка и ее характеристический полином.

$$D(p) = 0,01 \cdot p^3 + 0,1 \cdot p^2 + 1,1 \cdot p + 100 \tag{100}$$

В общем виде этот полином записывается следующим образом:

$$D(p) = a_0 \cdot p^3 + a_1 \cdot p^2 + a_2 \cdot p + a_3, \tag{101}$$

откуда $a_0 = 0,01$, $a_1 = 0,1$, $a_2 = 1,1$, $a_3 = 100$.

Необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости при $n=3$: $a_i > 0$, $i = 0, \dots, 3$, $a_1 \cdot a_2 > a_0 \cdot a_3$. Для данной системы все коэффициенты $a_i > 0$, но указанное неравенство не выполняется. Следовательно, система неустойчива.

Пример 13.

С помощью критерия Гурвица определить предельное значение коэффициента усиления k для системы, заданной структурной схемой на рис. 46.

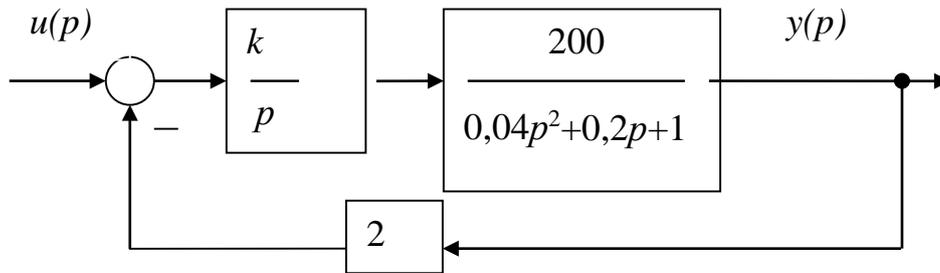


Рис. 46. Структурная схема замкнутой САУ (пример 13)

Свернув структуру, запишем передаточную функцию замкнутой системы:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{W_{\text{пр}}(p)}{1 + W_{\text{пр}}(p) \cdot W_{\text{ос}}(p)} = \frac{200 \cdot k}{0.04 \cdot p^3 + 0.2 \cdot p^2 + p + 400 \cdot k}. \quad (102)$$

Критерий Гурвица устанавливает устойчивость системы по коэффициентам характеристического полинома $D(p)$, то есть по знаменателю передаточной функции. Для данной системы:

$$D(p) = 0.04p^3 + 0.2p^2 + p + 400k. \quad (103)$$

Общий вид характеристического уравнения при $n=3$

$$D(p) = a_0 \cdot p^3 + a_1 \cdot p^2 + a_2 \cdot p + a_3, \quad (104)$$

Критерий Гурвица для $n=3$ (частный случай) требует для асимптотической устойчивости линейной стационарной системы выполнения неравенства $n=3$: $a_i > 0, i=0, \dots, 3, a_1 \cdot a_2 > a_0 \cdot a_3$.

Для данной системы $a_0 = 0.04, a_1 = 0.2, a_2 = 1, a_3 = 400 \cdot k$.

Следовательно, $0.2 \cdot 1 > 0.04 \cdot 400 \cdot k \Rightarrow k < \frac{1}{80}$.

Вывод: Замкнутая САУ устойчива при $k < \frac{1}{80} = 0.0125$.

3.3. Частотные критерии устойчивости

3.3.1. Оценка устойчивости непрерывной системы управления с использованием критерия Михайлова

Пусть дан характеристический полином замкнутой системы вида $D(s) = a_0 \cdot s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot s + a_n$. Проведя замену $s \rightarrow j\omega$, получим выражение:

$$D(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}j\omega + a_n = \\ = U(\omega) + jV(\omega), \quad (105)$$

где $U(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots$ – вещественная функция Михайлова;

$V(\omega) = a_{n-1} - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \dots$ – мнимая функция Михайлова.

При изменении частоты конец вектора $D(j\omega)$ прочертит на комплексной плоскости некоторую кривую, которая называется годографом Михайлова [1].

Для того чтобы система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы при изменении $0 \leq \omega \leq +\infty$ вектор годографа Михайлова $D(j\omega)$ повернулся против часовой стрелки вокруг начала координат, нигде не обращаясь в ноль, на угол $\Delta\varphi = \pi \cdot n/2$, где n – порядок системы.

Как видно из выражений для вещественной и мнимой функций Михайлова, для устойчивой системы на частоте $\omega = 0$ годограф Михайлова берет свое начало на вещественной положительной полуоси в точке a_n . При изменении частоты $0 \leq \omega \leq +\infty$ годограф Михайлова проходит n квадрантов против часовой стрелки, поочередно пересекая вещественную и мнимую оси (рис. 47).

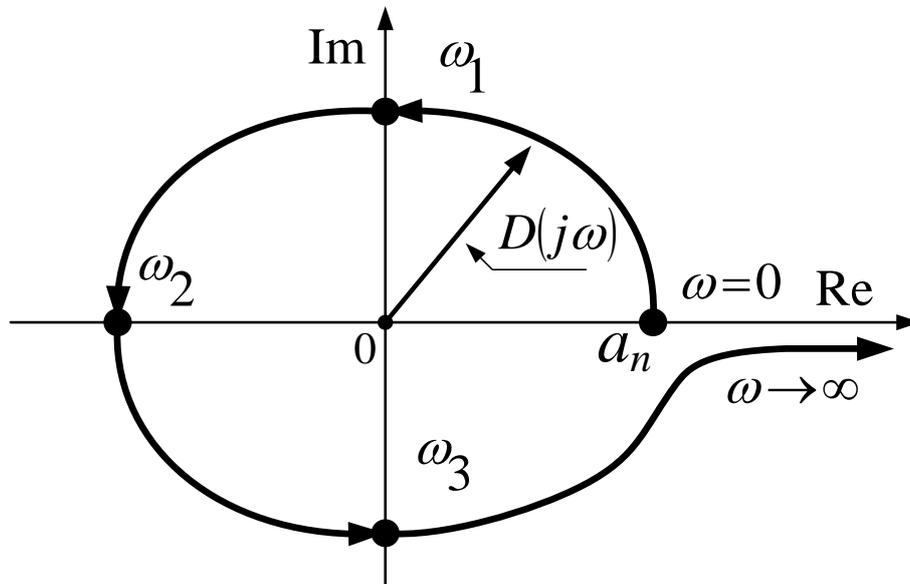


Рис. 47. Годограф Михайлова

В эти моменты, соответственно, то мнимая $V(\omega)$, то вещественная $U(\omega)$ функции Михайлова обращаются в ноль. Причем на частоте $\omega = 0$ именно мнимая функция Михайлова равна нулю $V(0) = 0$.

Следствие из критерия Михайлова: для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы корни мнимой и вещественной функций чередовались, т. е. $0 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4 \dots$,

где $V(0) = 0, V(\omega_2) = 0, V(\omega_4) = 0; U(\omega_1) = 0, U(\omega_3) = 0$.

Пример 14.

С помощью критерия Михайлова исследовать устойчивость системы.

Решение.

Характеристический полином данной системы имеет вид:

$$D(s) = 0.01 \cdot s^3 + 0.1 \cdot s^2 + 1.1 \cdot s + 100. \quad (106)$$

Проведем замену $s \rightarrow j \cdot \omega$.

$$D(j\omega) = 0.01(j\omega)^3 + 0.1(j\omega)^2 + 1.1j\omega + 100. \quad (107)$$

Выделим вещественную и мнимую функции Михайлова:

$$\begin{cases} U(\omega) = 100 - 0.1 \cdot \omega^2 \\ V(\omega) = 1.1 \cdot \omega - 0.01 \cdot \omega^3 = \omega \cdot (1.1 - 0.01\omega^2) \end{cases} \quad (108)$$

Для нахождения корней вещественной функции Михайлова приравняем ее к нулю:

$$\begin{aligned} U(\omega) &= 100 - 0.1\omega^2 = 0; \\ &\Downarrow \end{aligned} \quad (109)$$

$$\omega_B = 31,62 \text{ с}^{-1}$$

Для нахождения корней мнимой функции Михайлова приравняем ее к нулю:

$$\begin{aligned} V(\omega) &= 1.1\omega - 0.01\omega^3 = 0 \\ &\Downarrow \end{aligned} \quad (110)$$

$$\omega_{M1} = 0, \text{ с}^{-1} \quad \omega_{M2} = 10,45, \text{ с}^{-1}$$

Полученные частоты расставим в порядке возрастания:

$$0_{\omega_{M1}} < 10,45_{\omega_{M2}} < 31,62_{\omega_B} \quad (111)$$

Таким образом, данная система является неустойчивой, так как корни вещественной и мнимой функций Михайлова не чередуются.

3.3.2. Частотный критерий устойчивости Найквиста в логарифмической форме

Данный критерий позволяет судить об устойчивости замкнутой системы по амплитудно-фазовой частотной характеристике или по логарифмическим частотным характеристикам разомкнутой системы. Рассмотрим критерий в логарифмической форме. Пусть система замкнута единичной обратной связью (см. рис. 48).

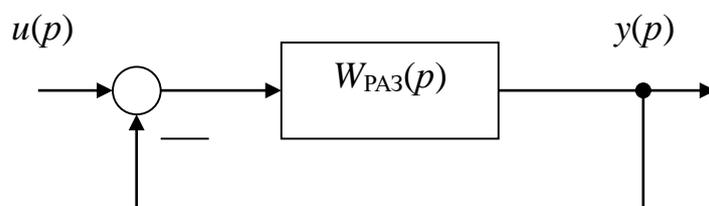


Рис. 48. Структурная схема САУ

Передаточная функция разомкнутой системы (рис. 48):

$$W_{\text{РАЗ}}(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}. \quad (112)$$

Формулировка критерия устойчивости. Если характеристическое уравнение для разомкнутой системы $Q(p) = 0$ имеет m корней с неотрицательными (в том числе и нулевыми) вещественными частями, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы разность между числом пересечений логарифмической фазовой характеристикой (ЛФХ) разомкнутой системы уровня $(-\pi)$ снизу вверх (N_+) во всех областях, где логарифмическая амплитудная характеристика (ЛАХ) положительна, и числом пересечений сверху вниз (N_-) равнялось $m/2$, т.е. $N_+ - N_- = m/2$.

$$N_+ - N_- = \frac{m}{2} \quad (113)$$

В частности, если система в разомкнутом состоянии устойчива, то она не имеет корней с неотрицательными вещественными частями ($m = 0$). Следовательно, количество переходов ЛФХ через уровень $(-\pi)$ снизу вверх (N_+) и сверху вниз (N_-) должно быть одинаково во всех областях, где ЛАХ положительна:

$$N_+ = N_- \text{ при } L(\omega) > 0 \quad (114)$$

Если логарифмическая частотная характеристика (ЛЧХ) устойчивой разомкнутой системы имеет монотонный характер, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы на частоте среза $\omega_{\text{ср}}$ (т. е. при $L(\omega_{\text{ср}}) = 0$) ЛФХ разомкнутой САУ располагалась выше уровня $(-\pi)$.

Пример 15.

С помощью критерия Найквиста в логарифмической форме исследовать устойчивость системы, представленной на рис. 45.

Решение.

Передаточная функция разомкнутой САУ, рассмотренной (см. пример 12), имеет вид:

$$W_{\text{РАЗ}}(p) = \frac{100 \cdot (0.001 \cdot p + 1)}{p \cdot (0.01 \cdot p^2 + 0.1 \cdot p + 1)} \quad (115)$$

Построим ЛЧХ этой системы с помощью методики построения асимптотических ЛЧХ по данной передаточной функции.

В общем виде рассматриваемая система имеет передаточную функцию.

$$W_{\text{РАЗ}}(p) = \frac{k \cdot (T_1 \cdot p + 1)}{p \cdot (T_2^2 \cdot p^2 + 2 \cdot T_2 \cdot \xi \cdot p + 1)} \quad (116)$$

1. Сопрягающие частоты: $\omega_1 = \frac{1}{T_1} = 1000\text{с}^{-1}$; $\omega_2 = \frac{1}{T_2} = 10\text{с}^{-1}$; частота

среза интегратора $\omega_{\text{срИ}} = k = 100\text{с}^{-1}$.

2. Поскольку передаточная функция содержит интегрирующее звено, то построение результирующей ЛАХ $L_{\text{РАЗ}}(\omega)$ начинается с прямой, имеющей наклон (-1) и пересекающей частотную ось на частоте $\omega_{\text{срИ}} = 100\text{с}^{-1}$.

3. Построенная в пункте 2 прямая претерпевает изломы на сопрягающих частотах:

– при $\omega_2 = \frac{1}{T_2} = 10\text{с}^{-1}$ на (-2) вниз;

– при $\omega_1 = \frac{1}{T_1} = 1000\text{с}^{-1}$ на $(+1)$ вверх.

Окончательный вид ЛАХ разомкнутой системы представлен на рис. 49.

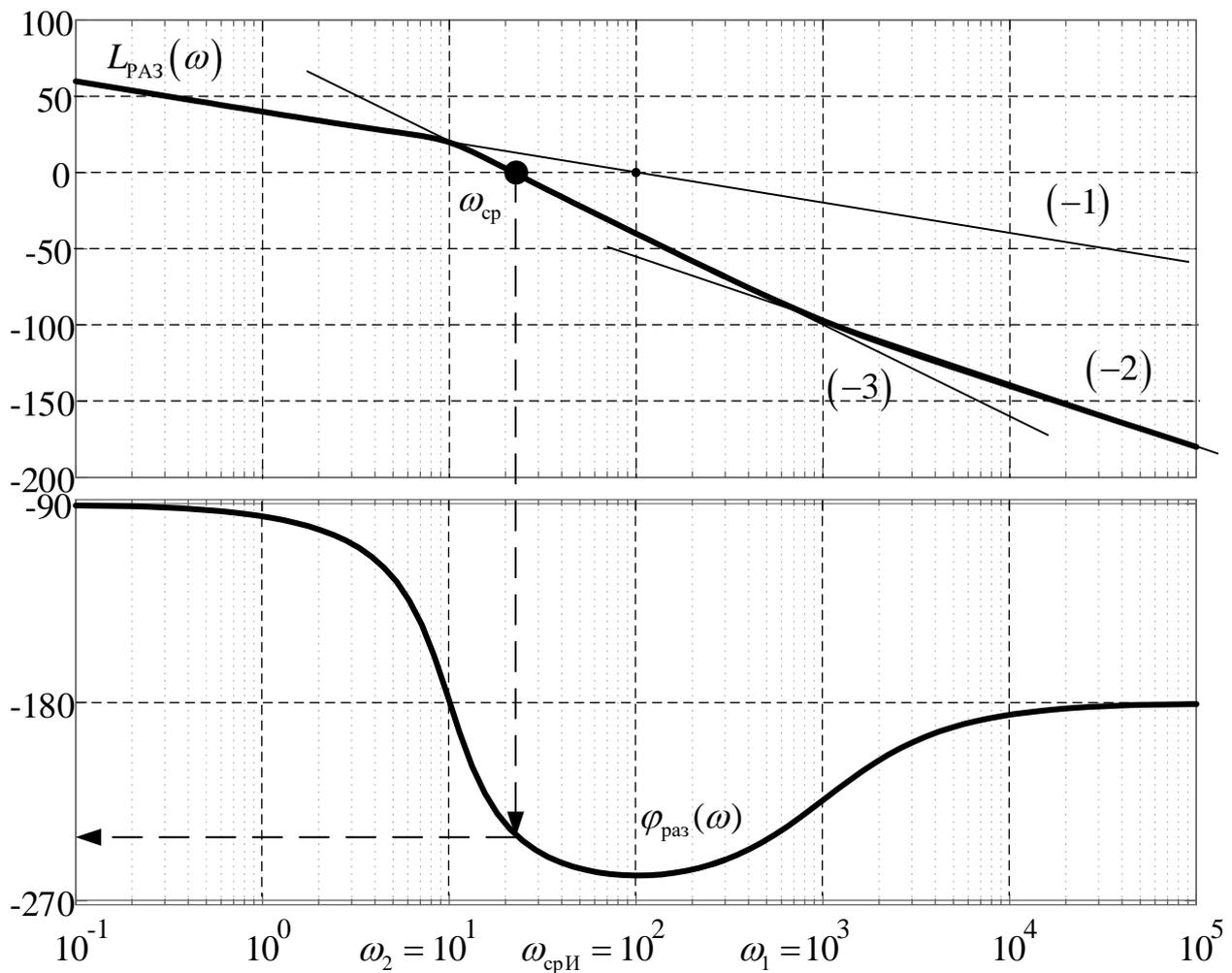


Рис. 49. ЛЧХ разомкнутой системы (пример 15)

4. Частотная фазовая характеристика разомкнутой системы получается сложением фазовых характеристик сомножителей: $\varphi_{\text{раз}}(\omega) = \varphi_{\text{И}} + \varphi_1 + \varphi_2$.

5. Определим корни λ_i характеристического уравнения $Q(p)$, используя MatLab, листинг и результат приведены ниже:

```
>> W1=tf([100],[1 0])
```

```
W1 =
```

```
100
```

```
---
```

```
s
```

```
Continuous-time transfer function.
```

```
>> W2=tf([0.001 1],[0.01 0.1 1])
```

$$W2 = \frac{0.001 s + 1}{0.01 s^2 + 0.1 s + 1}$$

Continuous-time transfer function.

$$\gg \text{Wraz} = W1 * W2$$

$$\text{Wraz} = \frac{0.1 s + 100}{0.01 s^3 + 0.1 s^2 + s}$$

Continuous-time transfer function.

$$\gg \text{pole}(\text{Wraz})$$

$$\text{ans} = \begin{matrix} 0.0000 + 0.0000i \\ -5.0000 + 8.6603i \\ -5.0000 - 8.6603i \end{matrix}$$

Результат определения корней λ_i характеристического уравнения $Q(p)$, используя пакет Mathcad, показан на рис. 50.

$$p \cdot (0.01 \cdot p^2 + 0.1 \cdot p + 1) \xrightarrow{\text{solve, p, float, 2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -5.0 + 8.7i \\ -5.0 - 8.7i \end{bmatrix}$$

Рис. 50. Результат определения корней λ_i характеристического уравнения $Q(p)$, используя пакет Mathcad

Уравнение имеет три корня $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -5.0 + 8.7i$ и $\lambda_3 = -5.0 - 8.7i$, следовательно $m = 1$.

Как видно из графиков, ЛЧХ в области положительной ЛАХ имеет место единственное пересечение ЛФХ с уровнем $(-\pi)$, т. е. $N_- = 1$; $N_+ = 0$. Отсюда:

$$N_+ - N_- \neq \frac{m}{2} \quad (117)$$

Следовательно, замкнутая система неустойчива.

Построим график переходного процесса, листинг приведен ниже:

```
>> Wzam=Wraz/(1+Wraz);
>> step(Wzam,1)
>> grid
```

График переходного процесса (рис. 51) подтверждает вывод о неустойчивости системы.

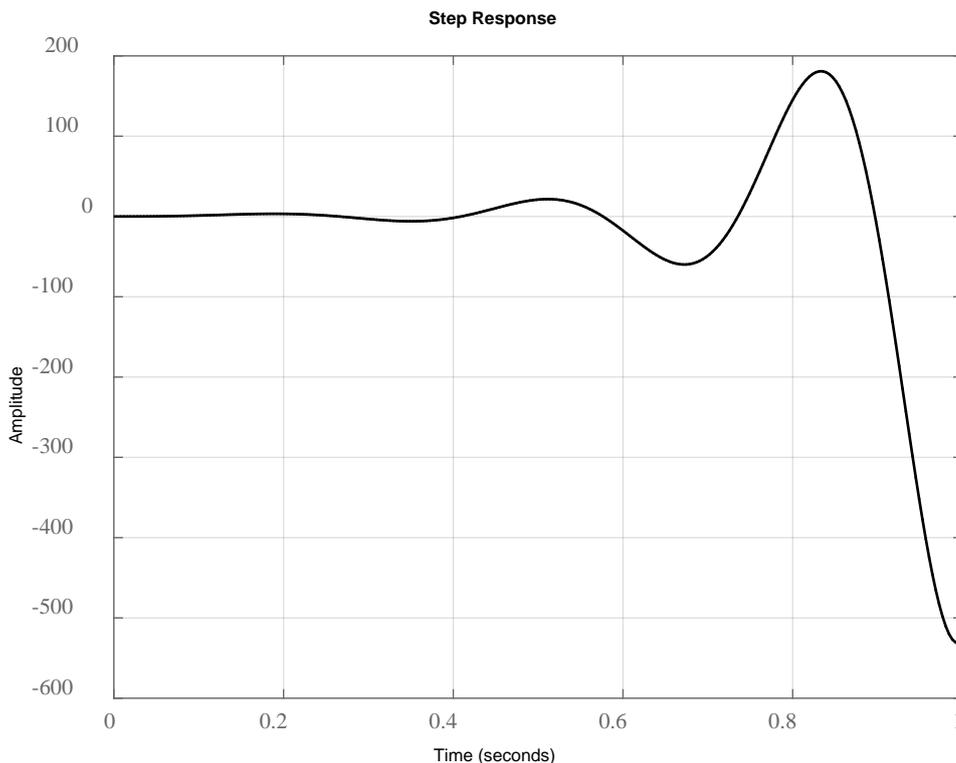


Рис. 51. График переходного процесса (пример 15)

Пример 16.

С помощью критерия Найквиста в логарифмической форме определить устойчивость замкнутой системы, представленной на структурной схеме рис. 52 с помощью компьютерного моделирования.

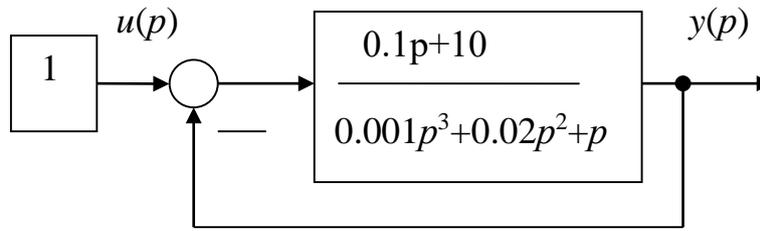


Рис. 52. Структурная схема САУ (пример 16)

Передаточная функция разомкнутой системы:

$$W_{\text{РАЗ}}(p) = \frac{R(p)}{Q(p)} = \frac{0.1 \cdot p + 10}{0.01 \cdot p^3 + 0.02 \cdot p^2 + p} = \frac{10 \cdot (0.01 \cdot p + 1)}{p \cdot (0.01 \cdot p^2 + 0.02 \cdot p + 1)} \quad (118)$$

Характеристическое уравнение разомкнутой системы:

$$Q(p) = p \cdot (0.01 \cdot p^2 + 0.02 \cdot p + 1) \quad (119)$$

Определим корни λ_i характеристического уравнения $Q(p)$, используя MatLab, листинг и результат приведены ниже:

```
> q = [0.01 0.02 1 0]
```

```
q =
```

```
0.0100 0.0200 1.0000 0
```

```
>> roots(q)
```

```
ans =
```

```
0.0000 + 0.0000i
-1.0000 + 9.9499i
-1.0000 - 9.9499i
```

Результат определения корней λ_i характеристического уравнения $Q(p)$, используя пакет Mathcad, показан на рис. 53.

$$p \cdot (0.01 \cdot p^2 + 0.02 \cdot p + 1) \xrightarrow{\text{solve, p, float, 2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1.0 + 9.9i \\ -1.0 - 9.9i \end{bmatrix}$$

Рис. 53. Результат определения корней λ_i характеристического уравнения $Q(p)$, используя пакет Mathcad

Уравнение имеет три корня $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1.0 + 9.9i$ и $\lambda_3 = -1.0 - 9.9i$, поскольку один из корней имеет неотрицательную вещественную часть ($\lambda_1 = 0$), то в формуле критерия $m = 1$.

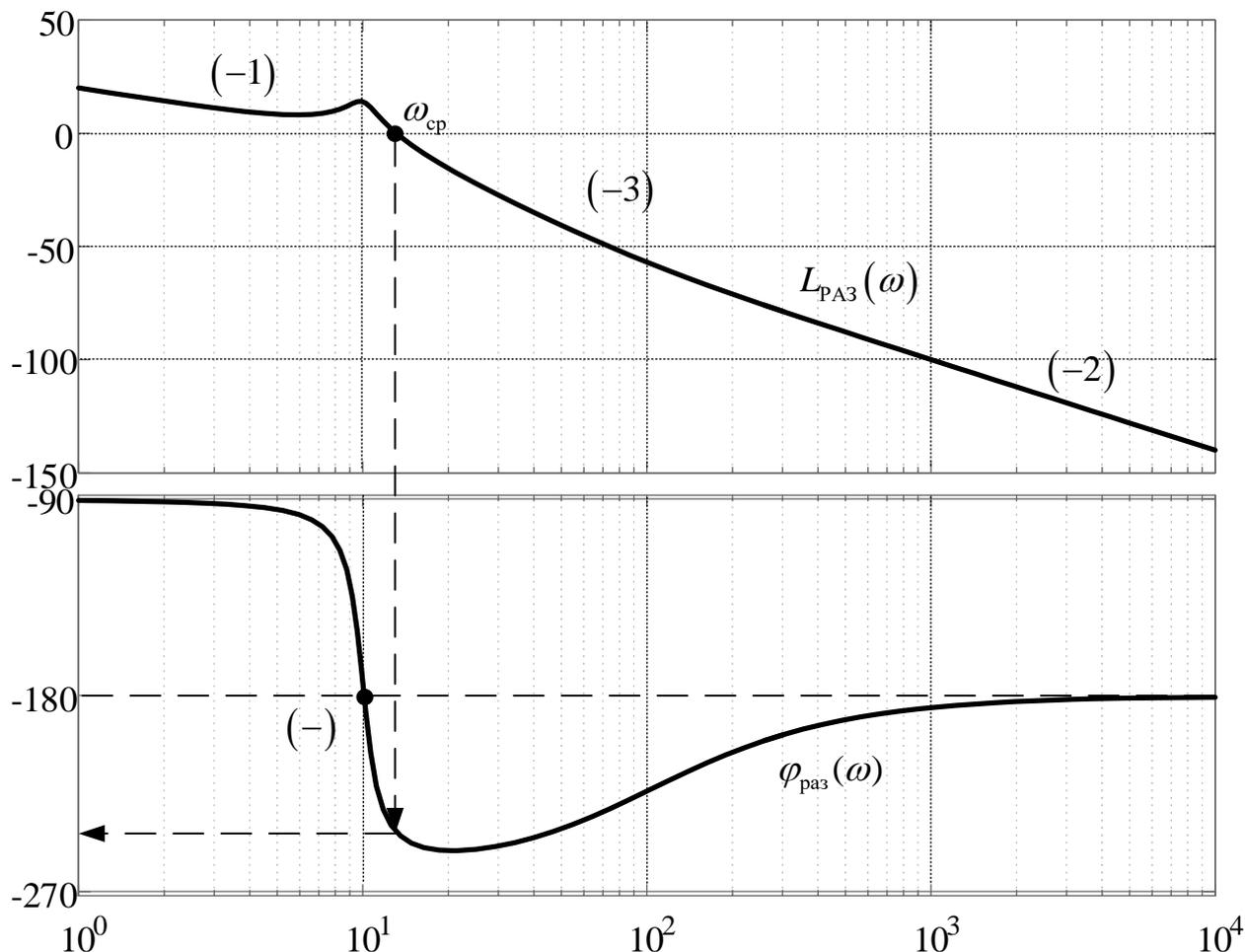


Рис. 54. ЛЧХ разомкнутой системы (пример 16)

ЛЧХ разомкнутой САУ (рис. 54) могут быть построены как вручную по правилам построения асимптотических ЛЧХ, так и с помощью компьютерного моделирования.

Как видно из графиков, в области, где ЛАХ положительна ($L_{\text{РАЗ}}(\omega) > 0$) имеет место одно пересечение ЛФХ уровнем $(-\pi)$, т. е. $N_- = 1$; $N_+ = 0$. Отсюда:

$$N_+ - N_- \neq \frac{m}{2} \quad (120)$$

Следовательно, замкнутая система неустойчива.

На рис. 55 представлен график переходного процесса, подтверждающий данный вывод.

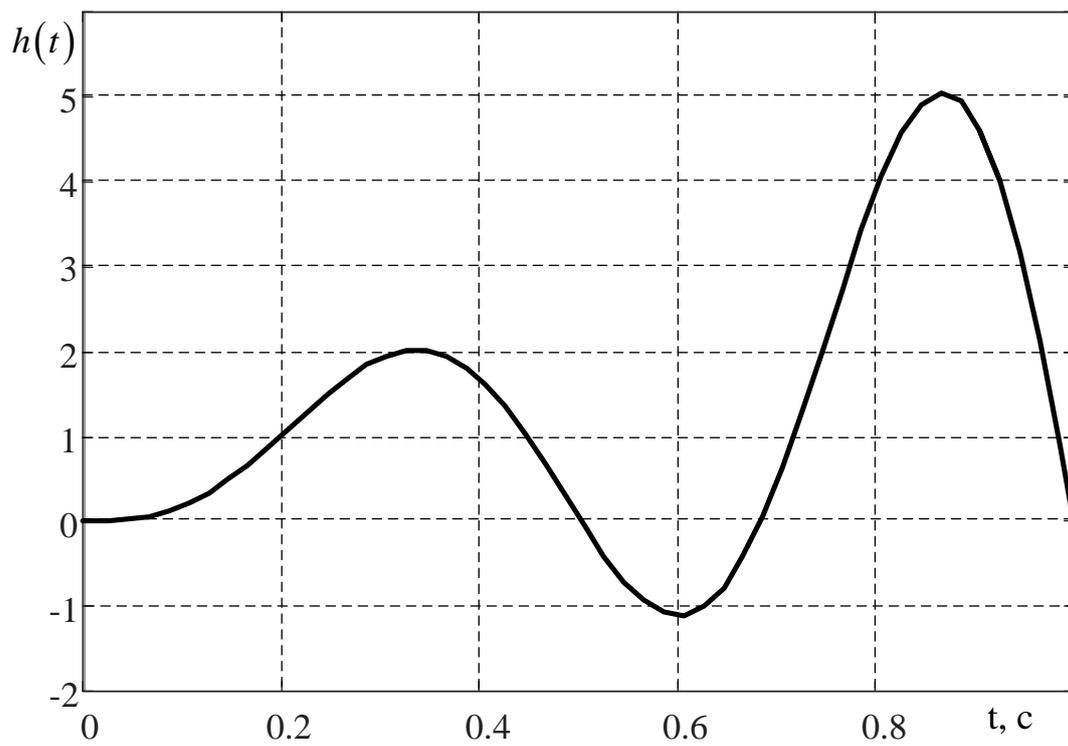


Рис. 55. Переходный процесс замкнутой системы
(пример 16)

4. СИНТЕЗ КОНТУРА РЕГУЛИРОВАНИЯ

4.1. Виды коррекции

Если анализ спроектированной САУ показал, что она неустойчива или ее показатели качества не соответствуют требуемым значениям (установившаяся ошибка, длительность переходного процесса, перерегулирование превышают заданные значения), то выполняют синтез системы.

Во время синтеза звенья спроектированной системы не всегда могут быть изменены, так как их параметры, число обусловлены заданным технологическим процессом и их изменение повлечет нарушение его функционирования или потребует изменение конструкции.

При синтезе в уже спроектированную систему вводят дополнительные корректирующие звенья (рис. 5б).

Корректирующие устройства вводят:

- для улучшения точности системы и качества переходных процессов.
- для обеспечения устойчивости системы, если первичная система устойчивостью не обладала, а затем добиваться желаемого качества процесса регулирования.



Рис. 56. Виды корректирующих звеньев

4.2. Законы регулирования

Рассмотренные выше принципы включения корректирующих устройств позволяют получить желаемое качество работы замкнутой системы управления. Необходимо отметить, что для в большинстве случаев нет необходимости использовать сложные корректирующие устройства.

В ряде практических случаев для реальных контуров регулирования могут быть использованы типовые корректирующие устройства, получившие название регуляторы, настройка которых осуществляется путем выбора по определенным правилам их параметров.

Регуляторы описываются различными передаточными функциями $W_p(p)$ (рис. 57). Тогда общая передаточная функция разомкнутой цепи системы будет:

$$W_{\text{РАЗ}}(p) = W_p(p) \cdot W_H(p), \quad (121)$$

где $W_H(p)$ – передаточная функция неизменяемой части (нескорректированной) САУ; $W_p(p)$ – передаточная функция корректирующего звена.

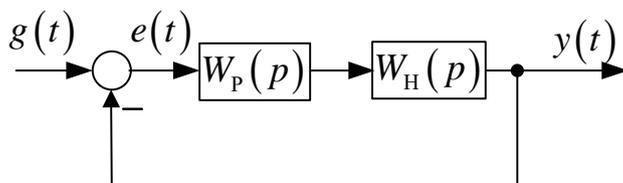


Рис. 57. Включение регуляторов – общий вид

Под законом регулирования (законом управления) понимается зависимость, в соответствии с которой управляющее устройство формирует управляющее воздействие $u(t)$. Эта зависимость может быть представлена в виде:

$$u(t) = F[e(t), g(t), f(t)], \quad (122)$$

где F – чаще всего нелинейная, функция от ошибки $e(t)$, задающего воздействия $g(t)$, и возмущающего воздействия $f(t)$, а также от их производных и интегралов по времени.

Выражение (122) можно записать в виде:

$$u(t) = F_1(e) + F_2(g) + F_3(f). \quad (123)$$

Слагаемое $F_1(e)$ соответствует регулированию по отклонению (принцип Ползунова-Уатта), учет $F_2(g)$ и $F_3(f)$ – регулирование по внешнему управляющему/возмущающему воздействию (принцип Понселе).

Отметим, что для замкнутой системы выражение для определения ошибки регулирования будет:

$$e(t) = \frac{g(t)}{1 + W_{\text{РАЗ}}(p)} - \frac{W_f(p)}{1 + W_{\text{РАЗ}}(p)} \quad (124)$$

Устройства реализующие требуемые законы управления называются регуляторами. На рис. 58 приведена классификация регуляторов.

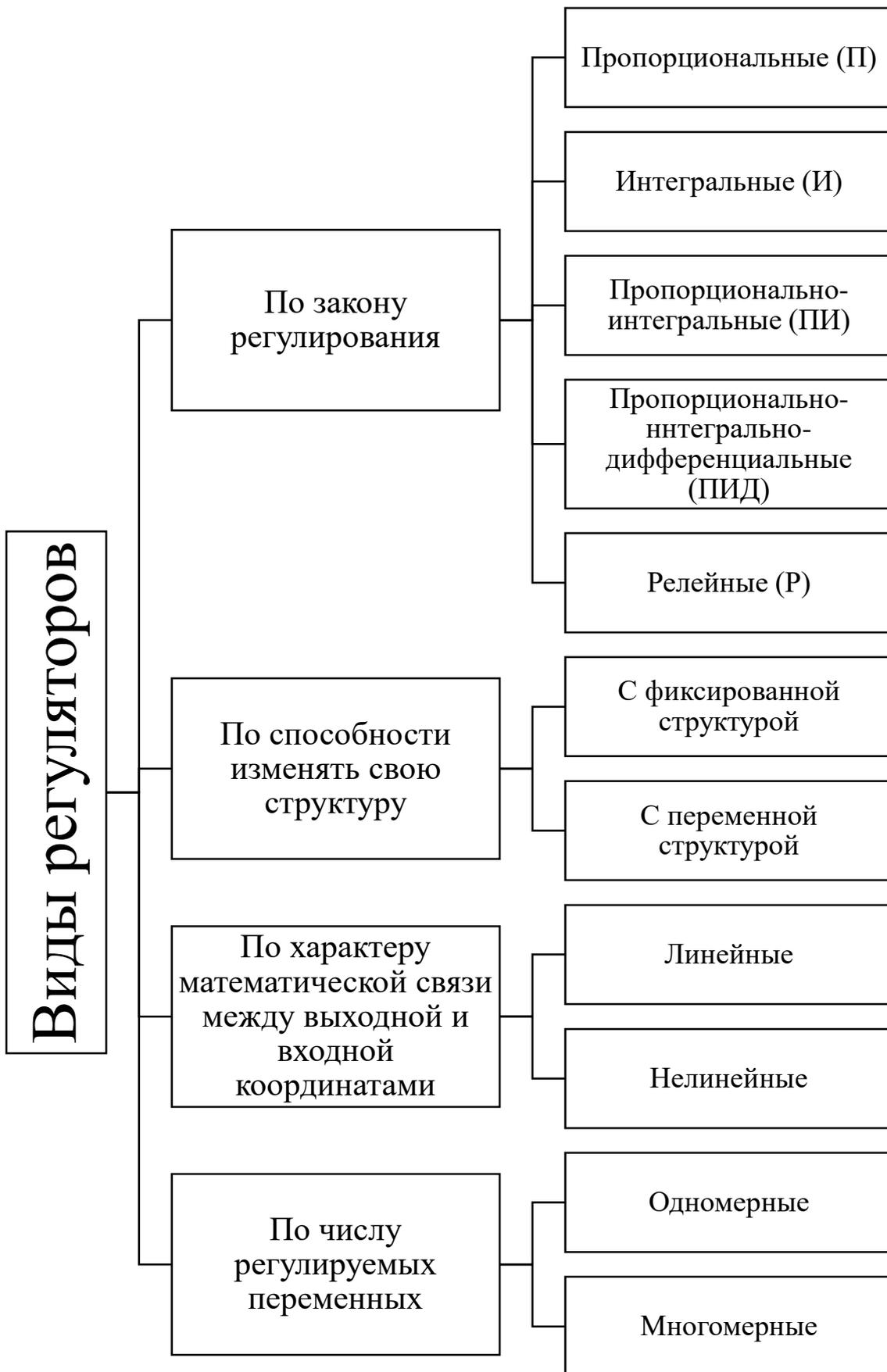


Рис. 58. Классификация регуляторов

4.3. Типовые регуляторы

Пропорциональный регулятор (П-регулятор)

$$W_P(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = k_{\Pi}, \quad (125)$$

где k_{Π} – коэффициент передачи регулятора. В некоторой литературе используют для обозначения коэффициента передачи символ $-\beta$.

Если объект управления не содержит интегрирующих звеньев, то система с П-регулятором является статической ($\nu = 0$). Регулирование в этом случае характеризуется наличием статической ошибки, уменьшение которой ограничено условиями устойчивости.

Пропорционально-интегральный регулятор (ПИ-регулятор)

Передаточная функция регулятора равна:

$$W_P(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = k_{\Pi} + \frac{k_{\text{И}}}{p} = \frac{k_{\Pi} \cdot p + k_{\text{И}}}{p}. \quad (126)$$

Если $k_{\Pi} = \beta$ и $k_{\text{И}} = \frac{\beta}{\tau}$, то передаточную функцию регулятора можно записать следующим образом:

$$W_P(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = \beta \cdot \frac{(\tau \cdot p + 1)}{\tau \cdot p}. \quad (127)$$

Достоинством ПИ-регулятора является то, что он устраняет статическую ошибку, обусловленную возмущением. Однако введение интегральной составляющей в регулятор ухудшает условия устойчивости.

Пропорционально-интегрально-дифференциальный регулятор (ПИД-регулятор)

Регулятор описывается передаточной функцией:

$$\begin{aligned} W_P(p) &= \frac{U(p)}{E(p)} = k_{\Pi} + \frac{k_{\text{И}}}{p} + k_{\text{Д}} \cdot p = \\ &= \frac{k_{\text{Д}} \cdot p^2 + k_{\Pi} \cdot p + k_{\text{И}}}{p} = \frac{\beta \cdot (\tau_1 \cdot p + 1)(\tau_2 \cdot p + 1)}{\tau_1 \cdot p} \end{aligned} \quad (128)$$

Здесь $k_{\text{Д}}$ – коэффициент передачи, определяющий величину воздействия по производной.

Так как выполнить идеальное дифференцирование сигнала ошибки $e(t)$ нельзя, в реальных системах передаточная функция ПИД-регулятора принимает вид:

$$W_p(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = k_{\Pi} + \frac{k_{\text{И}}}{p} + \frac{k_{\text{Д}} \cdot p}{T_{\text{Д}} \cdot p + 1} = \frac{\beta \cdot (\tau_1 \cdot p + 1)(\tau_2 \cdot p + 1)}{\tau_1 \cdot p(T_{\text{Д}} \cdot p + 1)}, \quad (129)$$

где $T_{\text{Д}}$ – постоянная времени, характеризующая инерционные свойства реального дифференцирующего звена.

Для выражений (43) и (44) справедливы следующие соотношения

$$k_{\Pi} = \beta \cdot \frac{\tau + \tau_2}{\tau}; \quad k_{\text{И}} = \beta / \tau; \quad k_{\text{Д}} = \beta \cdot \tau_2.$$

4.4. Стандартная настройка простейших контуров Настройка на оптимум по модулю

В ряде практических случаев реальные контуры регулирования могут быть приведены к простейшим контурам второго или третьего порядка, настройка которых осуществляется путем выбора по определенным правилам параметров регулятора. Рассмотрим с начала элементарный контур (рис. 59).

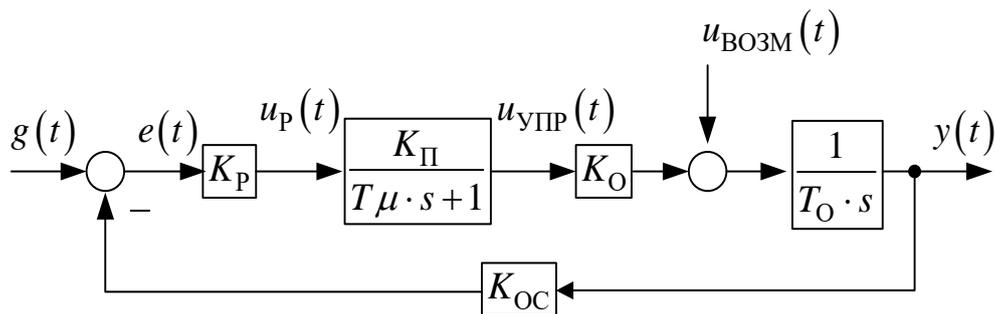


Рис. 59. Замкнутый контур с объектом управления в виде интегрирующего звена

Если данные и свойства объекта регулирования известны, то задача заключается в таком выборе и настройке корректирующего устройства, при которых формируемое им управляющее воздействие $u(t)$ было бы в состоянии как можно быстрее, точнее и без возникновения колебаний заставить регулируемую величину $y(t)$ следовать за задающим воздействием $g(t)$ и нейтрализовать изменения возмущения $f(t)$. Идеальный режим контура регулирования был бы достигнут в том случае, если бы регулируемая величина реагировала на изменение задающей без запаздывания и без появления колебаний. Такое поведение контура описывается уравнениями:

$$\frac{y(t)}{g(t)} = 1 \text{ или } \frac{Y(s)}{G(s)} = 1 \quad (130)$$

Вместе с тем в этом случае регулируемая величина никак не реагировала бы на изменения возмущения, так что должны были бы выполняться условия:

$$\frac{y(t)}{f(t)} = 0 \text{ или } \frac{Y(s)}{F(s)} = 0 \quad (131)$$

Получается, что изменение управляющего воздействия должно немедленно компенсировать изменение возмущающего воздействия.

Выше отмечалось, что идеальным процессом регулирования считается процесс, когда регулируемая величина полностью повторяет изменения задающей величины (130), однако передаточная функция замкнутого контура не может быть равна единице,

$$W_{\text{зам}}(s) = \frac{Y(s)}{G(s)} = \frac{W_{\text{пш}}}{1 + W_{\text{пш}} \cdot W_{\text{оп}}} = \frac{W(s)}{[1 + W(s)] \cdot W_{\text{ос}}(s)} \rightarrow 1 \quad (132)$$

Это неравенство (132) относится ко всему спектру частот сигналов, от нулевой частоты до бесконечно высокой.

Получается, что целесообразно добиться по крайней мере для части спектра частот, точнее для полосы от нуля до возможно более высокой частоты, такого положения, чтобы модуль передаточной функции в этой полосе был как можно ближе к единице. И в этом случае в момент начала переходного процесса наиболее резко выражены наивысшие частоты спектра сигнала, естественно, нельзя добиться того, чтобы регулируемая величина в точности следовала за задающей. Затем на первый план выступают все более низкие частоты. И если в этой полосе частот модуль передаточной функции близок к единице, то всюду, кроме начального интервала времени, отклонение регулируемой величины, относительно задающей будет близка к нулю.

Такой способ настройки называется настройкой на оптимум по модулю (ОМ). Смысл этого термина в том, что при настройке на ОМ стремятся в широкой полосе частот сделать модуль частотной характеристики замкнутого контура близким к единице [6]. Отметим, что ЛАХ скорректированного замкнутого контура при настройке на ОМ будет $L(\omega) = 20 \lg(1) = 0$.

4.4.1. Неизменяемая часть системы состоит из апериодического звена с малой постоянной времени и интегрирующего звена с большой постоянной времени

Если осуществлять коррекцию контура (рис. 59) только за счет изменения общего коэффициента передачи, вводя пропорциональное звено (П-регулятор) K_p , то тогда звенья с постоянными времени T_0 и T_μ можно отнести к неизменяемой части системы, обозначив ее передаточную функцию через $W_H(s)$. Тогда передаточная функция разомкнутого контура будет:

$$W(s) = W_p(s) \cdot W_H(s), \quad (133)$$

где $W_H(s) = \frac{K_{\Pi} \cdot K_{OC}}{T_{\mu} \cdot s + 1} \cdot W_O(s)$;

$W_p(s) = K_p$ – передаточная функция регулятора, в данном случае выбран пропорциональный регулятор;

$W_O(s) = \frac{K_O}{T_O \cdot s}$ – передаточная функция объекта управления.

Выбирая коэффициент усиления регулятора таким образом, чтобы скомпенсировать коэффициенты усиления контура и наибольшую постоянную времени T_O , получим, сохранив малую постоянную времени T_{μ} :

$$K_p = \frac{T_O}{2 \cdot T_{\mu} \cdot K_O \cdot K_{\Pi} \cdot K_{OC}} \quad (134)$$

Запишем передаточную функцию разомкнутого контура:

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{T_O}{2 \cdot T_{\mu} \cdot K_O \cdot K_{\Pi} \cdot K_{OC}} \cdot \frac{K_{\Pi}}{T_{\mu} \cdot s + 1} \cdot \frac{K_O}{T_O \cdot s} \cdot K_{OC} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot T_{\mu} \cdot s \cdot (T_{\mu} \cdot s + 1)} \end{aligned} \quad (135)$$

Передаточная функция замкнутого контура будет:

$$\begin{aligned} W_{ЗАМ}(s) &= \frac{W(s)}{[1 + W(s)] \cdot W_{OC}(s)} = \\ &= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2 \cdot T_{\mu} \cdot s \cdot (T_{\mu} \cdot s + 1)}\right) \cdot K_{OC}} = \frac{1/K_{OC}}{2 \cdot T_{\mu}^2 \cdot s + 2 \cdot T_{\mu} \cdot s + 1} \end{aligned} \quad (136)$$

Получаем, что выбор K_p в соответствии с формулой (134) приводит к тому, что замкнутый контур будет описываться передаточной функцией колебательного звена с коэффициентом демпфирования $\xi = \sqrt{2}/2$.

Логарифмические частотные характеристики (ЛЧХ), соответствующие передаточной функции нескорректированной системе, обозначены «1» на рис. 60, ЛЧХ скорректированной системы $W(s)$ изображены сплошными линиями и обозначены «2» на рис. 60а. Цифрой «-1» обозначен наклон -20 дБ/дек, цифрой «-2» – наклон -40 дБ/дек.

Листинг построения ЛЧХ и переходной характеристики $h(t)$:

$T_O = 0.8$;

$K_{pp} = 45$;

```

Ko=0.6;
Tmy=0.04;
Koc=0.89;
Kp=To/(2*Tmy*Ko*Kpp*Koc);
W1=tf([Kpp],[Tmy 1]);
W2=tf([Ko],[1]);
W3=tf([1],[To 0]);
W4=tf([Koc],[1]);
Wp=tf([Kp],[1]);
Wzi=tf([Koc],[1]);
Wraz=W1*W2*W3*W4;
Wraz_kor=Wraz*Wp;
Wzam=Wzi*Wraz_kor/((1+Wraz_kor)*W4);
Wwoz=-W3/(1+W1*W2*W3*W4*Wp);
subplot 121
bode(Wp,'k--',Wraz,'k-.',Wraz_kor,'k-'),grid
subplot 222
step(Wzam,'k-'),grid
subplot 224
step(Wwoz,'k-'),grid

```

При ступенчатом управляющем воздействии выходная величина в первый раз достигает установившегося значения через время $4,7 \cdot T_{\mu}$, перерегулирование составляет 4,3 % (рис. 60б). Длительность переходного процесса не зависит от постоянной времени объекта T_0 и определяется только малой постоянной времени T_{μ} .

На рис. 61 показаны ЛЧХ замкнутого контура скорректированной системы. Как видно из рисунка в зоне низких частот $L(\omega) = 0$, что означает, что в этой зоне мы добились выполнения цели регулирования (130) и корректно выполнили настройку на ОМ.

Листинг для построения ЛЧХ замкнутого контура (рис. 61) будет иметь вид:

```

To=0.8;
Kpp=45;
Ko=0.6;
Tmy=0.04;
Koc=0.89;
Kp=To/(2*Tmy*Ko*Kpp*Koc);
W1=tf([Kpp],[Tmy 1]);
W2=tf([Ko],[1]);
W3=tf([1],[To 0]);
W4=tf([Koc],[1]);
Wp=tf([Kp],[1]);
Wzi=tf([Koc],[1]);
Wraz=W1*W2*W3*W4;

```

```

Wraz_kor=Wraz*Wp;
Wzam=Wzi*Wraz_kor/((1+Wraz_kor)*W4);
Wz=W1*W2*W3/(1+W1*W2*W3*W4)
bode(Wzam, 'k-', Wz, 'k--')

```

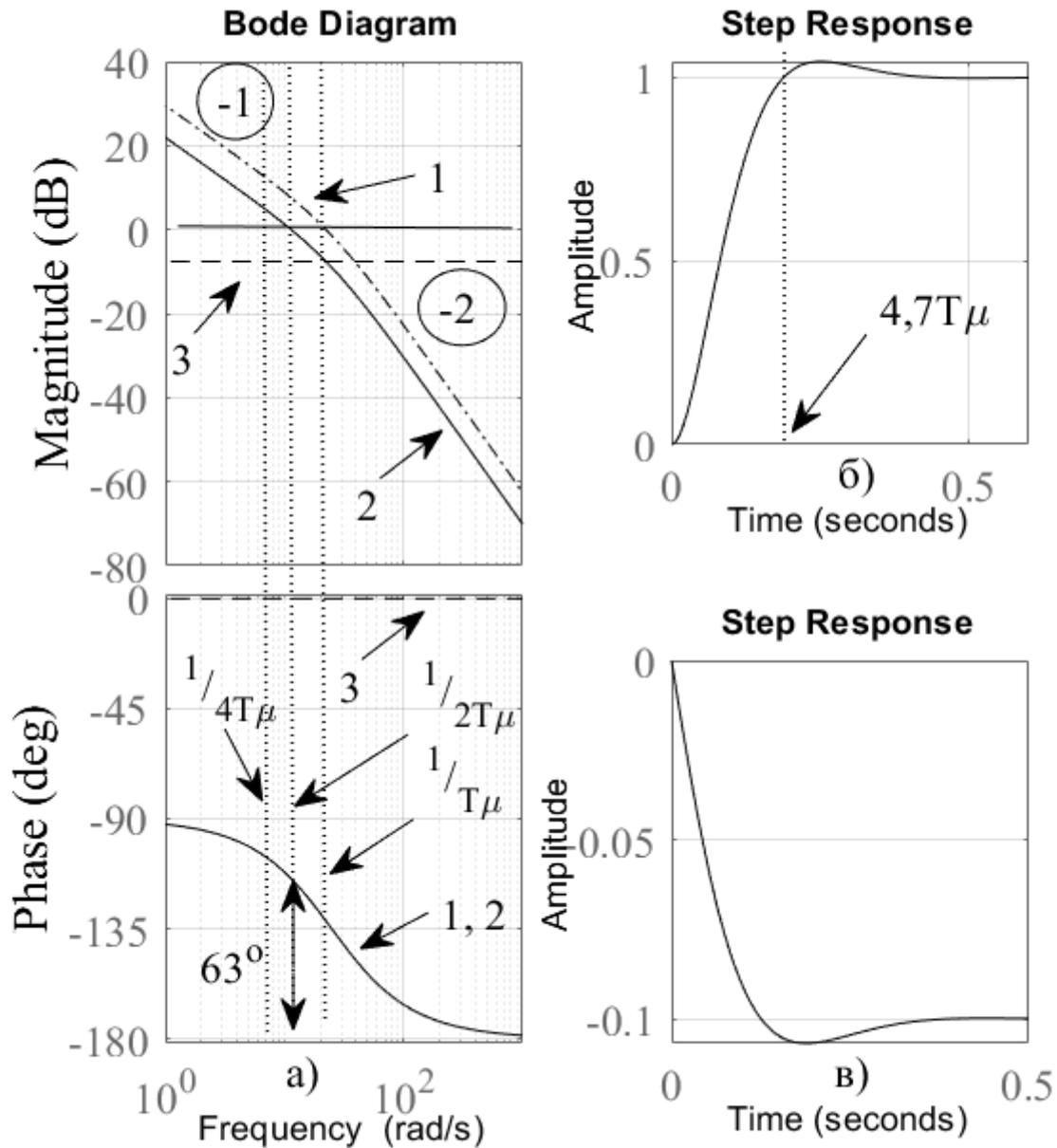


Рис. 60. ЛЧХ (а) и переходные характеристики при управляющем (б) и возмущающем (в) воздействиях:

1 – ЛЧХ не скорректированной системы; 2 – ЛЧХ с скорректированной системы;
 3 – ЛЧХ регулятора

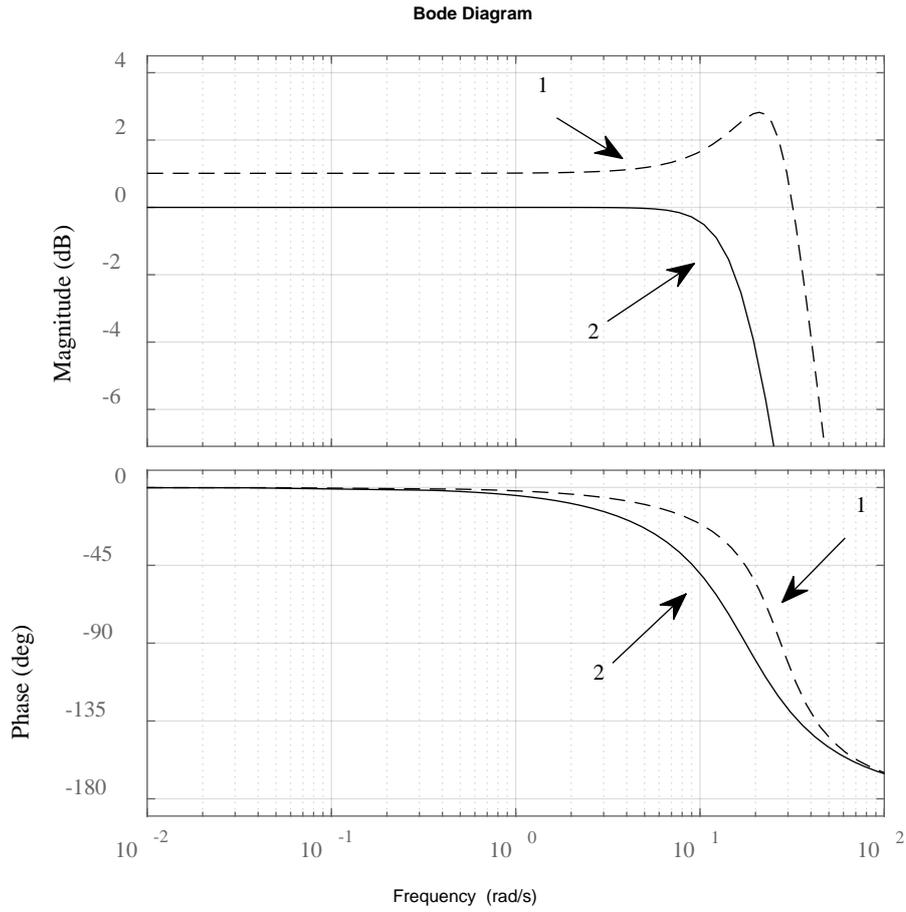


Рис. 61. ЛЧХ замкнутой системы:

1 – ЛЧХ не скорректированной системы; 2 – ЛЧХ с скорректированной системы

4.4.2. Неизменяемая часть системы состоит из апериодического звена

Если объект представляет собой апериодическое звено с передаточной функцией по управлению $W_o = \frac{K_o}{T_o \cdot s + 1}$, то при использовании П-регулятора получим передаточную функцию разомкнутого контура:

$$\begin{aligned}
 W(s) &= \frac{T_o}{2 \cdot T_\mu \cdot K_o \cdot K_\Pi \cdot K_{oc}} \cdot \frac{K_\Pi}{T_\mu \cdot s + 1} \cdot \frac{K_o}{T_o \cdot s + 1} \cdot K_{oc} = \\
 &= \frac{T_o}{2 \cdot T_\mu \cdot (T_\mu \cdot s + 1) \cdot (T_o \cdot s + 1)}
 \end{aligned}
 \tag{137}$$

Передаточная функция замкнутого контура:

$$\begin{aligned}
W_{\text{ЗАМ}}(s) &= \frac{W(s)}{[1+W(s)] \cdot W_{\text{OC}}(s)} = \\
&= \frac{T_o}{2 \cdot T_{\mu} \cdot (T_{\mu} \cdot s + 1) \cdot (T_o \cdot s + 1)} = \\
&= \frac{1}{\left[1 + \frac{T_o}{2 \cdot T_{\mu} \cdot (T_{\mu} \cdot s + 1) \cdot (T_o \cdot s + 1)}\right] \cdot K_{\text{OC}}} \\
&= \frac{T_o}{K_{\text{OC}} \cdot [2 \cdot T_{\mu} \cdot (T_{\mu} \cdot s + 1) \cdot (T_o \cdot s + 1) + T_o]}
\end{aligned} \tag{138}$$

Как уже отмечалось выше, целью регулирования в идеале является полное повторение регулируемой величины изменения заданной величины (130), соответственно ошибка регулирования должна стремиться к нулю.

$$\frac{G(s) - Y(s)}{G(s)} \rightarrow 0, \tag{139}$$

тогда

$$\begin{aligned}
\frac{G(s) - Y(s)}{G(s)} &= 1 - W_{\text{ЗАМ}}(s) = \\
&= 1 - \frac{T_o}{K_{\text{OC}} \cdot [2 \cdot T_{\mu} \cdot (T_{\mu} \cdot s + 1) \cdot (T_o \cdot s + 1) + T_o]} = \\
&= \frac{2 \cdot T_{\mu} \cdot K_{\text{OC}} \cdot (T_{\mu} \cdot s + 1) \cdot (T_o \cdot s + 1) - T_o + T_o \cdot K_{\text{OC}}}{K_{\text{OC}} \cdot [2 \cdot T_{\mu} \cdot (T_{\mu} \cdot s + 1) \cdot (T_o \cdot s + 1) + T_o]}
\end{aligned} \tag{140}$$

При $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
\lim_{s \rightarrow 0} \frac{2 \cdot T_{\mu} \cdot K_{\text{OC}} \cdot (T_{\mu} \cdot s + 1) \cdot (T_o \cdot s + 1) - T_o + T_o \cdot K_{\text{OC}}}{K_{\text{OC}} \cdot [2 \cdot T_{\mu} \cdot (T_{\mu} \cdot s + 1) \cdot (T_o \cdot s + 1) + T_o]} &= \\
= 1 - \frac{T_o}{K_{\text{OC}} \cdot (2 \cdot T_{\mu} + T_o)} &= \frac{2 \cdot T_{\mu} + T_o - T_o / K_{\text{OC}}}{2 \cdot T_{\mu} + T_o}
\end{aligned} \tag{141}$$

Получается, что всегда будет присутствовать статическая ошибка.

Для уменьшения статической ошибки (в идеале до 0) должен быть использован пропорционально-интегральный (ПИ) регулятор с передаточной функцией (рис. 62).

$$W_P(s) = \beta_P \cdot \frac{\tau_P \cdot s + 1}{\tau_P \cdot s}, \tag{142}$$

где β_p определяется по формуле, аналогичной (134), а постоянная времени регулятора выбирается равной постоянной времени объекта:

$$\beta_p = \frac{T_o}{2 \cdot T_\mu \cdot K_o \cdot K_{\Pi} \cdot K_{OC}}; \quad \tau_p = T_o \quad (143)$$

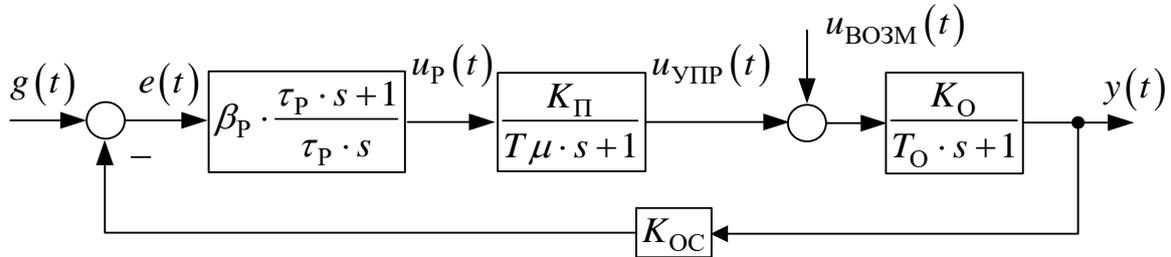


Рис. 62. Замкнутый контур с объектом управления в виде аperiodического звена и ПИ-регулятором

Определим для такой системы передаточную функцию разомкнутого контура:

$$W(s) = \frac{T_o}{2 \cdot T_\mu \cdot K_o \cdot K_{\Pi} \cdot K_{OC}} \cdot \frac{T_o \cdot s + 1}{T_o \cdot s} \cdot \frac{K_{\Pi}}{T_\mu \cdot s + 1} \cdot \frac{K_o}{T_o \cdot s + 1} \cdot K_{OC} =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot T_\mu \cdot s \cdot (T_\mu \cdot s + 1)} \quad (144)$$

Передаточная функция замкнутой системы будет:

$$W_{\text{ЗАМ}}(s) = \frac{W(s)}{[1 + W(s)] \cdot W_{OC}(s)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2 \cdot T_\mu \cdot s \cdot (T_\mu \cdot s + 1)} \cdot \frac{1}{K_{OC}}}{\left[1 + \frac{1}{2 \cdot T_\mu \cdot s \cdot (T_\mu \cdot s + 1)}\right] \cdot \frac{1}{K_{OC}}} = \frac{1}{(2 \cdot T_\mu^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T_\mu \cdot s + 1)} \quad (145)$$

Также определим величину статической ошибки:

$$\begin{aligned}
\frac{G(s) - Y(s)}{G(s)} &= 1 - W_{3AM}(s) = \\
&= 1 - \frac{1}{(2 \cdot T_{\mu}^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T_{\mu} \cdot s + 1) \cdot K_{OC}} = \\
&= \frac{2 \cdot T_{\mu} \cdot s \cdot K_{OC} \cdot (T_{\mu} \cdot s + 1) + K_{OC} - 1}{(2 \cdot T_{\mu}^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T_{\mu} \cdot s + 1) \cdot K_{OC}}
\end{aligned} \tag{146}$$

При $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{2 \cdot T_{\mu} \cdot s \cdot K_{OC} \cdot (T_{\mu} \cdot s + 1) + K_{OC} - 1}{(2 \cdot T_{\mu}^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T_{\mu} \cdot s + 1) \cdot K_{OC}} = 1 - \frac{1}{K_{OC}} \tag{147}$$

Получаем, что статическая ошибка при K_{OC} , стремящимся к нулю, будет стремиться к нулю тоже.

$$K_{OC} \rightarrow 0, \Rightarrow \frac{G(s) - Y(s)}{G(s)} \rightarrow 0 \tag{148}$$

По окончании переходного процесса между задающей и регулируемой величинами теоретически не должно быть никакой разницы (статической ошибки). На практике небольшая ошибка всегда будет, так как усилитель регулятора имеет конечный коэффициент усиления и ошибку установки нуля. При равенстве задающей и регулируемой величин интегральный регулятор выдает в качестве управляющего воздействия тот сигнал, который он выдавал в момент прекращения интегрирования. Поэтому управляющая величина может принимать любое значение в границах области управляемости регулятора.

4.4.3. Неизменяемая часть системы состоит из нескольких апериодических звеньев

Рассмотрим систему, состоящую из нескольких апериодических звеньев, включенных последовательно (рис. 63), сумма постоянных времени этих звеньев равна постоянной времени T .

$$T = \sum_{v=1}^n T_v \tag{149}$$

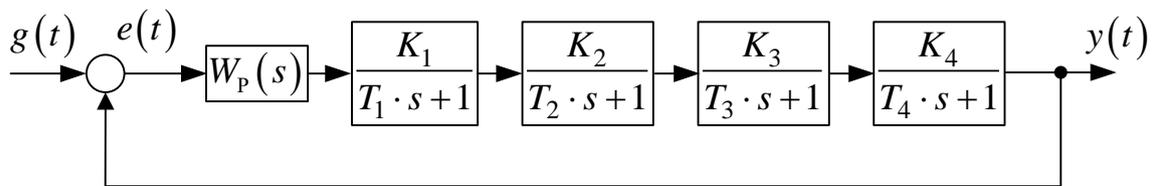


Рис. 63. Система, состоящая из нескольких аperiodических звеньев, включенных последовательно

Сравним поведение данной системы (рис. 63) с системой, состоящей из одного аperiodического звена с постоянной времени T , определенной по (149) (рис. 64).

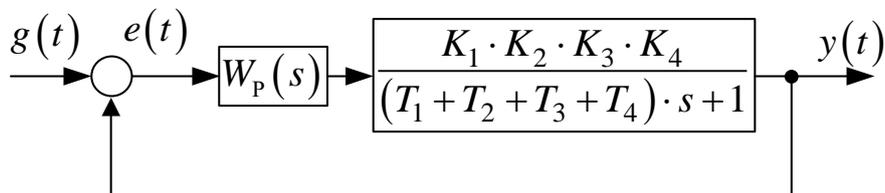


Рис. 64. Система, состоящая из одного аperiodического звена

Сравнивая реакцию разомкнутой системы (рис. 65) на единичное воздействие, можно заметить, что кривые весьма похожи одна на другую.

По окончании переходного процесса в обоих случаях происходит интегрирование, соответствующее параметрам данного регулятора, т. е. наклон изменения регулируемой величины на втором этапе в обоих случаях одинаков.

Точно так же одинаков и временной сдвиг равный $\sum T_v = T$. Только сам переход в случае одного аperiodического звена происходит более плавно и длится дольше.

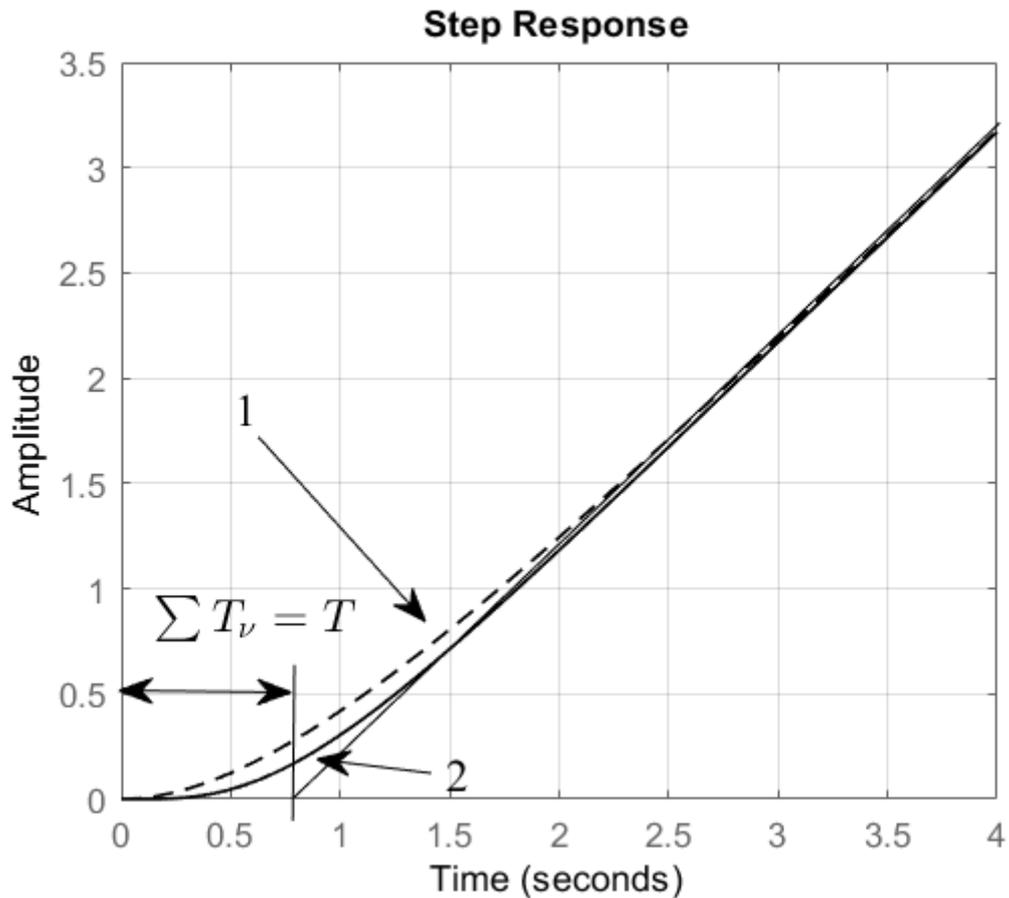


Рис. 65. Реакция разомкнутого контура системы на единичное ступенчатое воздействие:

1 – система, состоящая из нескольких аperiodических звеньев, включенных последовательно; 2 – система, состоящая из одного аperiodического звена

Листинг программы построения графиков (рис. 65).

```
T1=0.05;
T2=0.3;
T3=0.08;
T4=0.4;
K1=2.2;
K2=0.8;
K3=1.6;
K4=0.8;
Ko=K1*K2*K3*K4
To=T1+T2+T3+T4
Kp=1/Ko;
W1=tf([K1],[T1 1]);
W2=tf([K2],[T2 1]);
W3=tf([K3],[T3 1]);
```

```

W4=tf([K4],[T4 1]);
Wp=tf([Kp],[1 0]);
W0=tf([K0],[T0 1]);
Wraz1=Wp*W1*W2*W3*W4;
Wraz2=Wp*W0;
step(Wraz1,'k-',Wraz2,'k--',4),grid

```

С увеличением числа апериодических звеньев первого порядка, включенных последовательно, выходная величина на начальном участке будет больше запаздывать и проходить ближе к оси абсцисс. При бесконечно большом числе звеньев она оставалась бы полностью на оси абсцисс вплоть до времени равным $\sum T_v$, когда она претерпевала бы излом и переходила бы в сдвинутую по времени прямую интегрирования. Подобный вид кривой типичен для звена с запаздыванием.

Следовательно:

- Последовательное соединение большого числа апериодических звеньев первого порядка без существенного ущерба для точности можно заменить одним инерционным звеном, постоянная времени которого $\sum T_v = T$ равна сумме постоянных времени исходных звеньев, т. е.

$$\frac{K_1}{T_1 \cdot s + 1} \cdot \frac{K_2}{T_2 \cdot s + 1} \cdot \frac{K_3}{T_3 \cdot s + 1} \cdot \frac{K_4}{T_4 \cdot s + 1} \dots = \frac{\prod_{v=1}^n K_v}{\sum_{v=1}^n T_v \cdot s + 1} \quad (150)$$

При этом, однако, необходимо, чтобы в рассматриваемом контуре имелось по крайней мере одно интегрирующее звено или хотя бы одно апериодическое звено с постоянной времени, во много раз большей, чем сумма малых постоянных времени.

- Учитывая приведенные выше условия при переходе к бесконечно большому числу апериодических звеньев с малыми постоянными времени $\sum T_v = T$, звено с запаздыванием можно также представить в виде апериодического звена 1-го порядка. Поведение такой цепи показано на рис. 66.

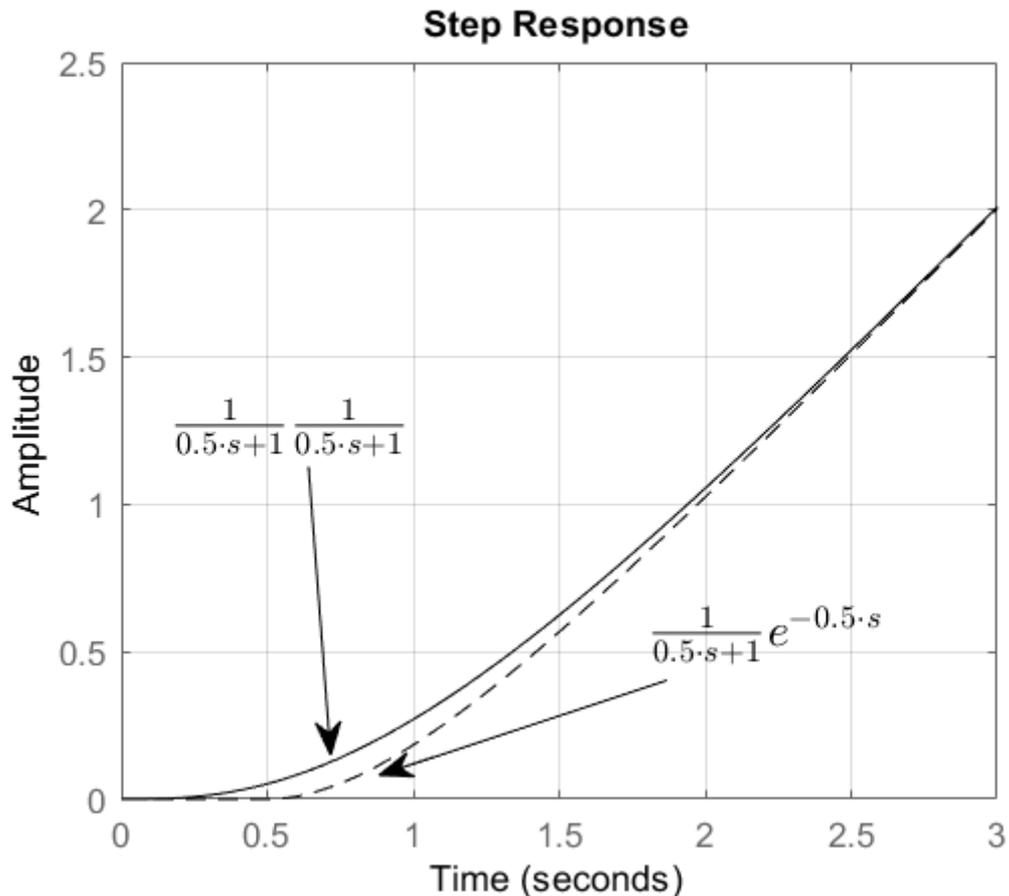


Рис. 66. Реакция разомкнутого контура системы на единичное ступенчатое воздействие:

1 – система, состоящая из нескольких апериодических звеньев, включенных последовательно; 2 – система, состоящая из одного апериодического звена с запаздыванием

Листинг программы построения графиков (рис. 66).

```
T1=0.5;
T2=0.5;
W = tf (1, [0.5 1], 'OutputDelay', 0.5)
W1=tf([1],[T1 1]);
W2=tf([1],[T2 1]);
Wp=tf([1],[1 0]);
Wraz1=Wp*W1*W2;
Wraz2=Wp*W;
step(Wraz1, 'k-', Wraz2, 'k--', 3), grid
```

Если система состоит из нескольких последовательно включенных апериодических звеньев первого порядка, то для настройки на оптимум по модулю (ОМ) целесообразно использовать И-регулятор.

Параметры регулятора должны быть следующими:

$$\beta_P = \frac{1}{2 \cdot \prod_{v=1}^n K_v \cdot T_\mu}; \tau_P = 1, \quad (151)$$

где $T_\mu = \sum_{v=1}^n T_v$.

Передаточная функция замкнутого контура с учетом (150) будет:

$$\begin{aligned} W_{\text{ЗАМ}}(s) &= \frac{W(s)}{[1 + W(s)] \cdot W_{\text{ОС}}(s)} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot \prod_{v=1}^n K_v \cdot T_\mu} \cdot \frac{\prod_{v=1}^n K_v}{T_\mu \cdot s + 1} = \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{2 \cdot \prod_{v=1}^n K_v \cdot T_\mu} \cdot \frac{\prod_{v=1}^n K_v}{T_\mu \cdot s + 1}} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot T_\mu^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T_\mu \cdot s + 1} \end{aligned} \quad (152)$$

Следовательно, передаточная функция оптимизированного контура будет также определяться только суммой малых постоянных времени T_μ . График переходного процесса показан на рис. 67, листинг для построения графика показан ниже.

```
T1=0.05;
T2=0.3;
T3=0.08;
T4=0.4;
K1=2.2;
K2=0.8;
K3=1.6;
K4=0.8;
Ko=K1*K2*K3*K4;
To=T1+T2+T3+T4;
Kp=1/(2*Ko*To);
W1=tf([K1],[T1 1]);
W2=tf([K2],[T2 1]);
W3=tf([K3],[T3 1]);
```

```

W4=tf([K4],[T4 1]);
Wp=tf([Kp],[1 0]);
Wo=tf([Ko],[To 1]);
Wraz1=Wp*W1*W2*W3*W4
Wraz2=Wp*Wo;
Wzam=Wraz1/(1+Wraz1);
step(Wzam,'k-'),grid

```

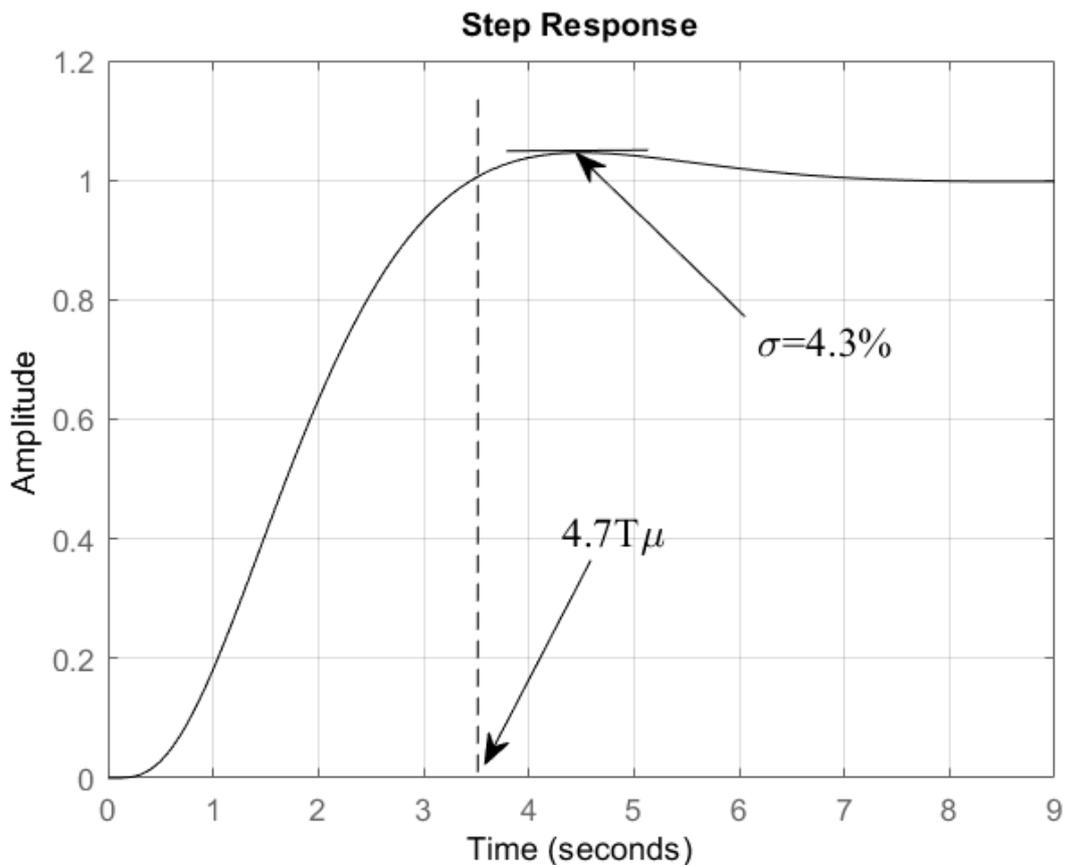


Рис. 67. Реакция замкнутого контура системы, состоящей из нескольких апериодических звеньев, включенных последовательно на единичное ступенчатое воздействие

ЛЧХ разомкнутых и замкнутых контуров скорректированной (1) и не скорректированной (2) систем приведен на рис. 68.

На рис. 68а видно, что частота среза скорректированной системы также определяется суммой малых постоянных времени $\omega_{\text{ср}} = \frac{1}{2 \cdot T_{\mu}}$. ЛАХ замкнутой скорректированной системы (1) в левее частоты среза равен нулю, что подтверждает правильность выполненной настройки на ОМ.

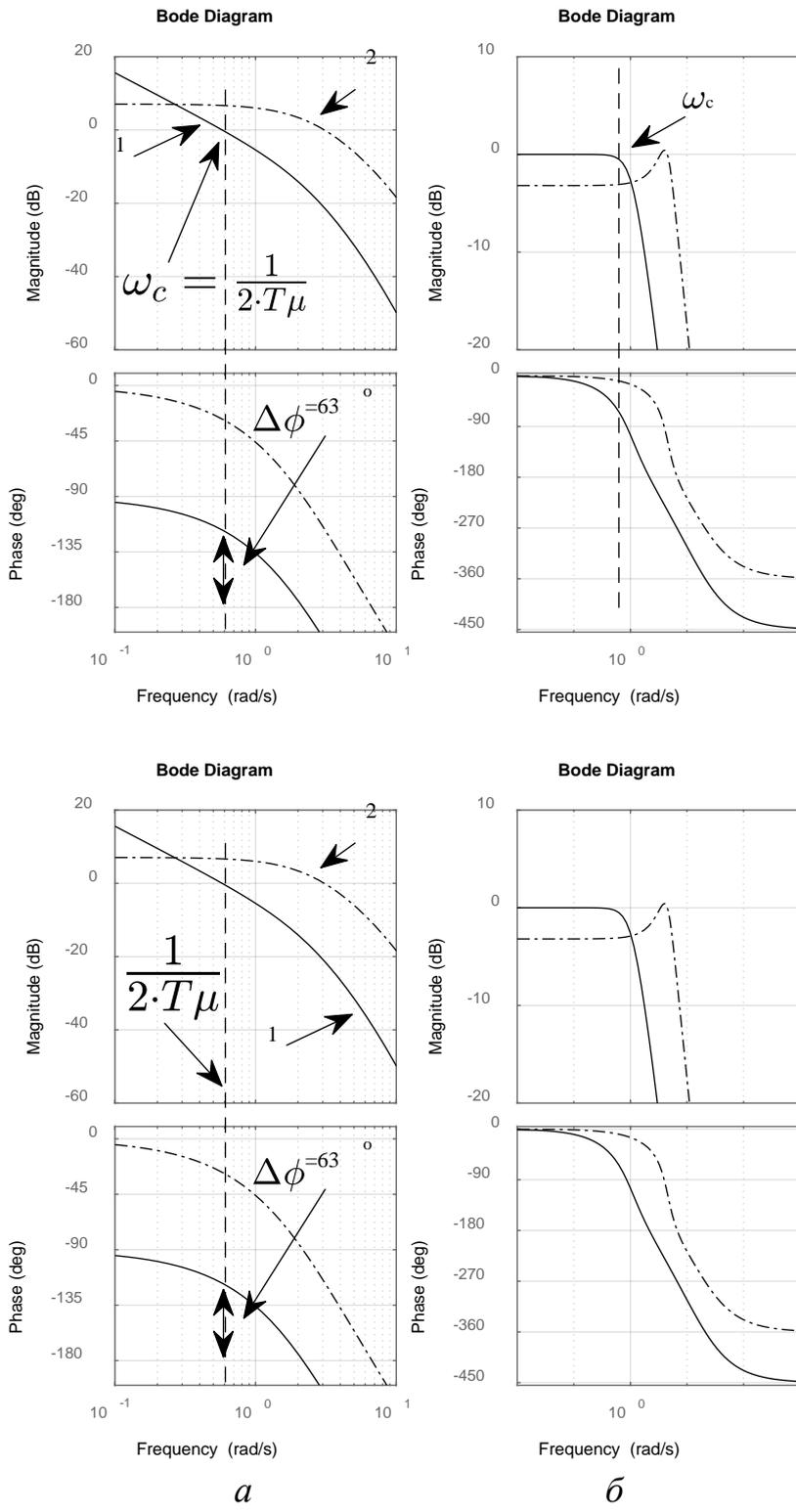


Рис. 68. ЛЧХ разомкнутых и замкнутых контуров: скорректированной (1) и не скорректированной (2) систем

Листинг программы построения ЛЧХ:

```
T1=0.05;  
T2=0.3;  
T3=0.08;  
T4=0.4;  
K1=2.2;  
K2=0.8;  
K3=1.6;  
K4=0.8;  
Ko=K1*K2*K3*K4;  
To=T1+T2+T3+T4;  
Kp=1/(2*Ko*To);  
W1=tf([K1],[T1 1]);  
W2=tf([K2],[T2 1]);  
W3=tf([K3],[T3 1]);  
W4=tf([K4],[T4 1]);  
Wp=tf([Kp],[1 0]);  
Wo=tf([Ko],[To 1]);  
Wraz1=Wp*W1*W2*W3*W4;  
Wraz=W1*W2*W3*W4;  
Wraz2=Wp*Wo;  
Wzam1=Wraz1/(1+Wraz1);  
Wzam=Wraz/(1+Wraz);  
subplot(121)  
bode(Wraz1,'k-',Wraz,'k-.'),grid  
subplot(122)  
bode(Wzam1,'k-',Wzam,'k-.'),grid
```

4.4.4. Неизменяемая часть системы состоит из нескольких апериодических звеньев, причем постоянная времени одного из звеньев больше суммы постоянных времени оставшихся звеньев

При синтезе системы, состоящей из апериодических звеньев, включенных последовательно, причем постоянная времени одного из звеньев больше суммы постоянных времени оставшихся звеньев, необходимо при настройке на ОМ компенсировать большую постоянную времени. В качестве корректирующего звена в таких случаях применяют ПИ-регулятор (142).

Параметры ПИ-регулятора определяются как:

$$\beta_P = \frac{T_O}{2 \cdot T_\mu \cdot \prod_{v=1}^n K_v}; \quad \tau_P = T_O, \quad (153)$$

где T_O – постоянная времени, превышающая по величине сумму постоянных времени оставшихся звеньев;

$T_\mu = \sum_{v=1}^n T_v$ – сумма постоянных времени оставшихся звеньев или сумма малых постоянных времени.

При этом передаточная функция разомкнутого контура будет:

$$\begin{aligned}
 W(s) &= \frac{T_0}{2 \cdot T_\mu \cdot \prod_{v=1}^n K_v} \cdot \frac{T_0 \cdot s + 1}{T_0 \cdot s} \cdot \frac{K_1}{T_1 \cdot s + 1} \cdot \frac{K_2}{T_2 \cdot s + 1} \cdot \frac{K_3}{T_0 \cdot s + 1} \dots = \\
 &= \frac{T_0}{2 \cdot T_\mu \cdot \prod_{v=1}^n K_v} \cdot \frac{T_0 \cdot s + 1}{T_0 \cdot s} \cdot \frac{\prod_{v=1}^n K_v}{T_\mu \cdot s + 1} \cdot \frac{1}{T_0 \cdot s + 1} = \\
 &= \frac{1}{2 \cdot T_\mu \cdot s} \cdot \frac{1}{T_\mu \cdot s + 1}
 \end{aligned} \tag{154}$$

Передаточная функция замкнутого контура:

$$\begin{aligned}
 W_{\text{ЗАМ}}(s) &= \frac{W(s)}{[1 + W(s)] \cdot W_{\text{ОС}}(s)} = \\
 &= \frac{\frac{1}{2 \cdot T_\mu \cdot s} \cdot \frac{1}{T_\mu \cdot s + 1}}{1 + \frac{1}{2 \cdot T_\mu \cdot s} \cdot \frac{1}{T_\mu \cdot s + 1}} = \frac{1}{2 \cdot T_\mu^2 \cdot s^2 + 2 \cdot T_\mu \cdot s + 1}
 \end{aligned} \tag{155}$$

4.4.5. Неизменяемая часть системы состоит из нескольких апериодических звеньев, причем у двух звеньев большие постоянные времени

Если в цепочке апериодических звеньев 1-го порядка находятся не одно, а два звена с особенно большими постоянными времени, то для их компенсации регулятор должен обладать двумя значениями времени. В противном случае система будет с большим замедлением реагировать на новое значение задающей величины или компенсировать возмущающее воздействие. В таком случае наиболее целесообразно использовать ПИД-регулятор.

$$W_P(s) = \beta_P \cdot \frac{(\tau_{P1} \cdot s + 1) \cdot (\tau_{P2} \cdot s + 1)}{\tau_{P1} \cdot s} \tag{156}$$

Настройки регулятора должны быть следующими:

$$\beta_P = \frac{T_{O1}}{2 \cdot T_\mu \cdot \prod_{v=1}^n K_v}; \quad \tau_{P1} = T_{O1}; \quad \tau_{P2} = T_{O2}, \tag{157}$$

где T_{O1} и T_{O2} большие постоянные времени, причем $T_{O1} > T_{O2}$;

$T_\mu = \sum_{\nu=1}^n T_\nu$ – сумма постоянных времени оставшихся звеньев или сумма

малых постоянных времени.

Тогда передаточная функция разомкнутого контура будет:

$$\begin{aligned}
 W(s) &= \frac{T_{O1}}{2 \cdot T_\mu \cdot \prod_{\nu=1}^n K_\nu} \cdot \frac{(T_{O1} \cdot s + 1) \cdot (T_{O2} \cdot s + 1)}{T_{O1} \cdot s} \rightarrow \\
 &\rightarrow \frac{K_1}{T_1 \cdot s + 1} \cdot \frac{K_2}{T_2 \cdot s + 1} \dots \frac{K_{n-1}}{T_{O1} \cdot s + 1} \cdot \frac{K_n}{T_{O2} \cdot s + 1} = \\
 &= \frac{T_{O1}}{2 \cdot T_\mu \cdot \prod_{\nu=1}^n K_\nu} \cdot \frac{(T_{O1} \cdot s + 1) \cdot (T_{O1} \cdot s + 1)}{T_{O1} \cdot s} \rightarrow \\
 &\rightarrow \frac{\prod_{\nu=1}^n K_\nu}{T_\mu \cdot s + 1} \cdot \frac{1}{T_{O1} \cdot s + 1} \cdot \frac{1}{T_{O2} \cdot s + 1} = \\
 &= \frac{1}{2 \cdot T_\mu \cdot s} \cdot \frac{1}{T_\mu \cdot s + 1}
 \end{aligned} \tag{158}$$

Передаточная функция замкнутого контура получается аналогичной (155).

4.4.6. Неизменяемая часть системы состоит из нескольких апериодических звеньев, причем одно звено имеет запаздывание

Отметим, что апериодическое звено первого порядка с запаздыванием может быть представлено как апериодическое звено второго порядка [5].

$$W(p) = \frac{k \cdot e^{-\tau \cdot p}}{T \cdot p + 1} \approx \frac{k}{T \cdot p + 1} \cdot \frac{1}{\tau \cdot p + 1} \tag{159}$$

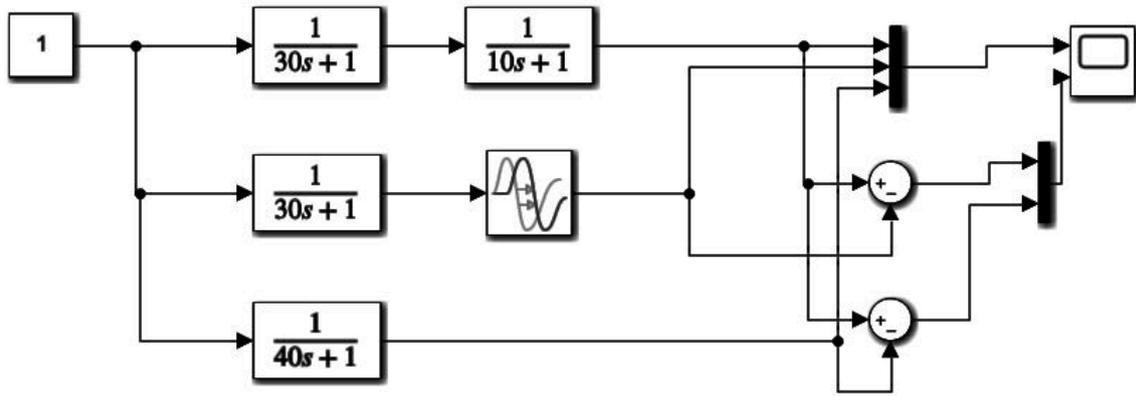


Рис. 69. Аperiodическое звено первого порядка с запаздыванием; аperiodическое звено второго порядка и аperiodическое звено первого порядка с суммарной постоянной времени

Графики переходного процесса и ошибка показаны на рис. 70

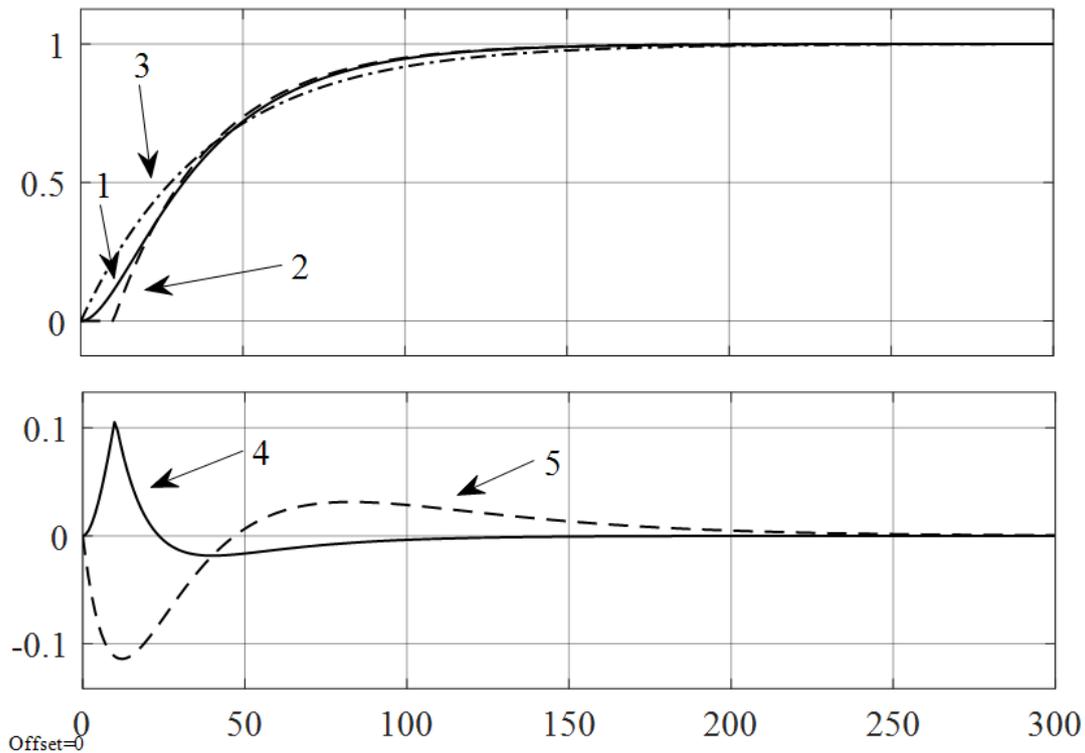


Рис. 70. Графики переходного процесса:

- 1 – аperiodическое звено первого порядка с запаздыванием;
- 2 – аperiodическое звено второго порядка;
- 3 – аperiodическое звено первого порядка с суммарной постоянной времени;
- 4 – разность между графиками переходного процесса двух звеньев (1) и (2);
- 5 – разность между графиками переходного процесса двух звеньев (1) и (3)

На рис. 71 показаны графики переходного процесса для нескорректированной системы (1), разомкнутый контур которой описывается следующей передаточной функцией:

$$W(s) = \frac{K_1}{T_1 \cdot s + 1} \cdot \frac{K_2}{T_2 \cdot s + 1} \cdot \frac{K_3}{T_O \cdot s + 1} \cdot \frac{K_4 \cdot e^{-\tau \cdot s}}{T_O \cdot s + 1} =$$

$$\frac{2.2}{0.05 \cdot s + 1} \cdot \frac{0.8}{0.3 \cdot s + 1} \cdot \frac{1.6}{0.08 \cdot s + 1} \cdot \frac{0.8 \cdot e^{-5 \cdot s}}{20 \cdot s + 1} \quad (160)$$

Для синтеза данной системы выбираем ПИ-регулятор с настройками на ОМ согласно (153):

$$\beta_P = \frac{T_O}{2 \cdot (T_1 + T_2 + T_3 + \tau) \cdot (K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_4)} = 0.8175; \quad \tau_P = T_O = 20 \quad (161)$$

Тогда передаточная функция разомкнутого контура будет:

$$W_{\text{КОР}}(s) = \beta_P \cdot \frac{\tau_P \cdot s + 1}{\tau_P \cdot s} \cdot \frac{K_1}{T_1 \cdot s + 1} \cdot \frac{K_2}{T_2 \cdot s + 1} \cdot \frac{K_3}{T_O \cdot s + 1} \cdot \frac{K_4 \cdot e^{-\tau \cdot s}}{T_O \cdot s + 1} =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot (T_1 + T_2 + T_3 + \tau)} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(T_1 + T_2 + T_3 + \tau) \cdot s + 1} \cdot e^{-\tau \cdot s} =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 5.43} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{5.43 \cdot s + 1} \cdot e^{-5 \cdot s} \quad (162)$$

График переходного процесса скорректированной системы (2) показан на рис. 71.

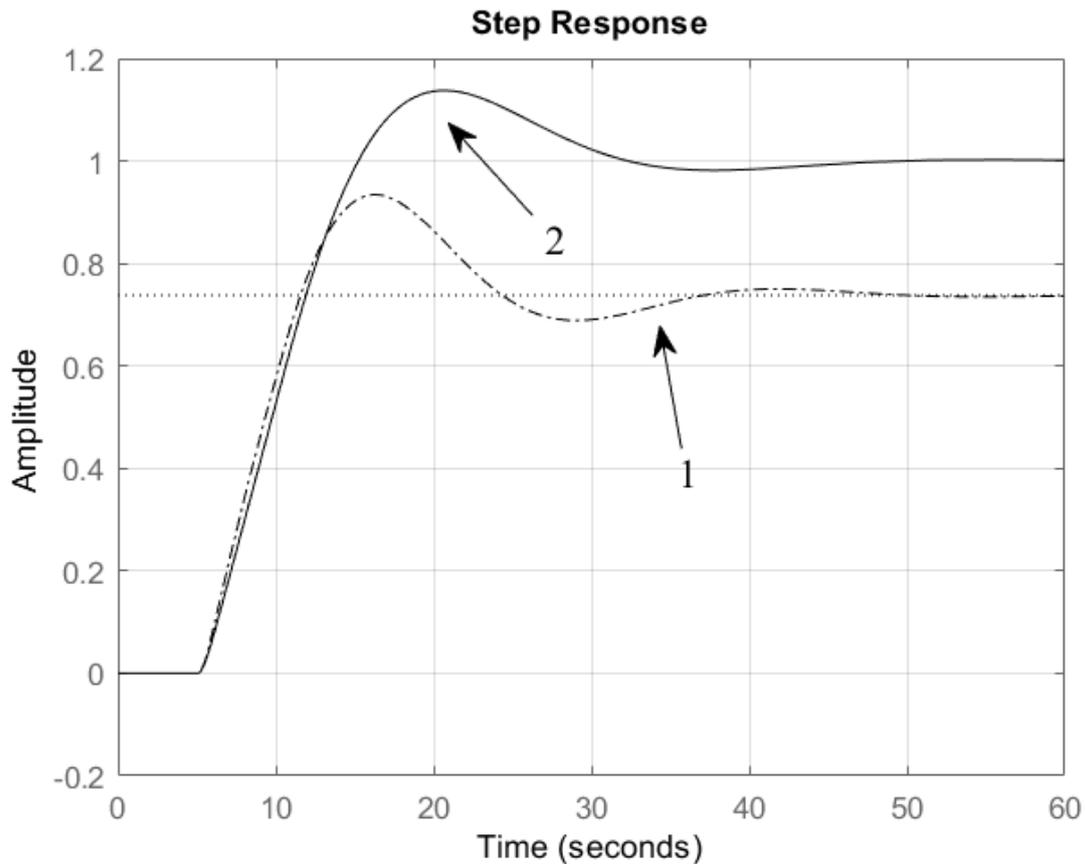


Рис. 71. График переходного процесса для системы, состоящей из апериодических звеньев и одним звеном с большой постоянной времени и запаздыванием:

- 1 – график переходного процесса нескорректированной системы;
- 2 – график переходного процесса скорректированной системы

Листинг программы построения графиков (рис. 71):

```

T1=0.05;
T2=0.3;
T3=0.08;
T4=20;
T5=5;
K1=2.2;
K2=0.8;
K3=1.6;
K4=0.8;
Ko=K1*K2*K3*K4;
To=T1+T2+T3+T5;
Kp=T4/(2*Ko*To);
tau=T4;
W1=tf([K1],[T1 1]);
W2=tf([K2],[T2 1]);

```

```

W3=tf([K3],[T3 1]);
W4=tf(1,[T4 1],'OutputDelay',T5);
Wp1=tf([Kp],[1])*tf([tau 1],[tau 0]);
Wraz1=Wp1*W1*W2*W3*W4;
Wraz=W1*W2*W3*W4;
Wzam1=Wraz1/(1+Wraz1);
Wzam=Wraz/(1+Wraz);
step(Wzam1,'k-',Wzam,'k-.'),grid

```

ЛЧХ разомкнутой (а) и замкнутой (б) исходной (1) и скорректированной системы (2) приведены на рис. 72.

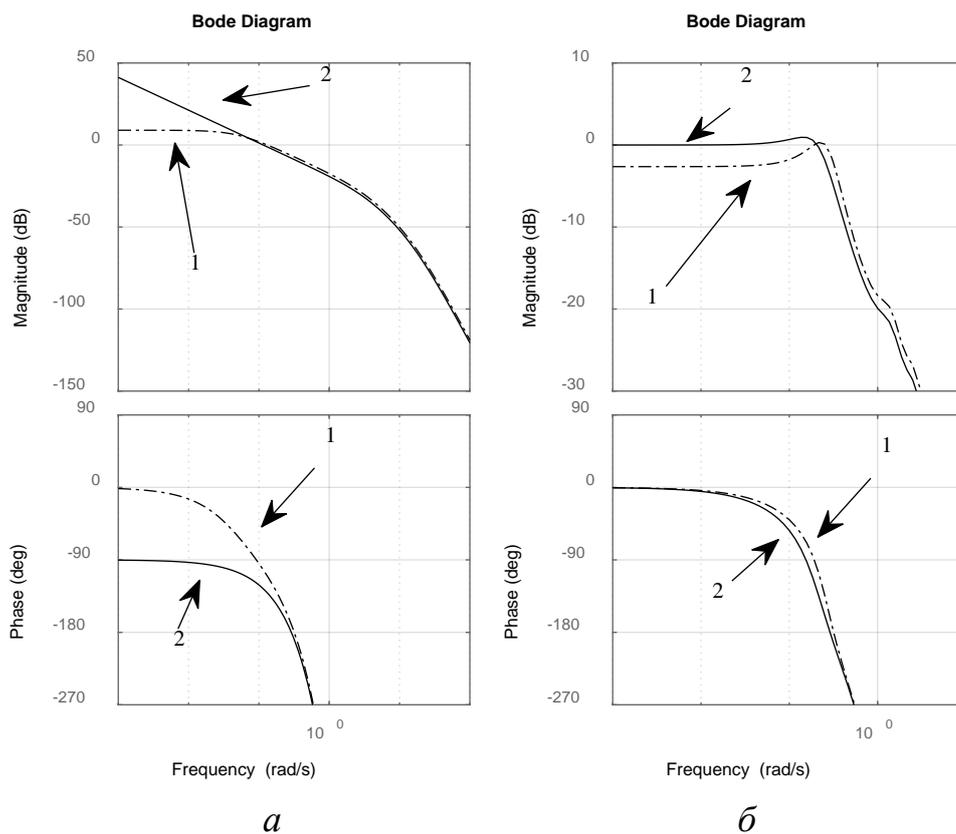


Рис. 72. ЛЧХ разомкнутой (а) и замкнутой (б); исходной (1) и скорректированной системы (2)

Листинг программы построения ЛЧХ:

```

T1=0.05;
T2=0.3;
T3=0.08;
T4=20;
T5=5;
K1=2.2;
K2=0.8;
K3=1.6;

```

```

K4=0.8;
Ko=K1*K2*K3*K4;
To=T1+T2+T3+T5;
Kp=T4/(2*Ko*To);
tau=T4;
W1=tf([K1],[T1 1]);
W2=tf([K2],[T2 1]);
W3=tf([K3],[T3 1]);
W4=tf(1,[T4 1],'OutputDelay',T5);
Wp1=tf([Kp],[1])*tf([tau 1],[tau 0]);
Wraz1=Wp1*W1*W2*W3*W4;
Wraz=W1*W2*W3*W4;
Wzam1=Wraz1/(1+Wraz1);
Wzam=Wraz/(1+Wraz);
subplot(121)
bode(Wraz1,'k-',Wraz,'k-.'),grid
subplot(122)
bode(Wzam1,'k-',Wzam,'k-.'),grid

```

5. СИСТЕМЫ ПОДЧИНЕННОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ (КАСКАДНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ)

В настоящее время при создании систем автоматического управления широко применяется принцип последовательной коррекции или принцип подчиненного (каскадного) регулирования.

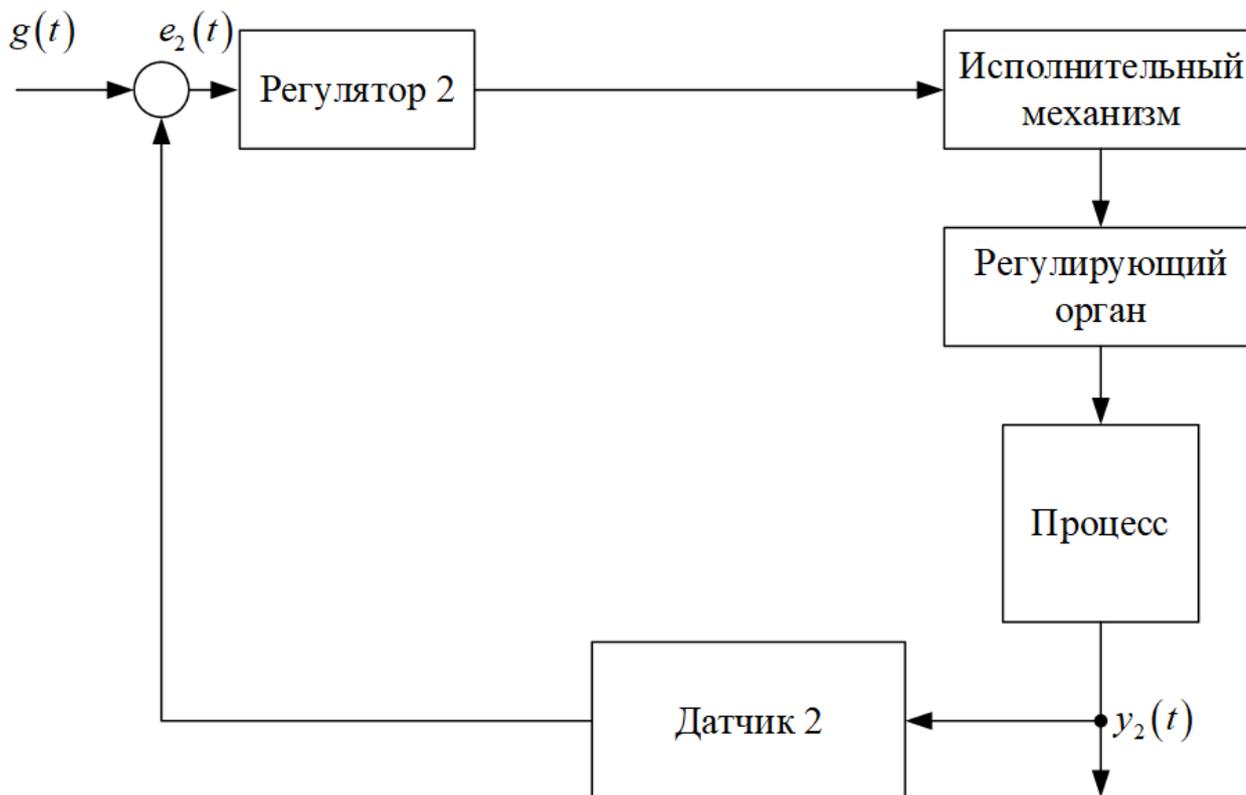


Рис. 73. Одноконтурная система регулирования

Датчик 2 в контуре регулирования рис. 73 контролирует основную регулируемую величину $y_2(t)$. Если $y_2(t)$ на выходе изменилась, то информация об этом через датчик 2 поступит на сумматор. Вычисленная разность $e_2(t)$ поступит на вход регулятора 2, который вырабатывает выходной сигнал, для управления регулирующего органа через исполнительный механизм, являющимся конечным элементом контура регулирования. Регулирующий орган или увеличивает, или уменьшает поток регулируемой среды (жидкость, пар, энергия), обеспечивая возвращение регулируемой величины $y_2(t)$ к заданному значению $g(t)$. Однако из-за характеристик запаздывания процесса изменение регулируемой величины $y_2(t)$ будет медленным, и потребуется длительное время, прежде чем контур регулирования сможет считывать на сколько

регулируемая величина $y_2(t)$ изменилась. К тому времени могут произойти слишком большие изменения регулируемой величины $y_2(t)$. В результате контур регулирования выработает избыточно сильное управляющее воздействие, что может привести к отклонению в противоположную сторону (перерегулированию), и снова будет «ждать» результат. В связи с медленной реакцией подобно этой регулируемая величина $y_2(t)$ может циклически колебаться вверх и вниз в течение долгого времени, прежде чем придет к устойчивому состоянию, возвратившись на значение уставки.

Переходной процесс системы регулирования улучшается, когда система дополняется вторым контуром каскадного регулирования. Добавленный контур – это ведомый контур каскадного регулирования (рис. 74).

Подчиненное (каскадное) регулирование – это регулирование, в котором два или больше контуров регулирования соединены так, чтобы выход одного регулятора корректировал уставку другого регулятора.

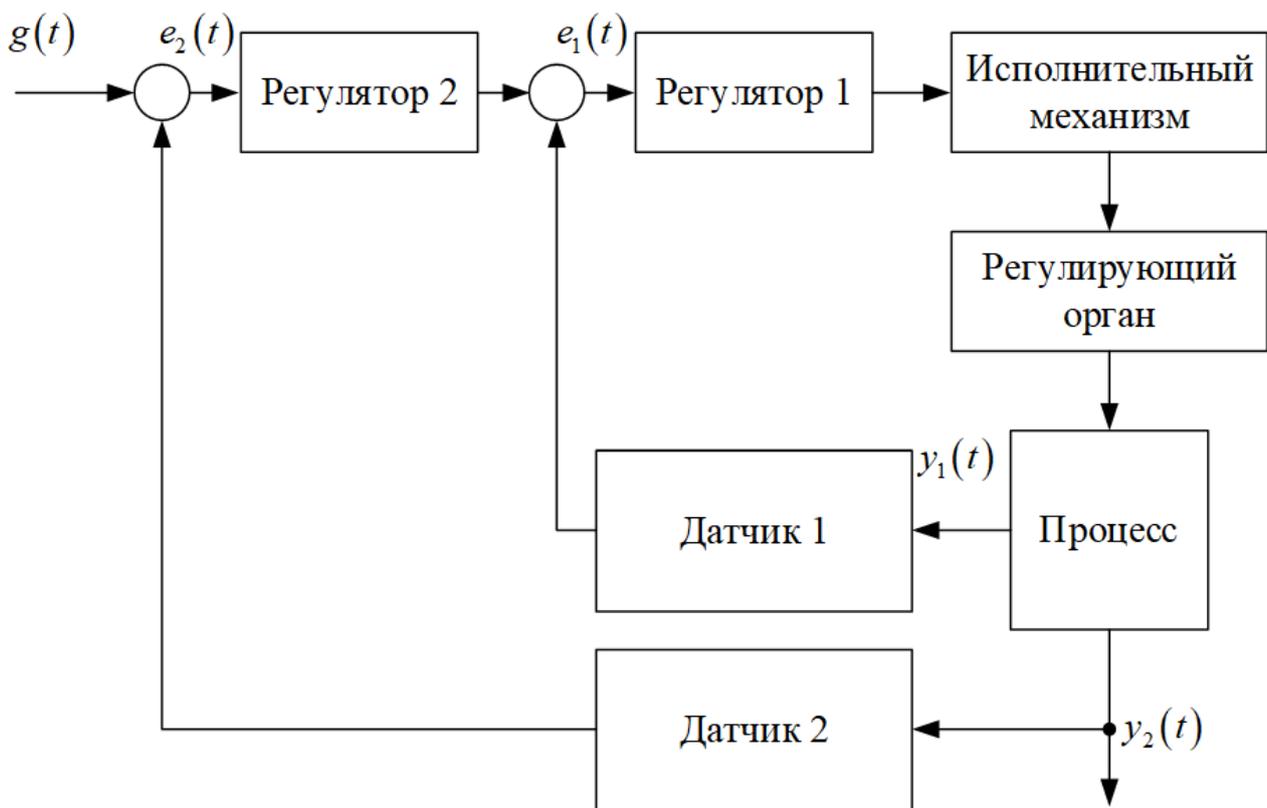


Рис. 74. Система подчиненного (каскадного) регулирования

На рис. 74 приведена блок-схема, которая иллюстрирует понятие каскадного регулирования. Блоки на диаграмме фактически представляют компоненты двух контуров регулирования: ведущий контур, который составлен из элементов системы регулирования, регулируемый орган – датчик 2 –

регулятор 2 и ведомый контур, который составлен из элементов системы регулирования регулирующей орган – датчик 1 – регулятор 1. Выход регулятора ведущего контура является заданием (уставкой) для регулятора ведомого контура регулирования. Регулятор ведомого контура вырабатывает управляющий сигнал для исполнительного механизма.

Для процессов, которые имеют значительные характеристики запаздывания (емкость или сопротивление, которые замедляют изменения переменной), ведомый контур регулирования каскадной системы может обнаружить рассогласование в процессе раньше и уменьшить тем самым время, требующееся для устранения рассогласования. Можно сказать, что ведомый контур регулирования «делит» запаздывание и уменьшает воздействие возмущения на процесс.

В системе каскадного регулирования используется больше, чем один первичный чувствительный элемент, и регулятор (в ведомом контуре регулирования) получает больше, чем один входной сигнал. Следовательно, система каскадного регулирования – это многоконтурная система регулирования.

Согласно рис. 74, когда изменяется регулируемая величина $y_1(t)$, эти изменения будут переданы ведомому регулятору 1. В то же самое время будет зафиксировано изменение регулируемой величины $y_2(t)$ в ведущем контуре регулирования ведущем регулятором 2. Этот регулятор вычислит сигнал, который будет заданием ведомому регулятору 1. Затем на сумматоре будет вычислена ошибка регулирования $e_1(t)$ между новым заданием от регулятора 2 и сигналом от датчика 1, и регулятор 1 вырабатывает корректирующий сигнал, который посылается на регулирующей орган через исполнительный механизм, чтобы корректировать внутреннюю регулируемую величину $y_1(t)$.

В системе регулирования с добавлением к основному контуру ведомого контура регулирования любое изменение внутренней регулируемой величины немедленно считывается дополнительным контуром. Необходимая корректировка выполняется почти сразу, прежде чем возмущение воздействует внешнюю регулируемую величину.

Рассмотрим основные принципы подчиненного (каскадного) управления (рис. 75).

Объект регулирования представляется в виде последовательно соединенных звеньев $W_{Oy_1}(p)$, $W_{Oy_2}(p)$, $W_{Oy_3}(p)$, ..., $W_{Oy_n}(p)$ с промежуточными координатами $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$, ..., $y_n(t)$.

Для управления каждой координатой организуется отдельный контур со своей обратной связью и своим регулятором. На рис. 75 датчики координат представлены звеньями с передаточными функциями $W_{д1}(p)$, $W_{д2}(p)$, $W_{д3}(p)$, ..., $W_{дn}(p)$, а передаточные функции регуляторов обозначены через $W_{р1}(p)$, $W_{р2}(p)$, $W_{р3}(p)$, ..., $W_{рn}(p)$.

Замкнутые контуры регулирования образуют систему, в которой имеется внутренний контур управления, состоящий из регулятора $W_{p1}(p)$, исполнительного механизма $W_{им}(p)$, регулирующего органа $W_{po}(p)$, первого звена объекта управления $W_{oy1}(p)$ и цепи обратной связи по координате $y_1(t)$ с датчиком обратной связи $W_{д1}(p)$, первый внешний контур, включающий в себя внутренний контур, второе звено объекта управления $W_{oy2}(p)$, цепь обратной связи по координате $y_2(t)$, датчик $W_{д2}(p)$ и регулятор $W_{p2}(p)$ и второй внешний контур, включающий в себя первый внешний контур, третье звено объекта управления $W_{oy3}(p)$, обратную связь по координате $y_3(t)$ с датчиком $W_{д3}(p)$, регулятор $W_{p3}(p)$, для рассматриваемого случая регулируемой переменной всей системы является $y(t) = y_3(t)$.

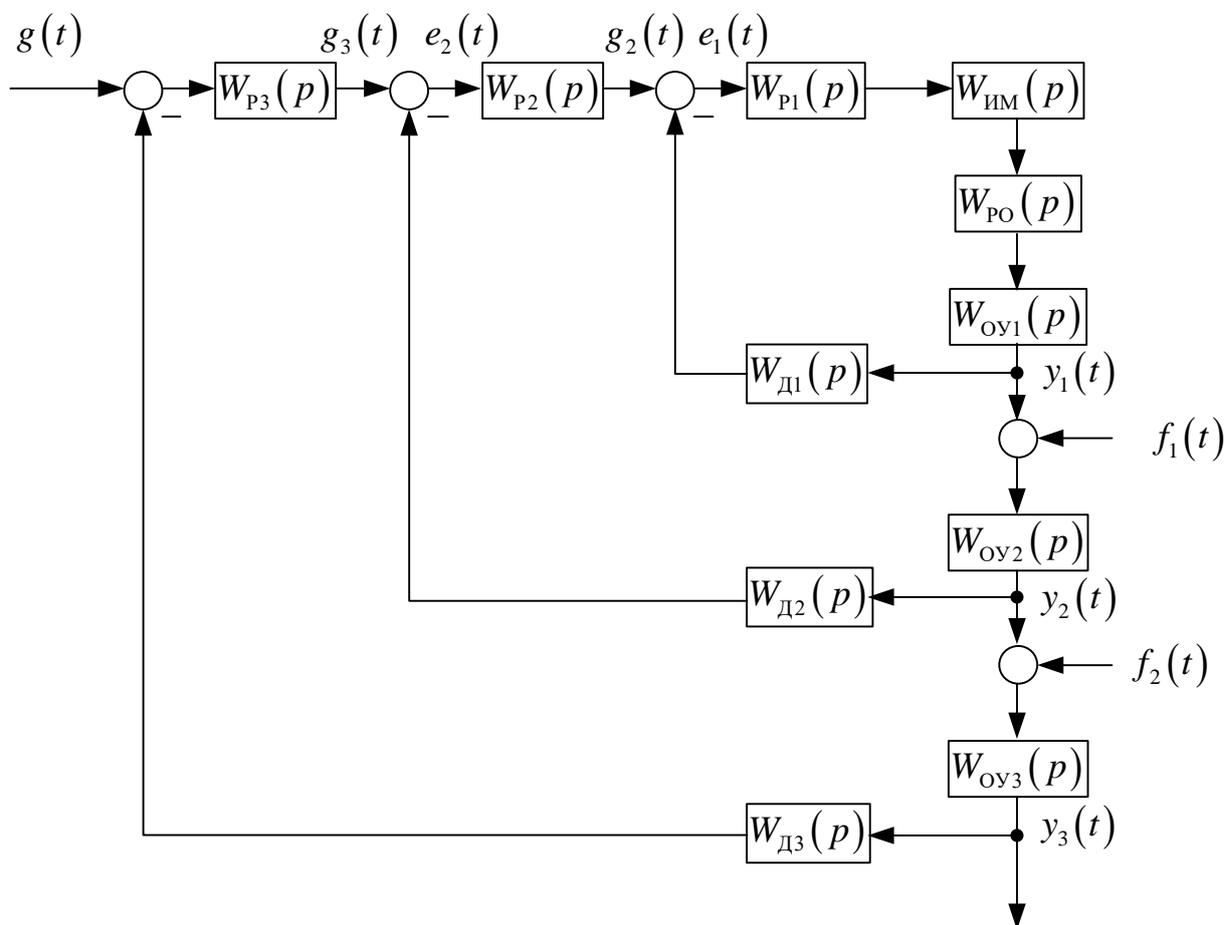


Рис. 75. Структурная схема системы подчиненного регулирования (каскадная система управления)

Выходной сигнал регулятора каждого внешнего контура является задающим для последующего, заключенного внутри него контура. Таким

образом, каждый внутренний контур регулирования подчинен соответствующему внешнему.

Каскадные системы управления характеризуются лучшим качеством управления по сравнению с одноконтурными системами по следующим причинам:

- возмущения $f_1(t)$, $f_2(t)$, поступающие на части объекта, расположенные ближе к входу, прежде чем воздействовать на выходную координату $y(t)$ (регулируемую переменную) предварительно парируются во внутренних контурах управления;
- наличие внутренних контуров уменьшает влияние изменения параметров входной части на динамические качества системы регулирования (снижается чувствительность системы к изменению параметров объекта);
- поведение регулируемой переменной $y(t)$ становится более быстрым (менее инертным), если внутренний контур обеспечивает более быстрые собственные движения по сравнению с исходными.

Практическое преимущество разделения системы на контуры с основными и вспомогательными регуляторами состоит в том, что настройку их параметров можно осуществлять независимо и последовательно. Она осуществляется следующим образом:

1. Настройка первого внутреннего контура осуществляется на оптимум по модулю (см. п. 4.4).
2. При переходе к внешнему контуру передаточную функцию замкнутого внутреннего контура упрощают, аппроксимируя его апериодическим звеном первого порядка:

$$W_{\text{ЗАМ}i}(p) = \frac{1/K_{\text{Д}i}}{T_{\text{Э}i} \cdot p + 1}, \quad (163)$$

где $T_{\text{Э}i} = 2 \cdot T_{\mu i}$ – эквивалентная постоянная времени i -го внутреннего контура,

$K_{\text{Д}i}$ – коэффициент передачи датчика обратной связи i -го внутреннего контура.

Новую некомпенсированную постоянную выбирают с учетом быстродействия внутреннего контура и датчиков обратной связи. Если постоянные времени последних действительно малы, то их практически можно не выделять из других постоянных времени.

Если во внешнем контуре есть свои малые постоянные, то эквивалентная постоянная времени замкнутого внутреннего контура $T_{\text{Э}i}$ входит в состав суммарной малой постоянной времени $T_{\mu i+1}$.

$$T_{\mu i+1} = T_1 + T_2 + \dots + T_{\text{Э}i} \quad (164)$$

Если во внешнем контуре нет своих малых постоянных времени, то для него некомпенсируемая постоянная времени $T_{\mu i+1}$ выбирается равной $T_{\Delta i}$.

$$T_{\mu i+1} = T_{\Delta i} \quad (165)$$

Заменяя первый внешний контур эквивалентным апериодическим звеном, аналогичным образом осуществляем оптимизацию второго внешнего контура и т. д.

Легко установить, что быстродействие каждого внешнего контура не менее чем в 2 раза ниже быстродействия подчиненного ему внутреннего контура.

К преимуществам системы подчиненного регулирования можно отнести:

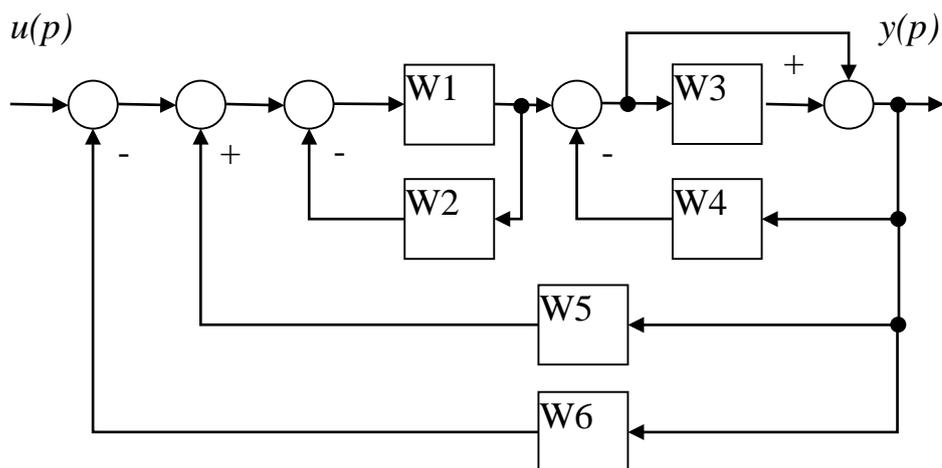
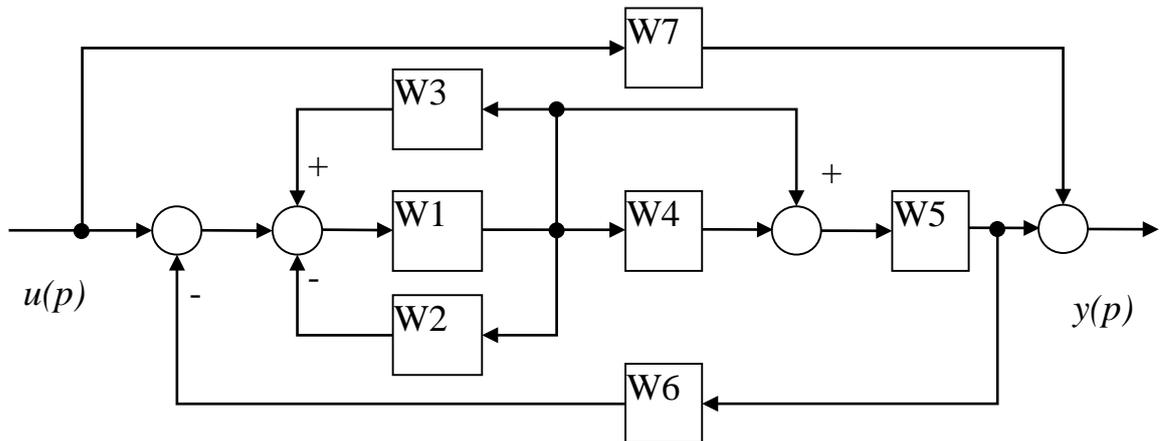
- простоту наладки и настройки (каждый контур включает в себя регулятор, за счет придания которому определенных динамических свойств получаются стандартные характеристики. Настройку в процессе наладки ведут начиная с внутреннего контура. Поскольку регулятор имеет простую передаточную функцию, а качество настройки может быть легко оценено по результатам сравнения реакции контура на скачок управляющего воздействия со стандартной переходной характеристикой, наладка системы оказывается очень простой);
- удобство ограничения предельных значений промежуточных координат системы, поскольку выходной сигнал регулятора внешнего контура является заданным значением для внутреннего контура, что позволяет контролировать внутренние переменные и при необходимости ограничивать их предельные отклонения.

Недостаток – некоторый проигрыш по быстродействию, связанный с последовательным воздействием на объект через внутренние контура, а не сразу через входное звено объекта. В большинстве случаев конкретного применения в системах автоматического управления указанный недостаток несуществен, а перечисленные выше преимущества имеют решающее значение.

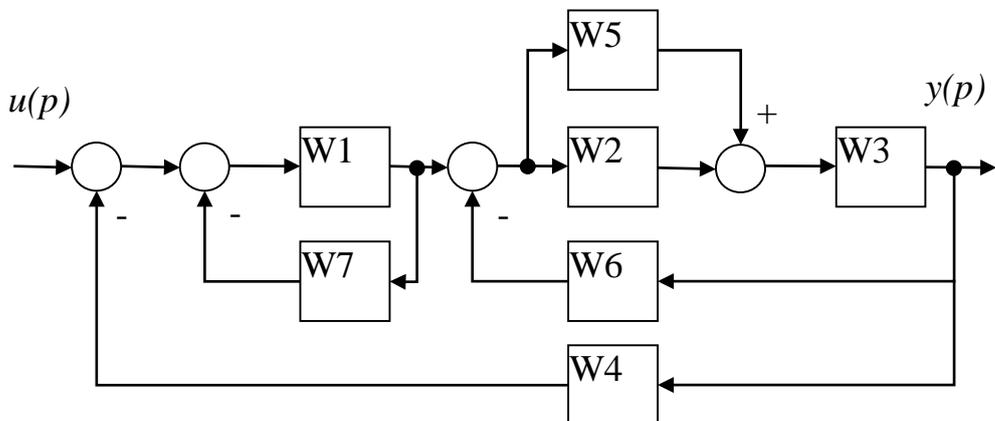
6. ЗАДАНИЕ № 1

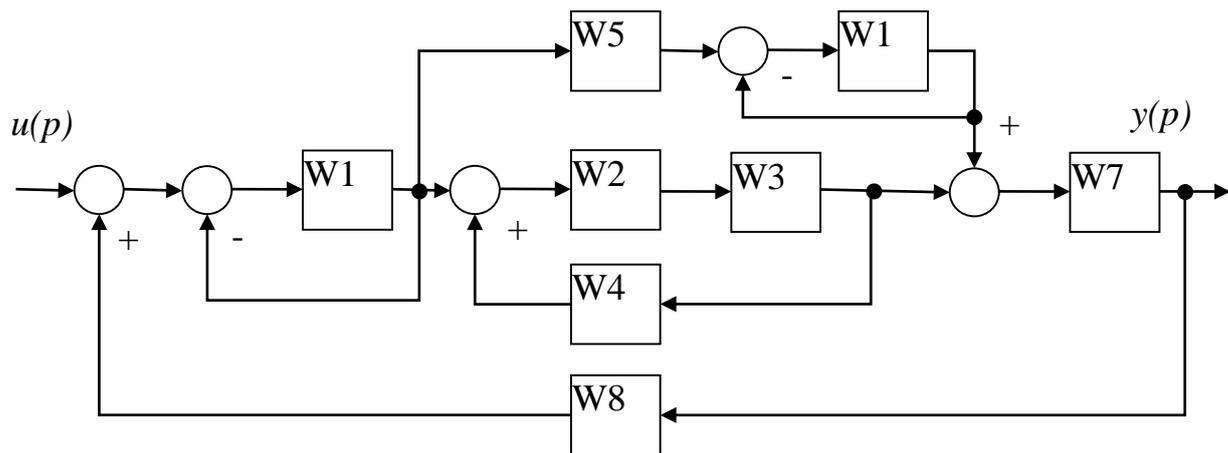
Найти передаточные функции систем двумя способами (структурные преобразования и теорема Мэйсона).

Вариант 1.

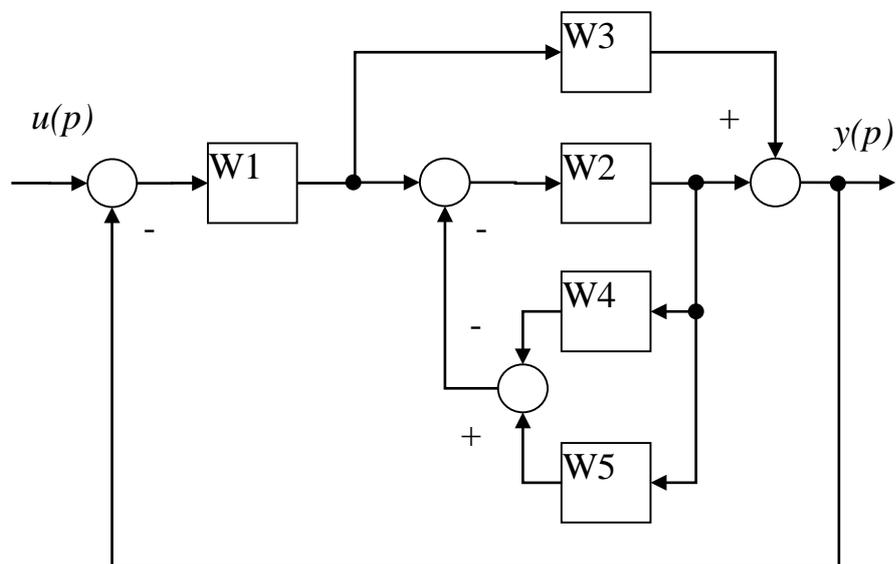
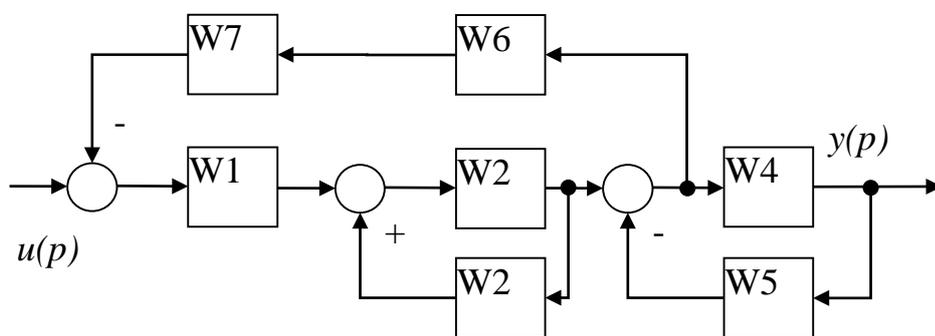


Вариант 2.

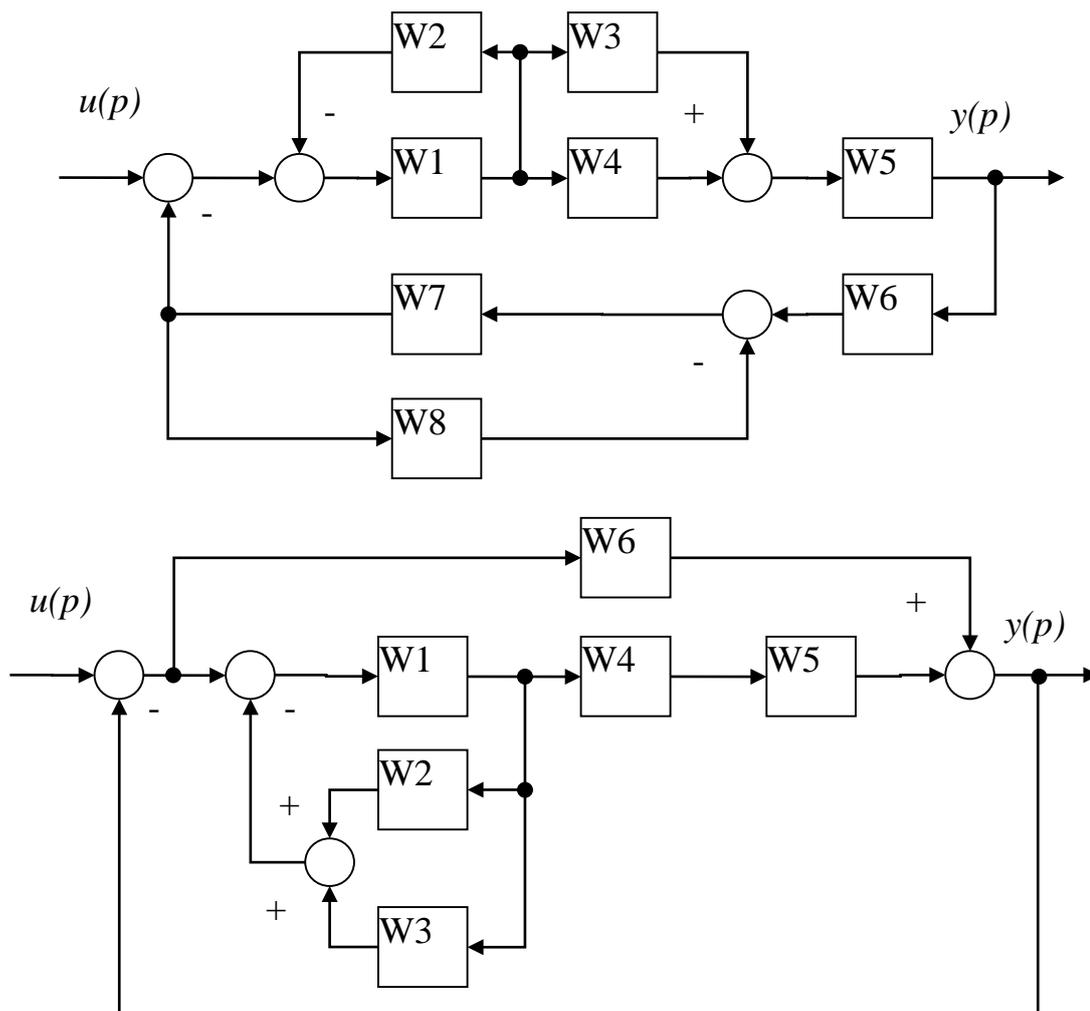




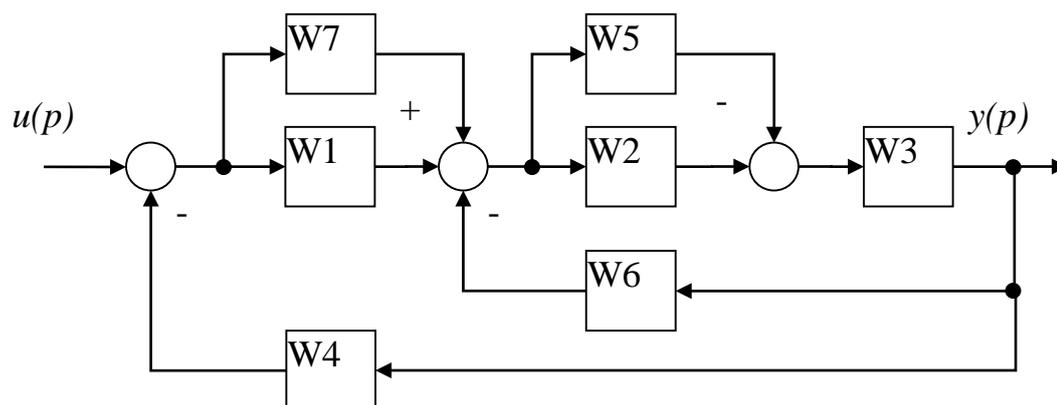
Вариант 3.

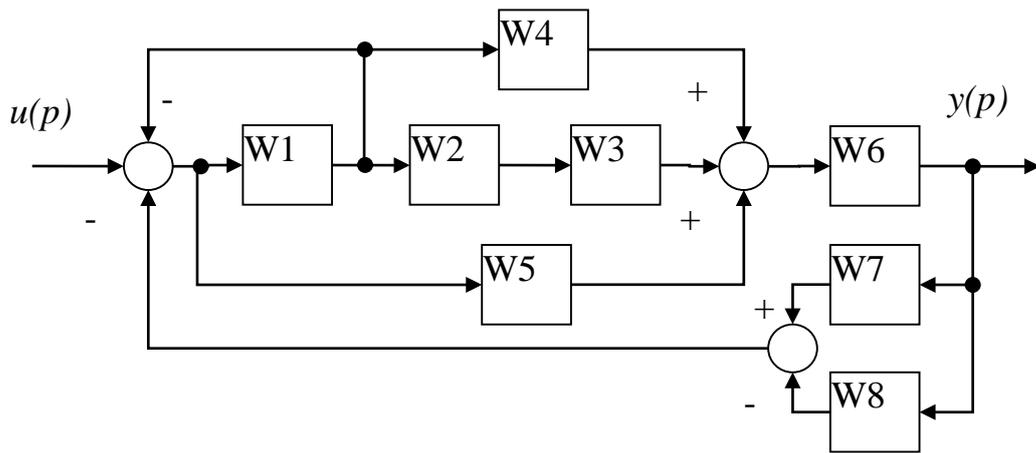


Вариант 4.

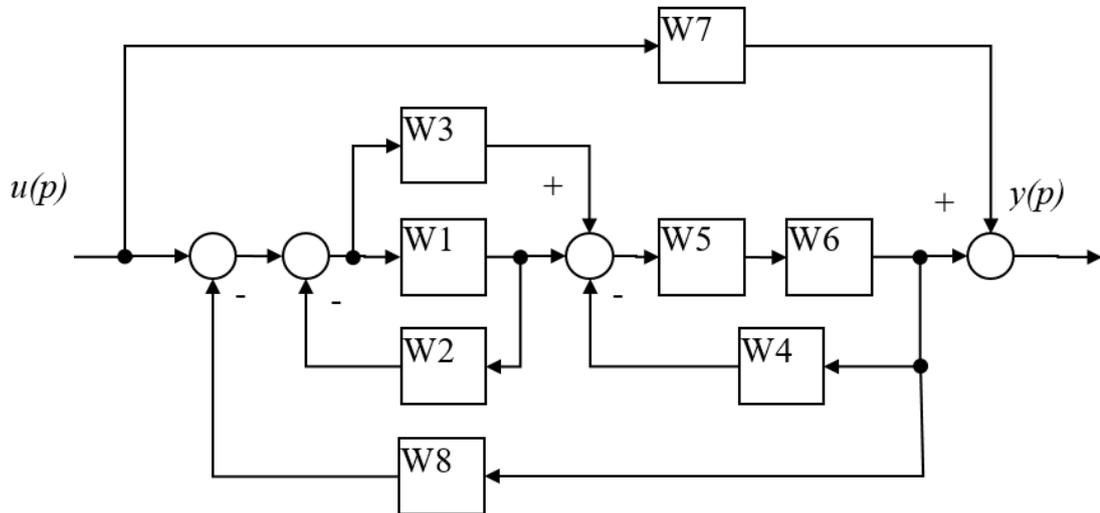
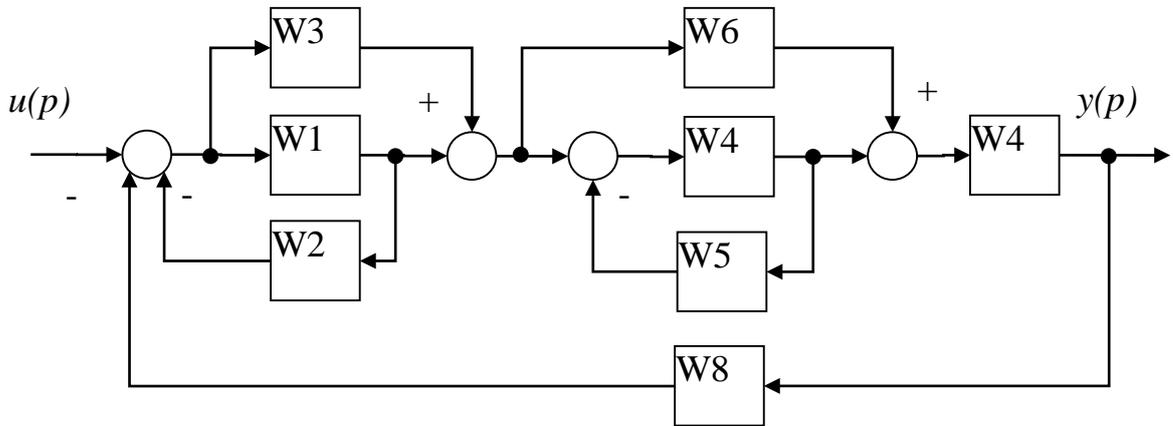


Вариант 5.

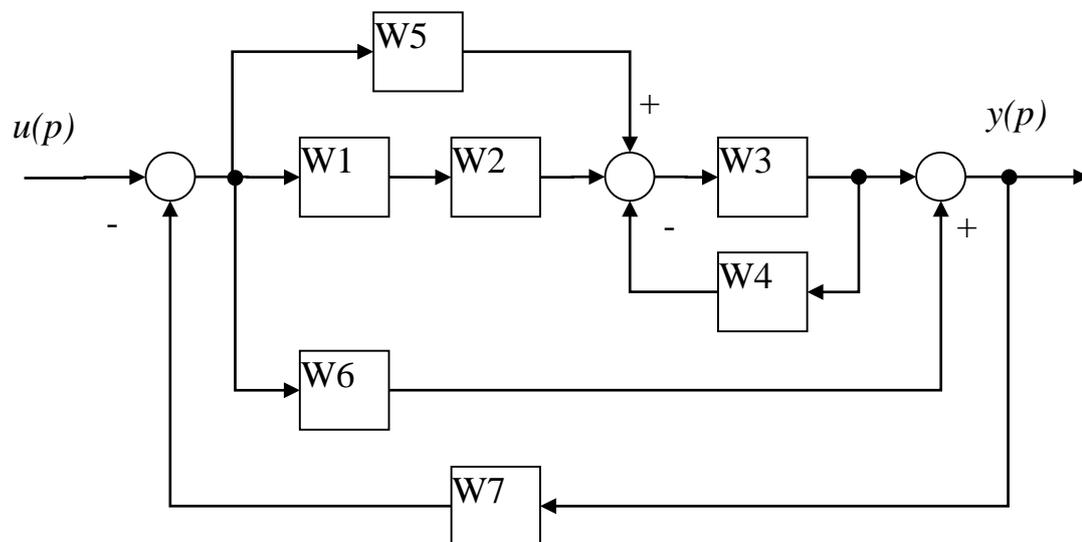
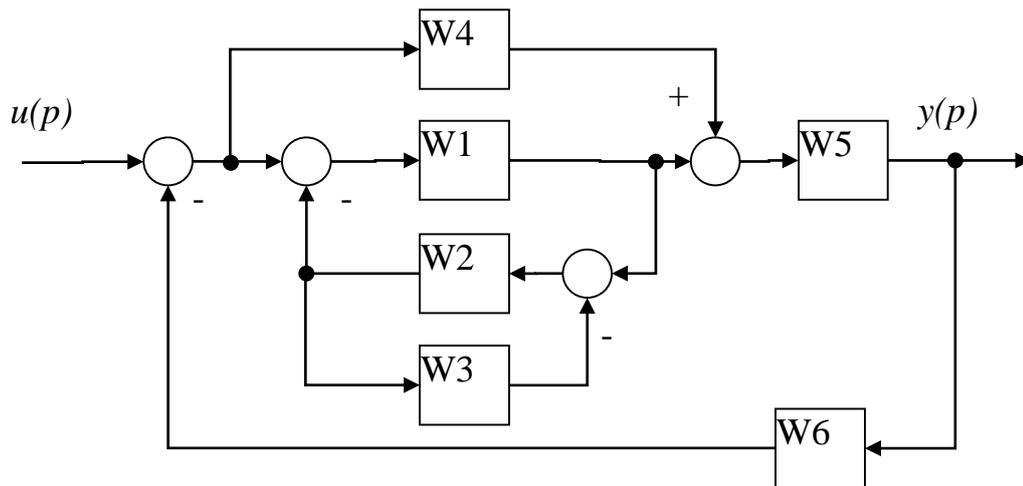




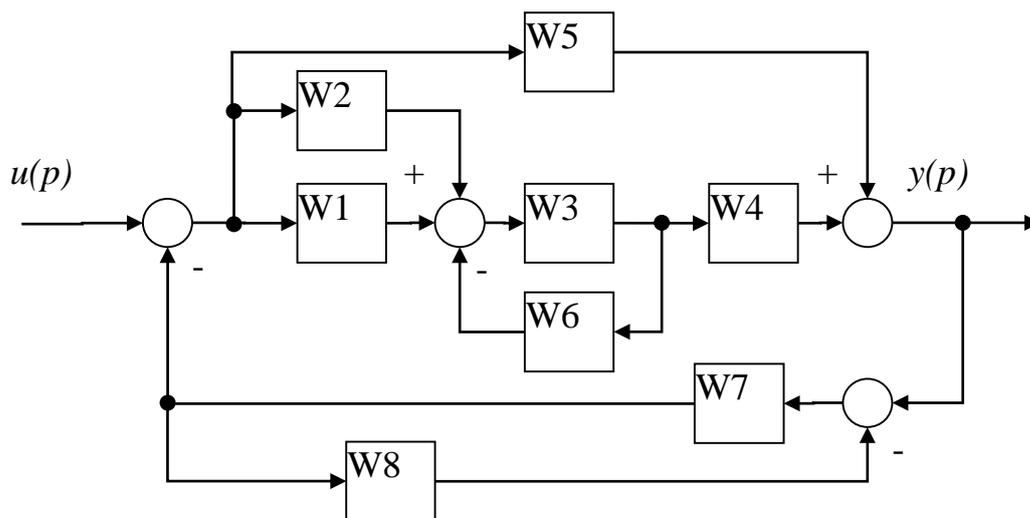
Вариант 6.

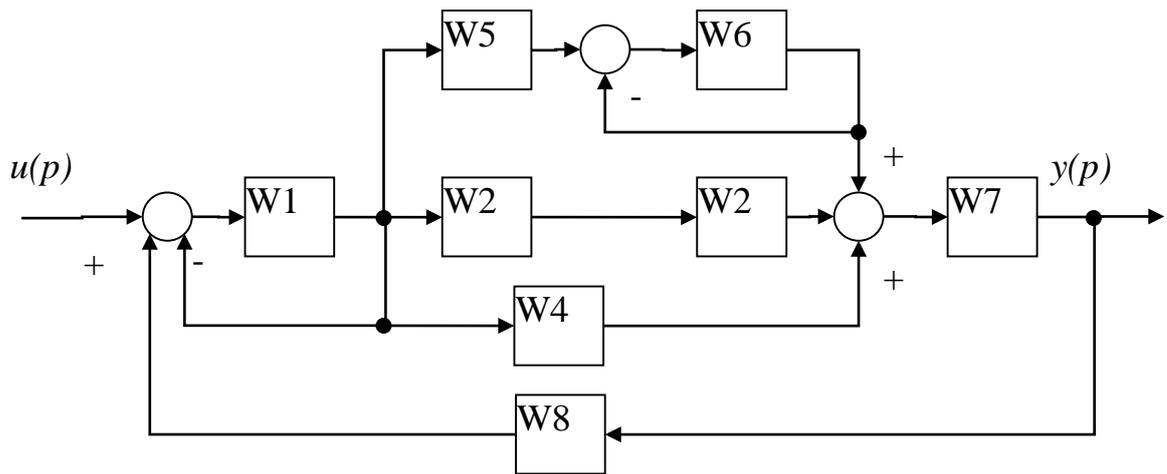


Вариант 7.

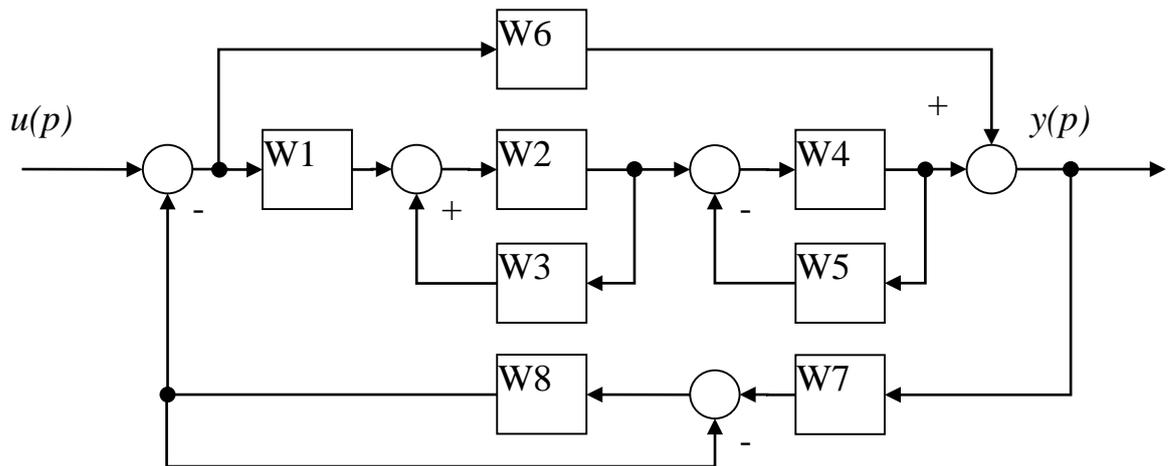
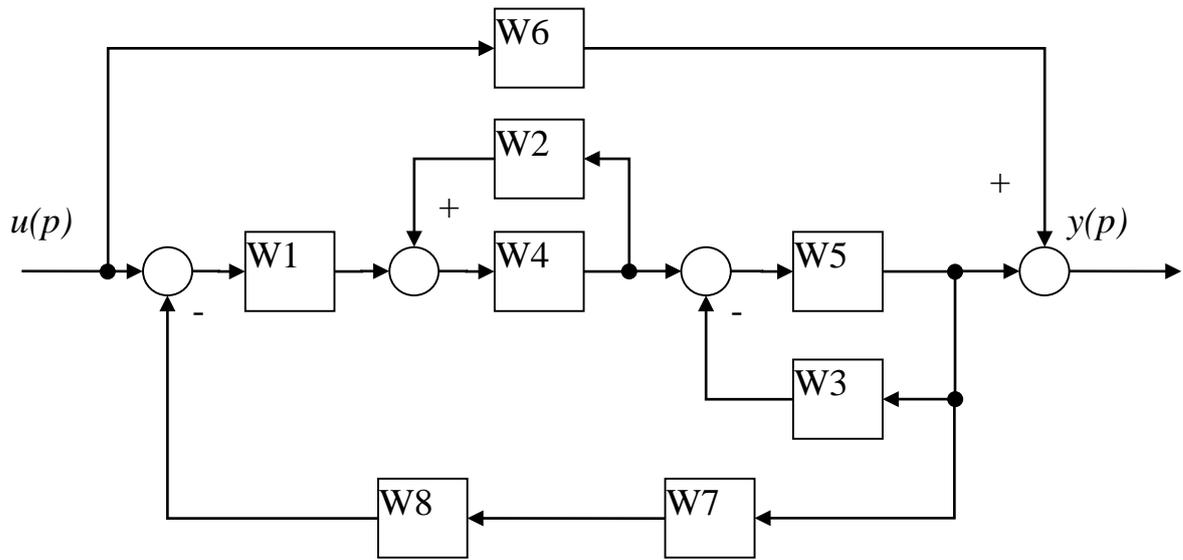


Вариант 8.

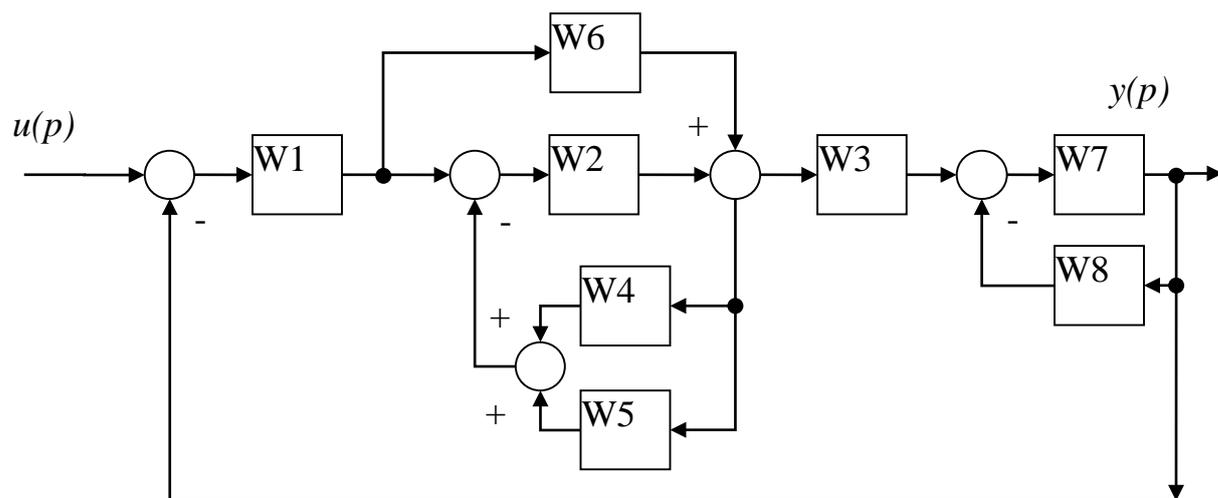
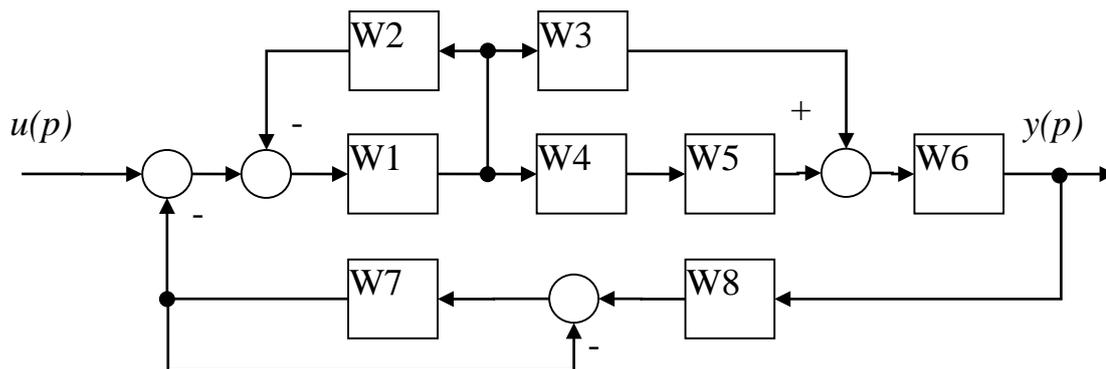




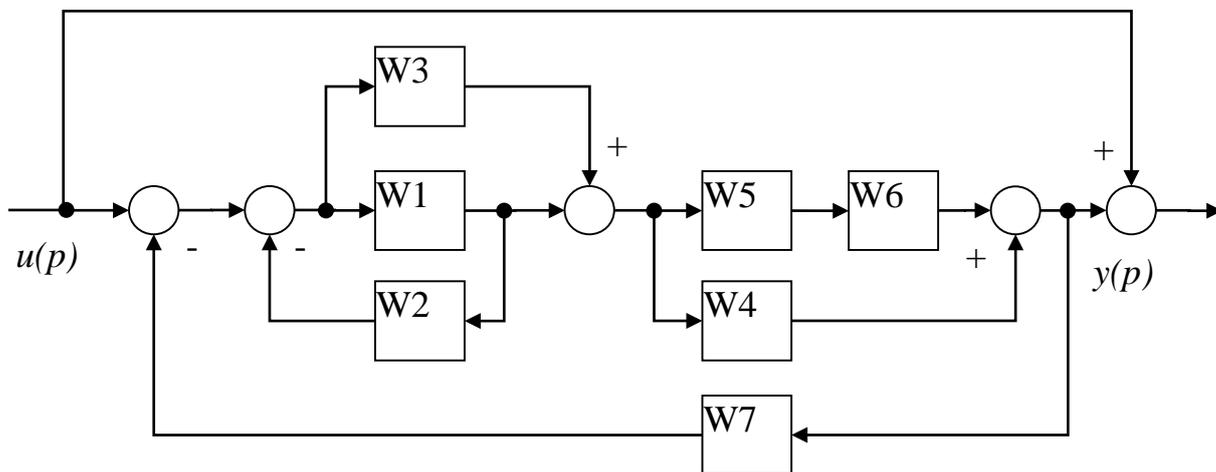
Вариант 9.

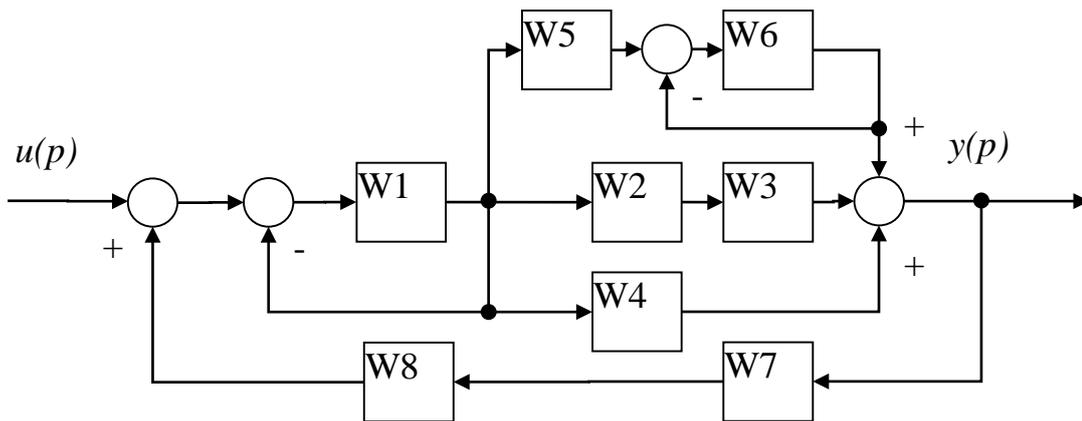


Вариант 10.

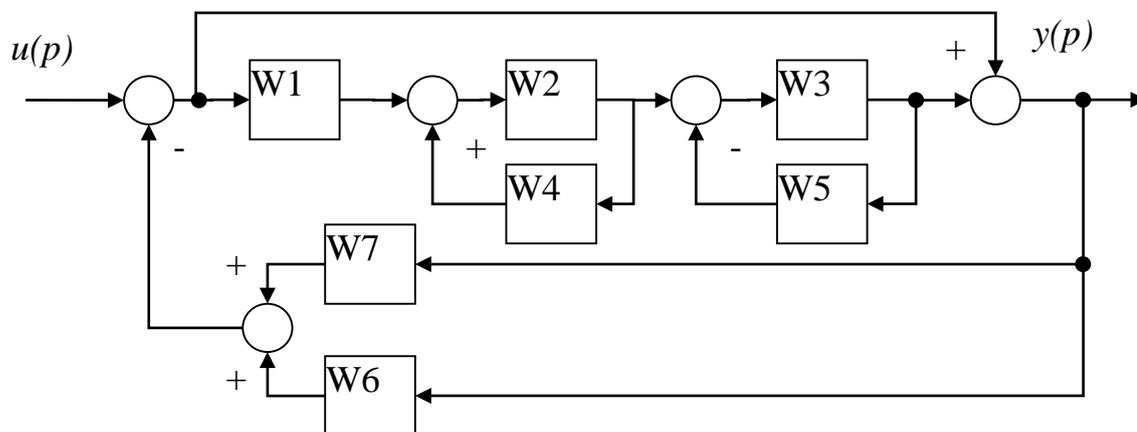
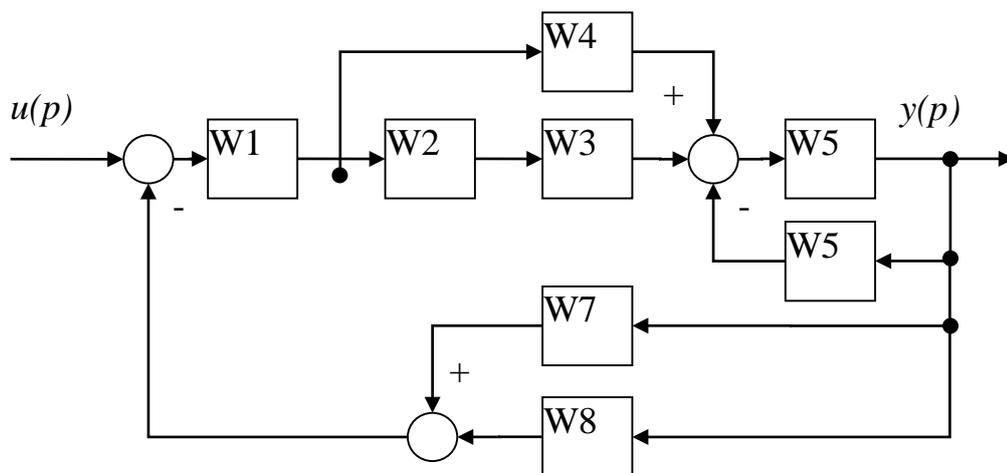


Вариант 11.

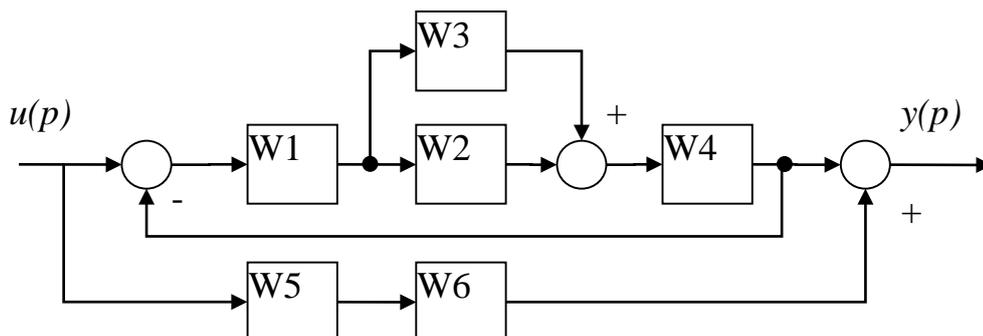


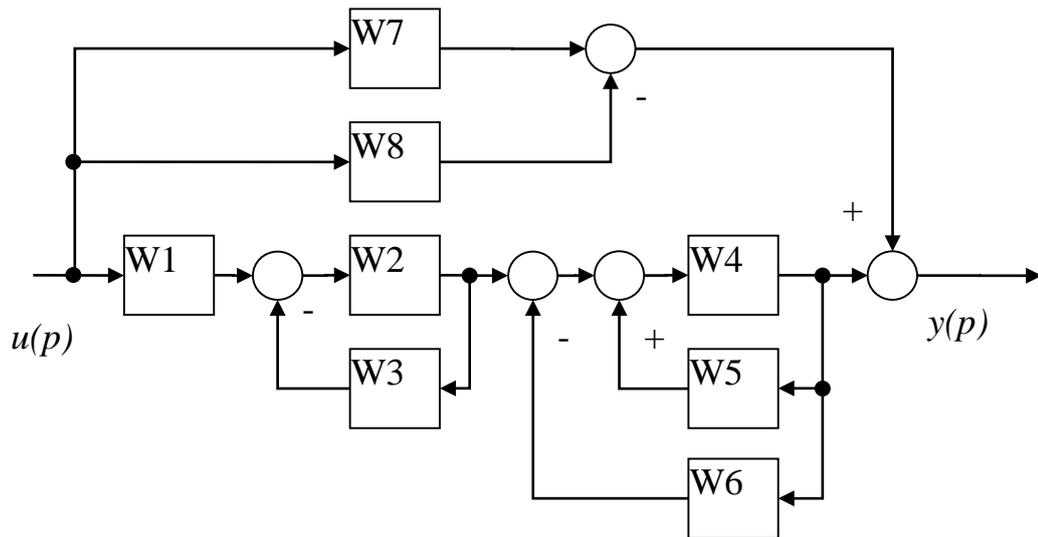


Вариант 12.

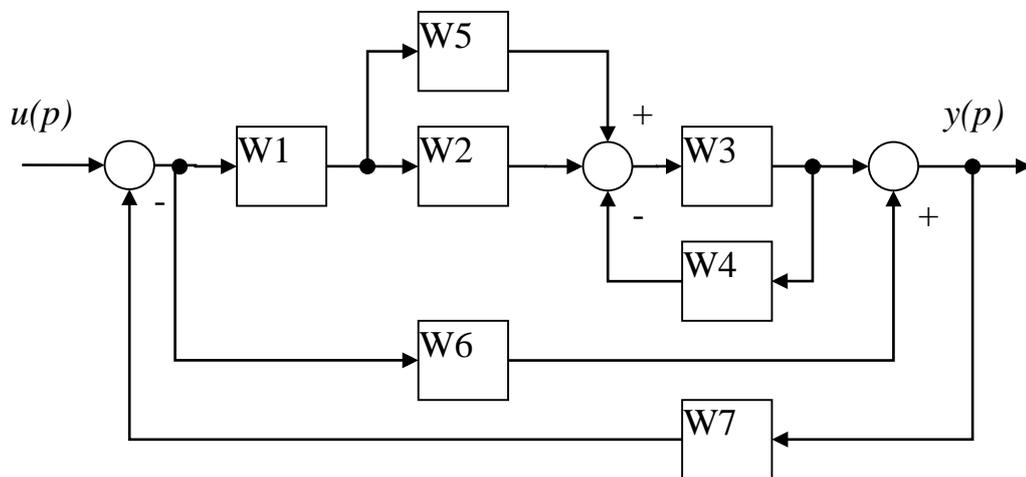
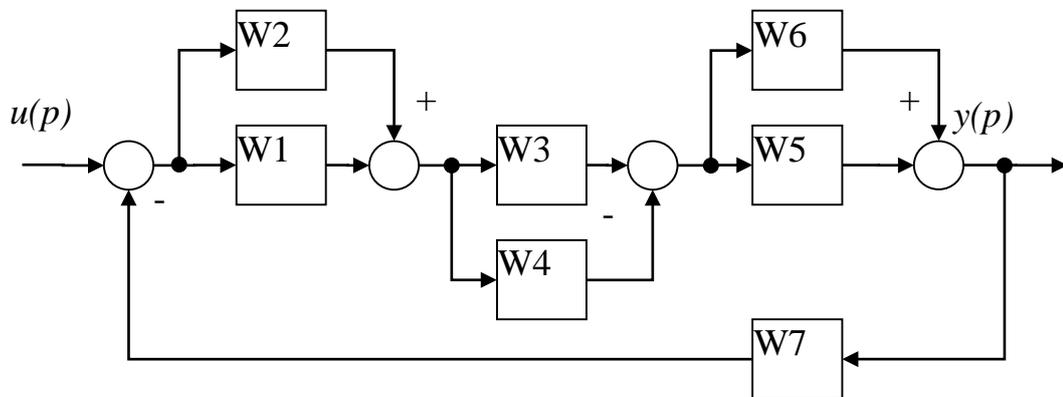


Вариант 13.

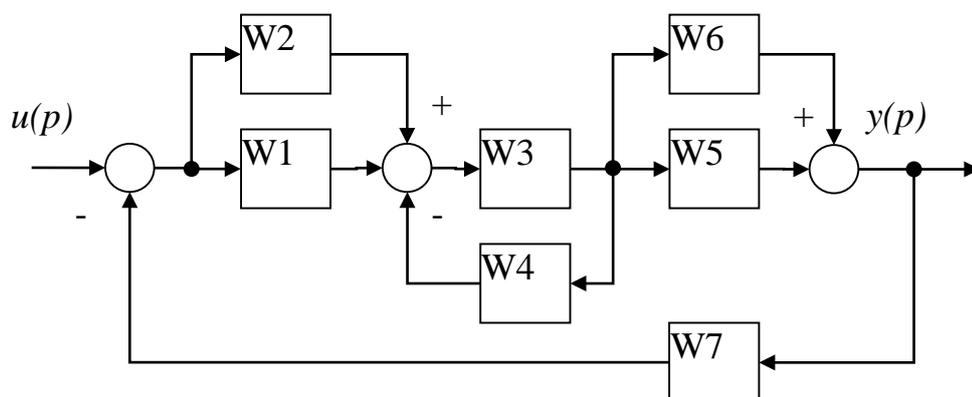
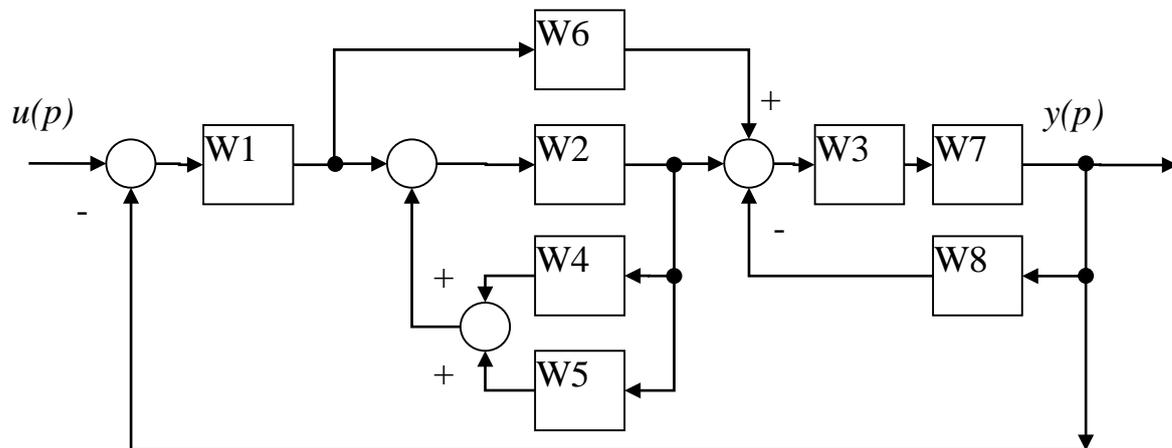




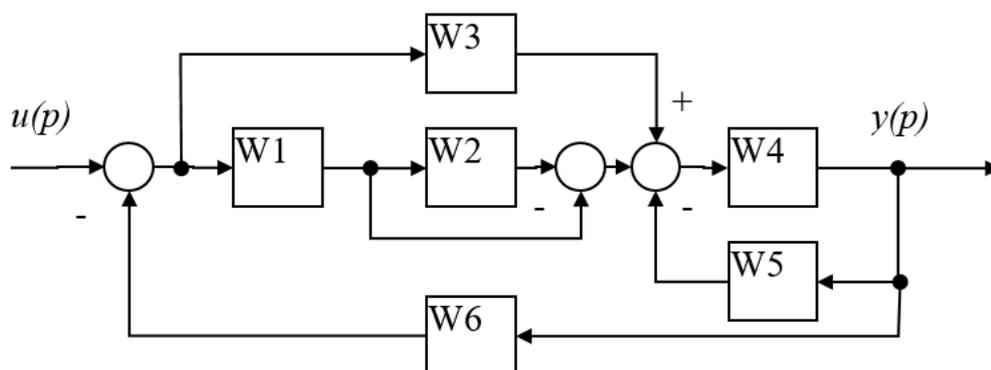
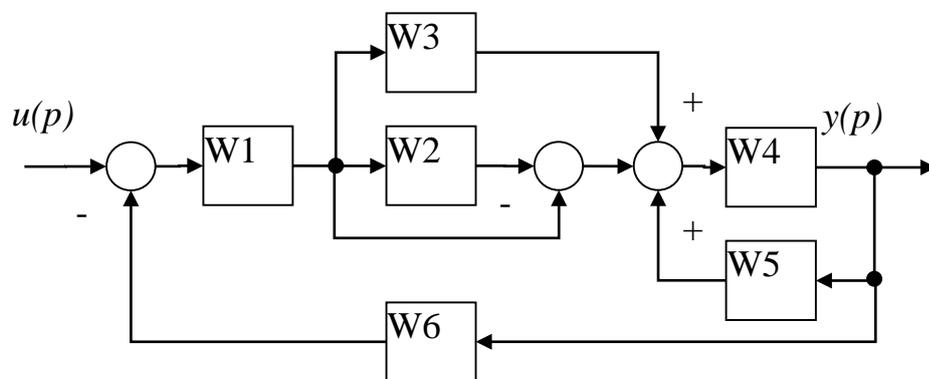
Вариант 14.



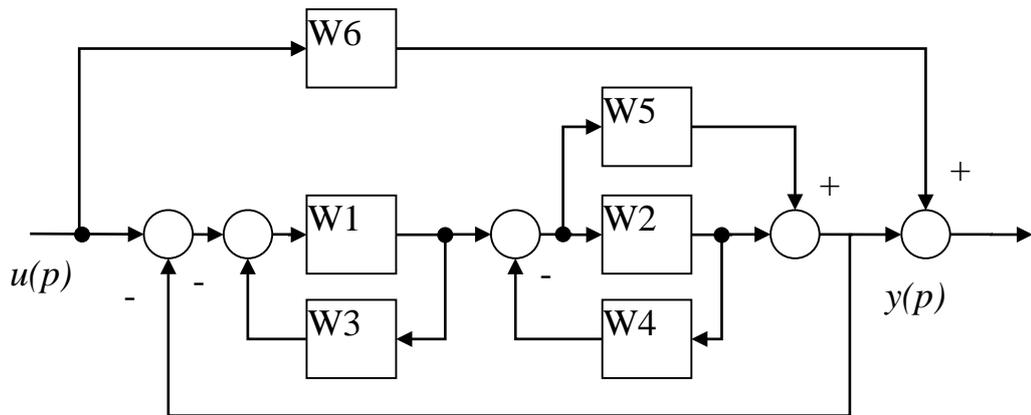
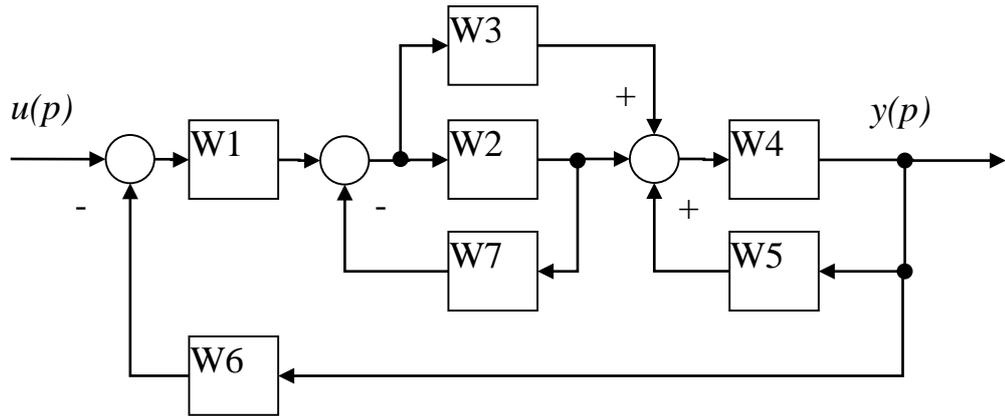
Вариант 15.



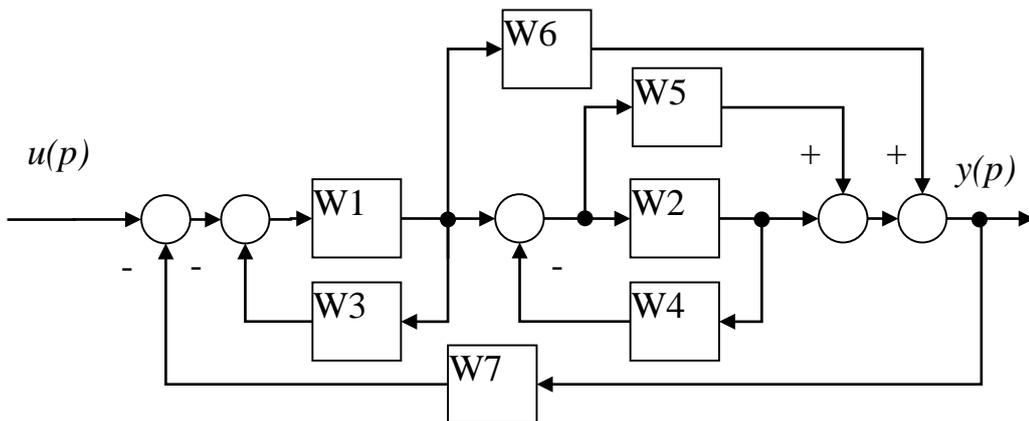
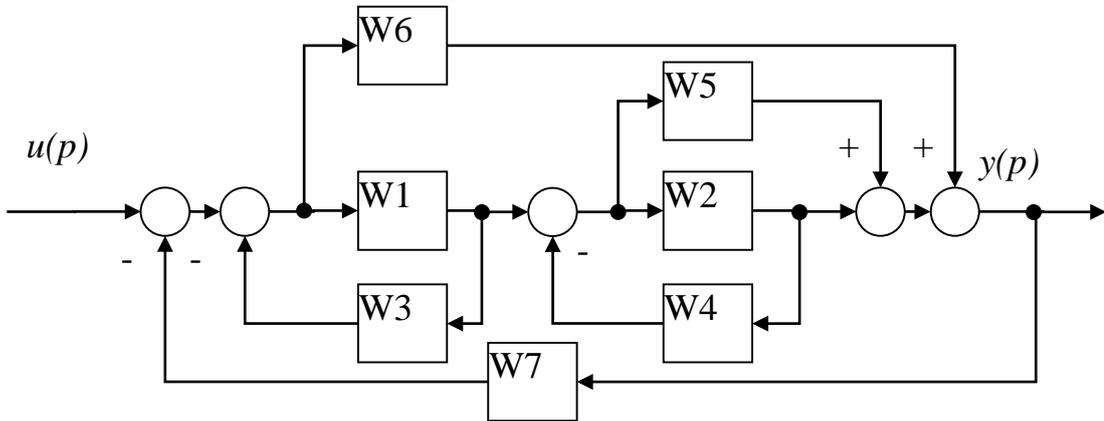
Вариант 16.



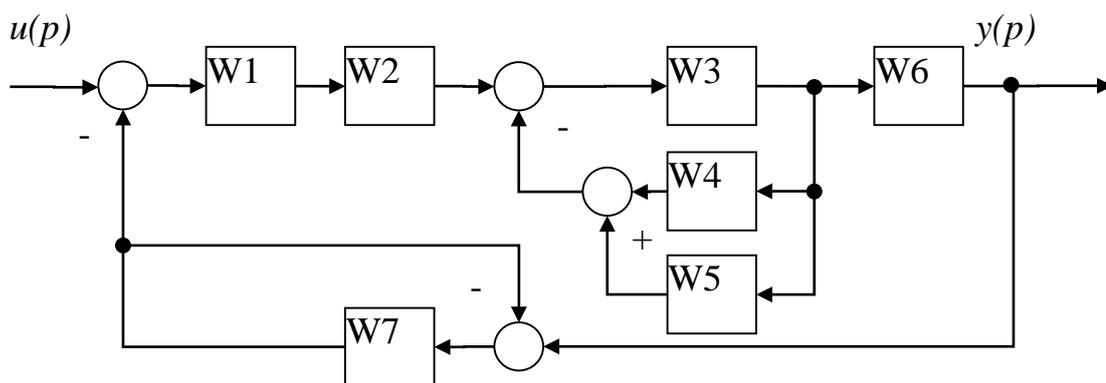
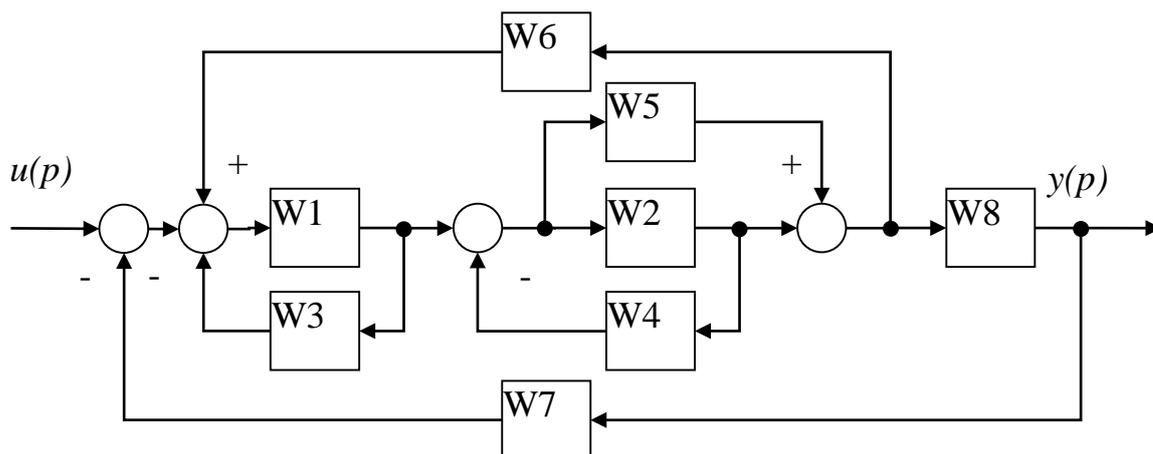
Вариант 17.



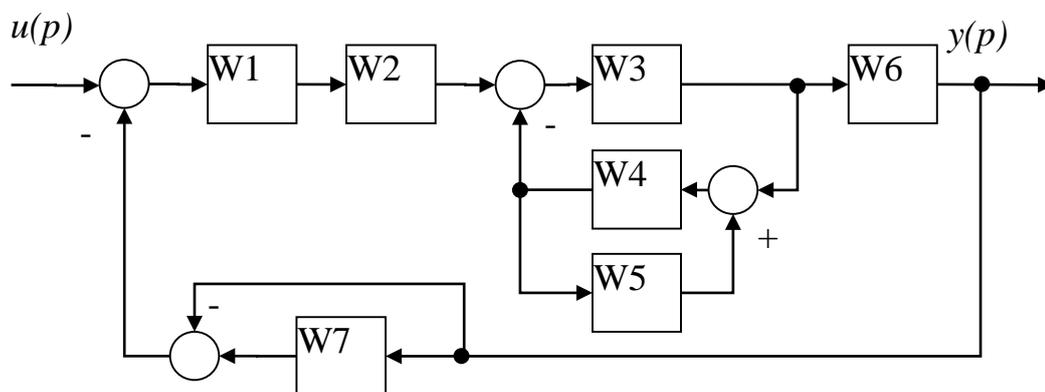
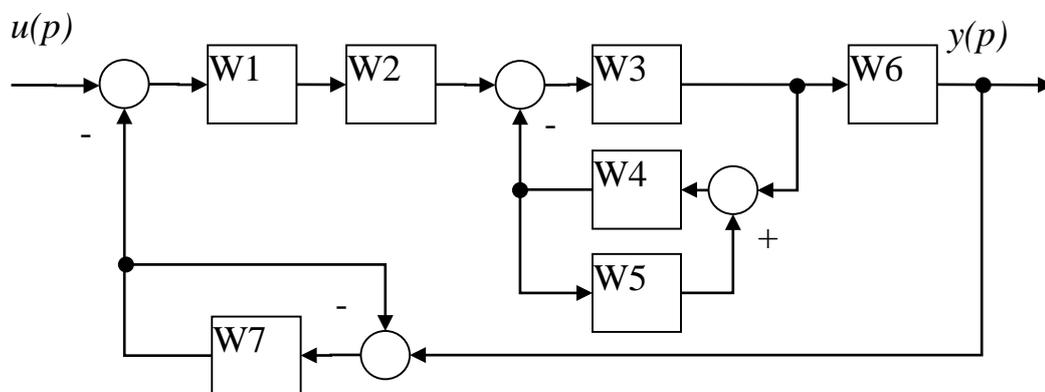
Вариант 18.



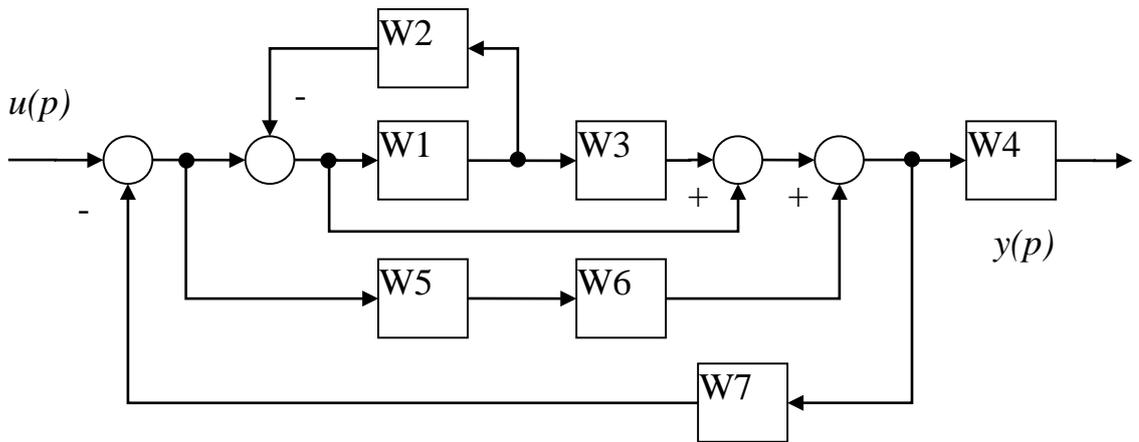
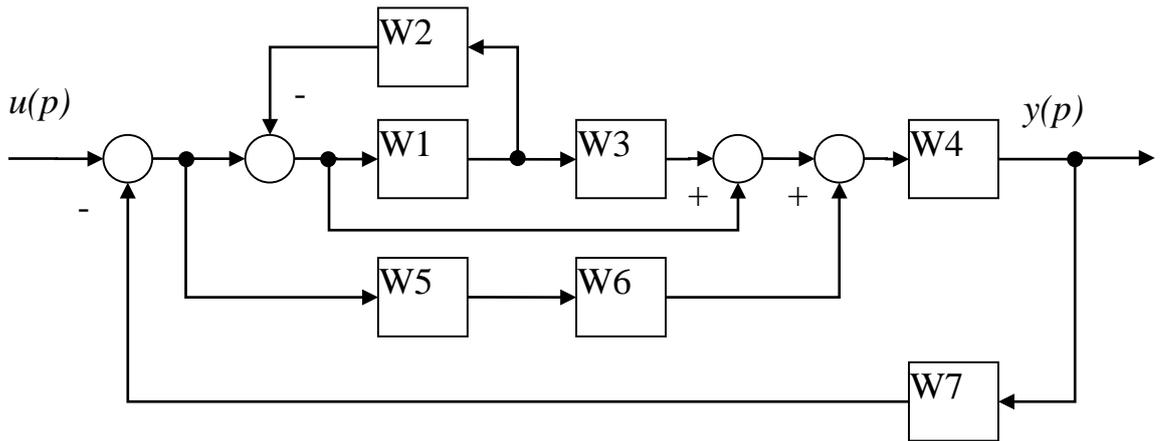
Вариант 19.



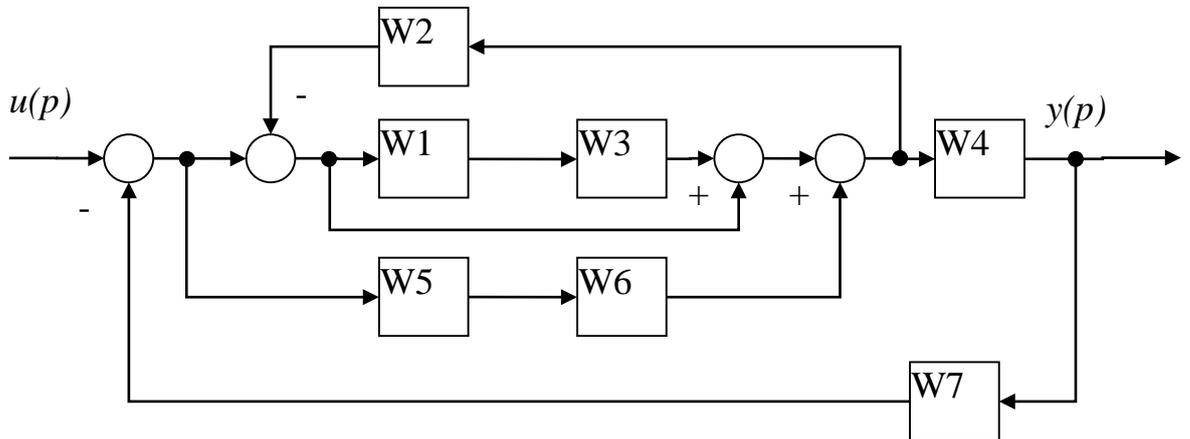
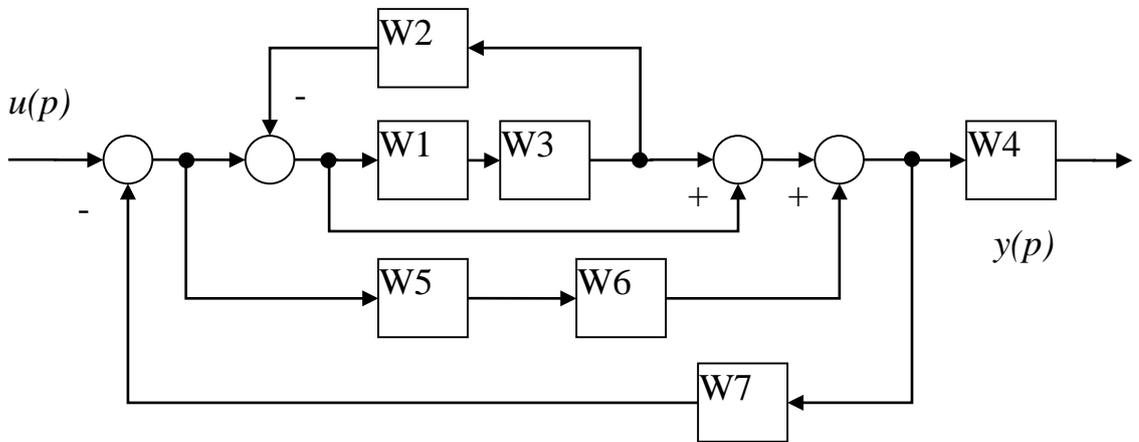
Вариант 20.



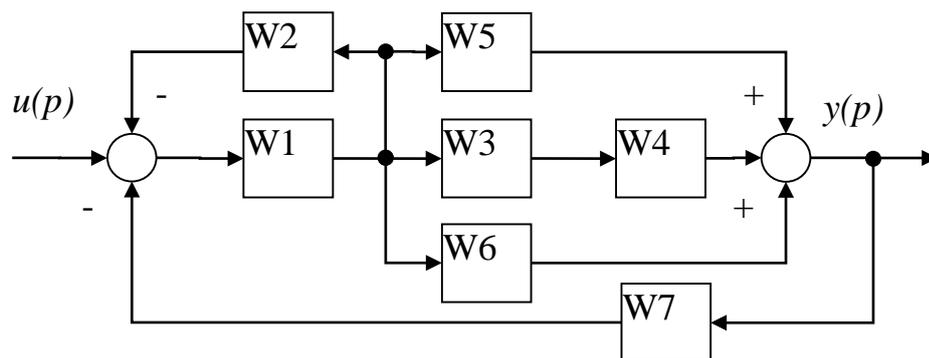
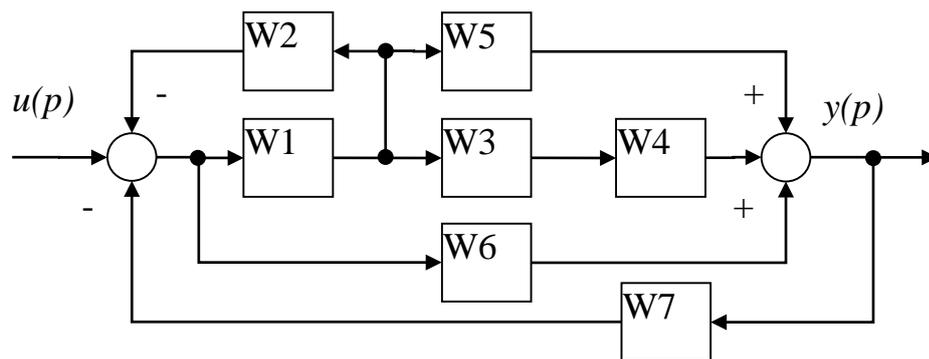
Вариант 21.



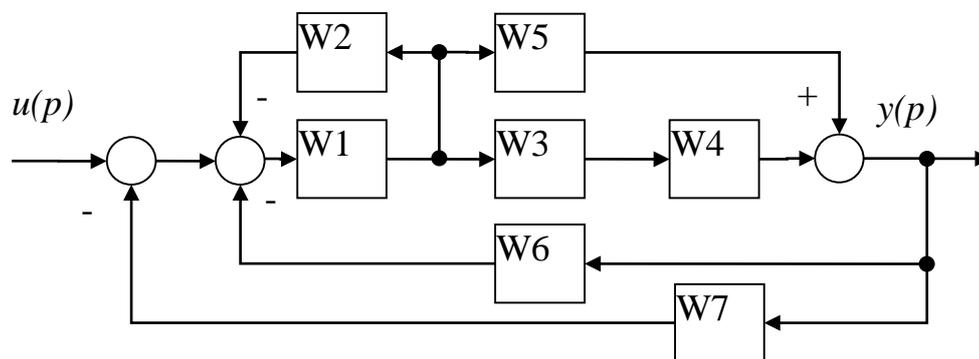
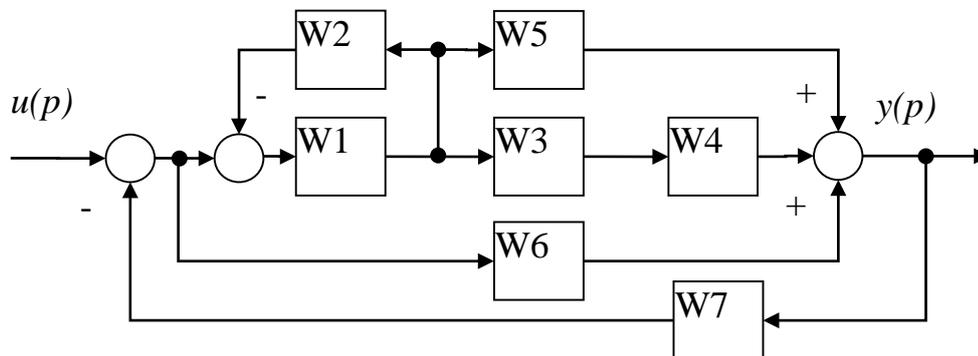
Вариант 22.



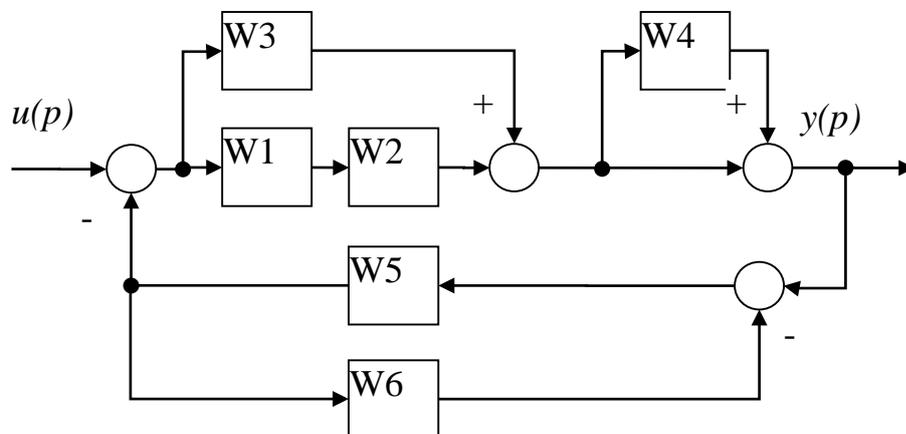
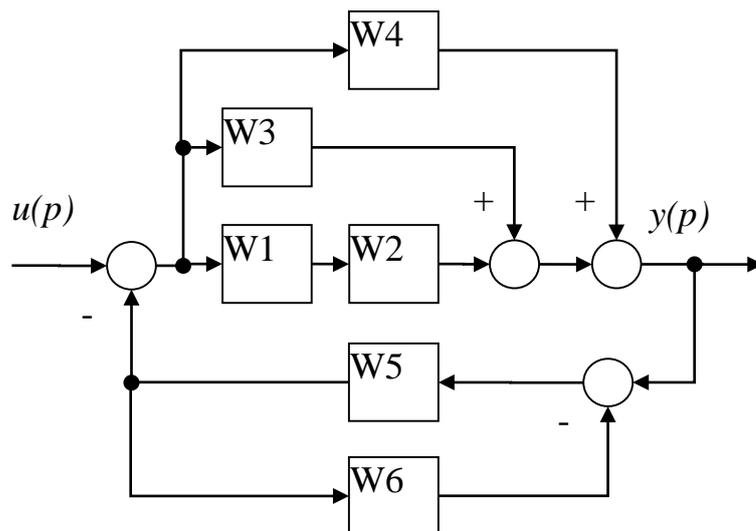
Вариант 23.



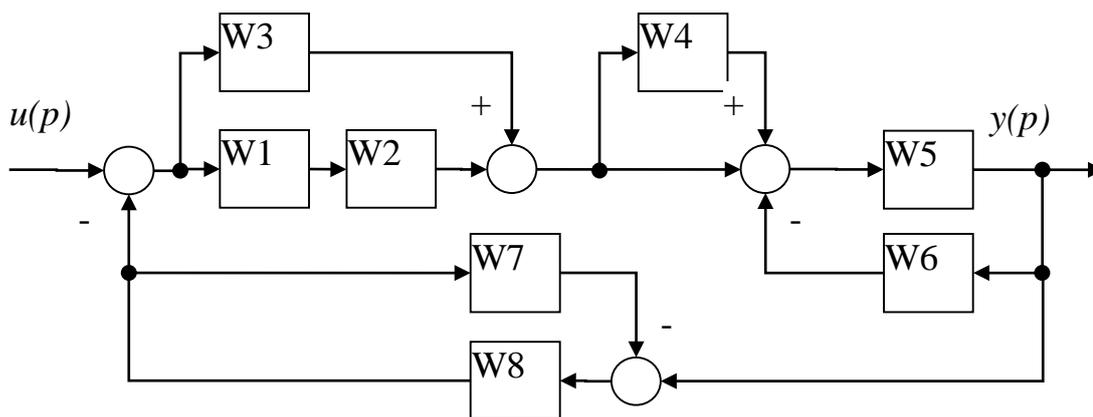
Вариант 24.

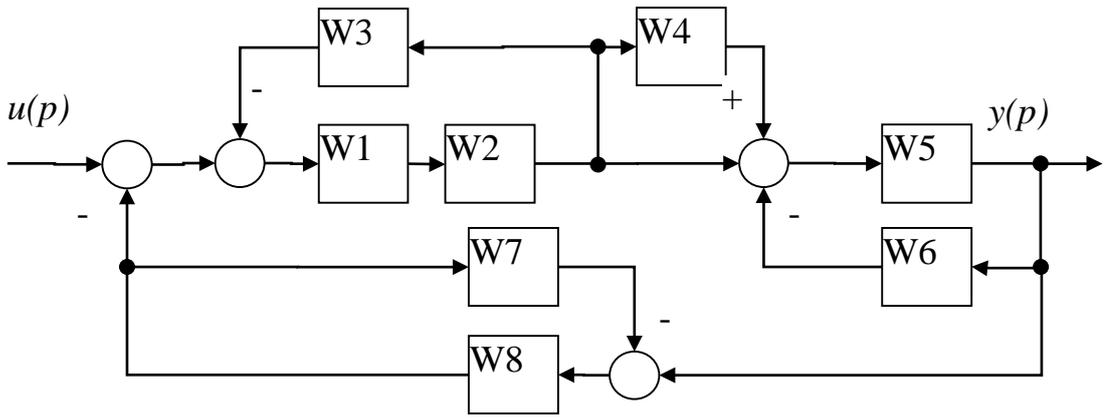


Вариант 25.

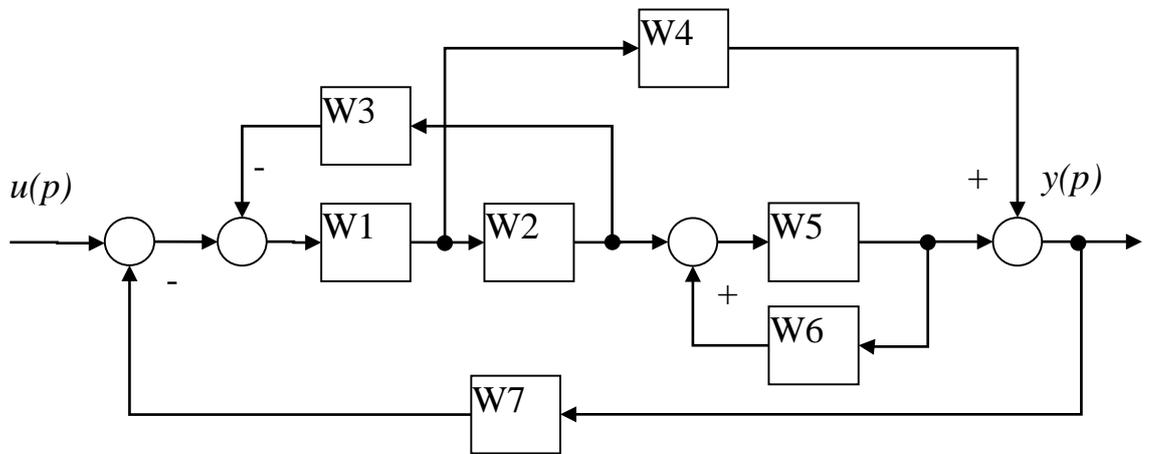
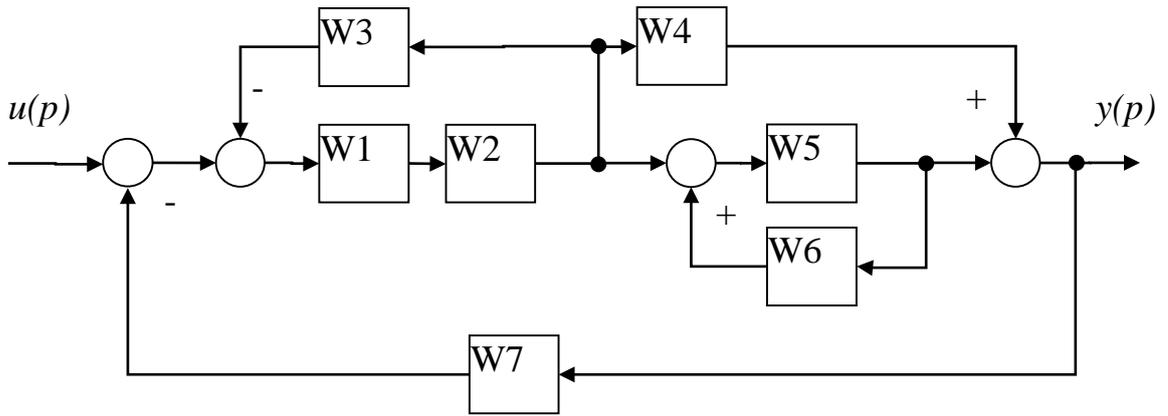


Вариант 26.

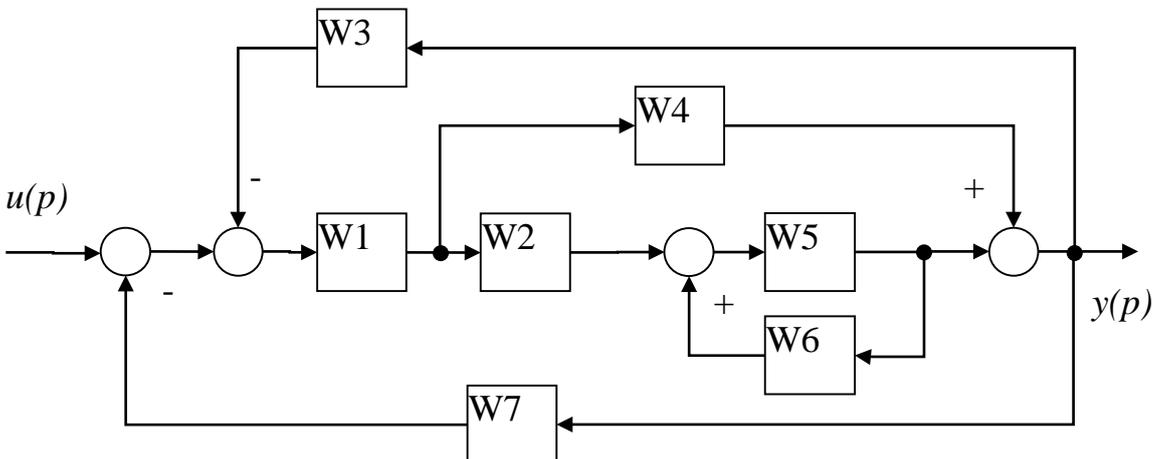


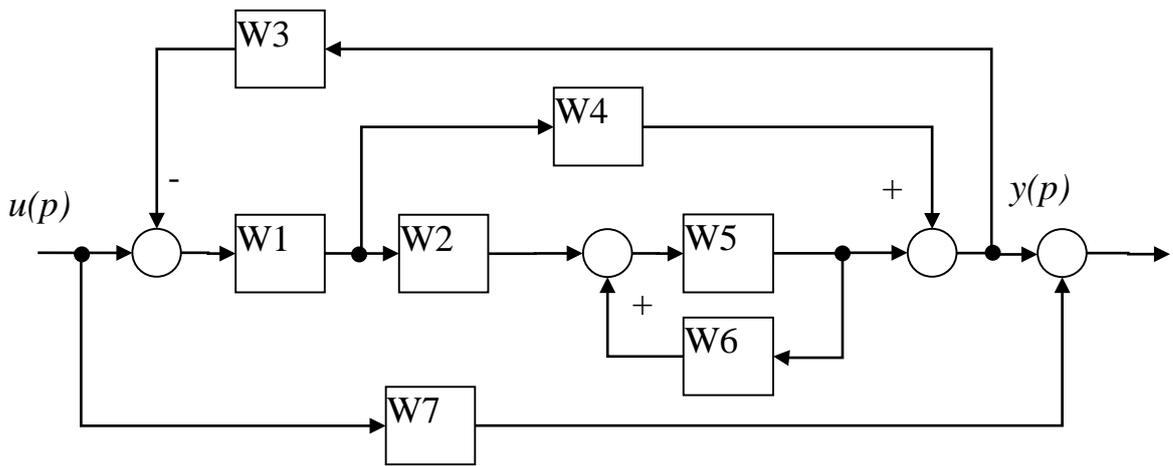


Вариант 27.

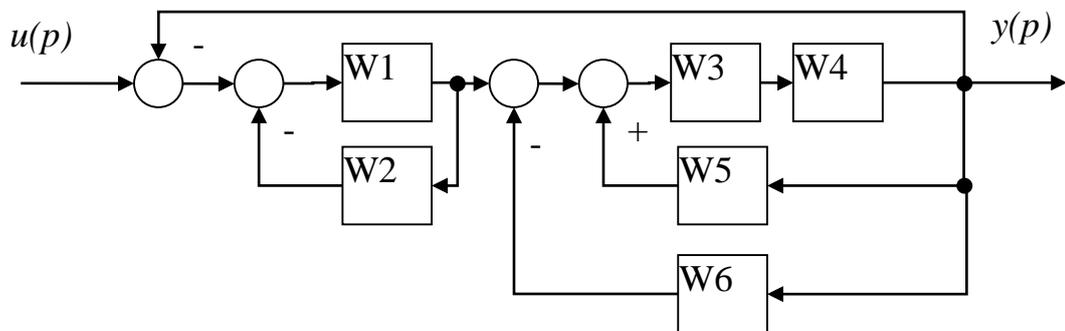
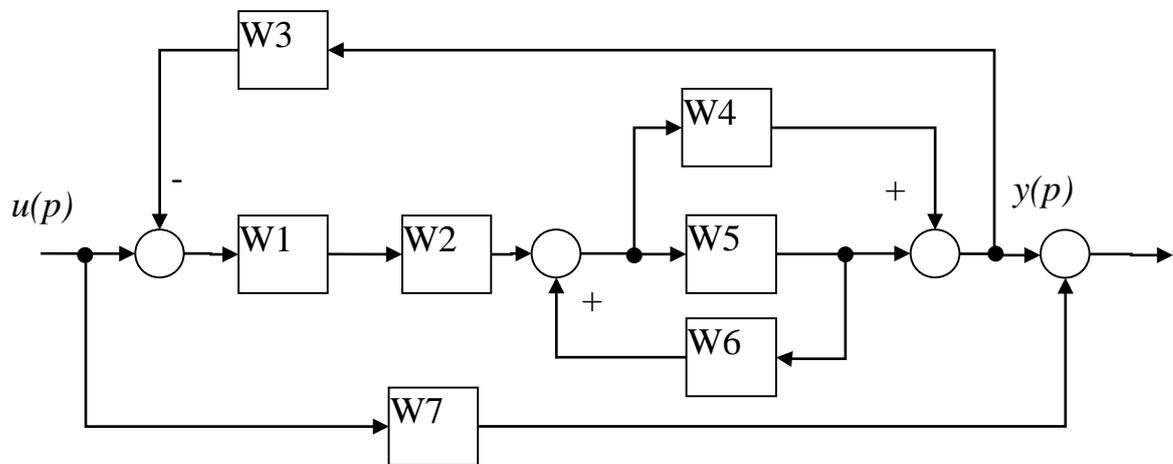


Вариант 28.

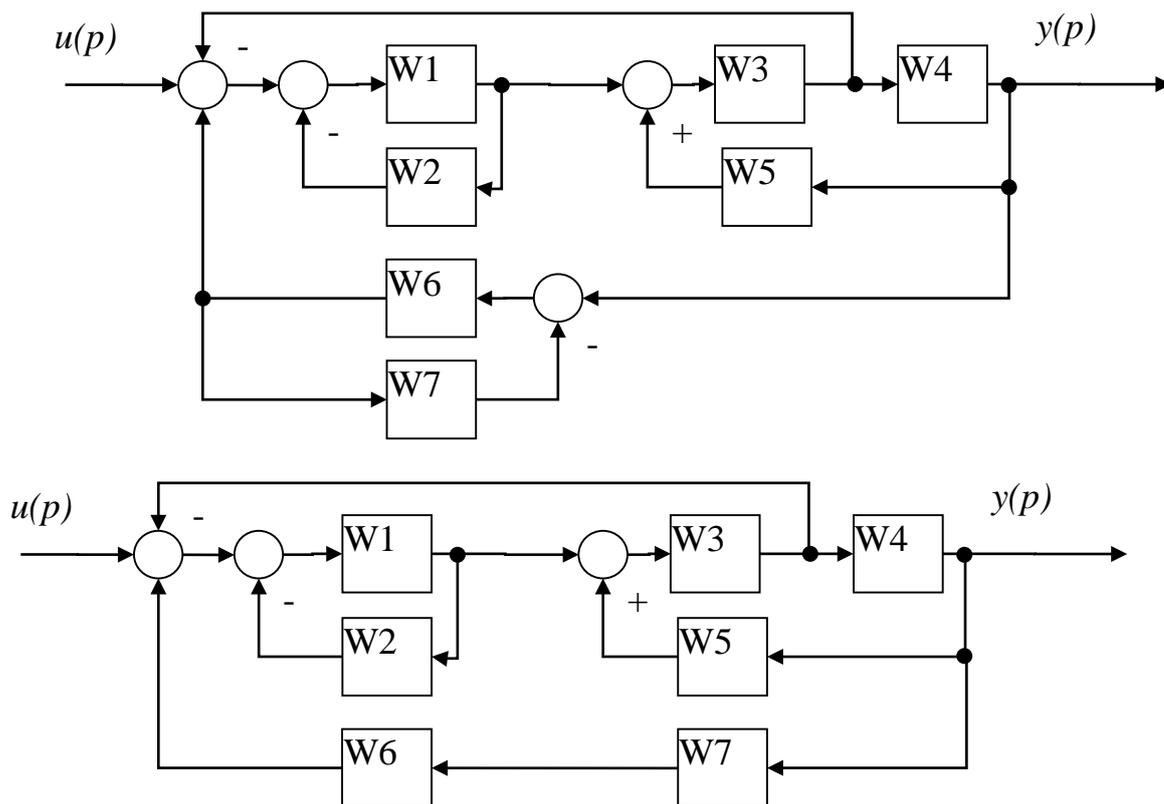




Вариант 29.



Вариант 30.



7. ЗАДАНИЕ № 2

Построить ЛЧХ (ЛАХ и ЛФХ) системы с последовательным соединением звеньев по передаточной функции.

Вариант 1.

$$W(p) = \frac{10 \cdot (p+1)}{p \cdot (0,0001 \cdot p^2 + 0,012 \cdot p + 1)};$$

$$W(p) = \frac{100 \cdot (0,01 \cdot p + 1)}{(0,1 \cdot p) \cdot (p+1) \cdot (0,001 \cdot p + 1)};$$

Вариант 2.

$$W(p) = \frac{1000 \cdot (0,01 \cdot p^2 + 0,1 \cdot p + 1)}{(p^2 + p + 1) \cdot (0,01 \cdot p + 1)};$$

$$W(p) = \frac{1000 \cdot (p+1)}{p \cdot (0,1p + 1) \cdot (0,01 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 3.

$$W(p) = \frac{40 \cdot (0,04 \cdot p + 1) \cdot (0,01 \cdot p + 1)}{(0,1 \cdot p + 1) \cdot (0,02 \cdot p + 1)};$$

$$W(p) = \frac{100 \cdot (0,001 \cdot p + 1)}{(0,01 \cdot p^2 + 0,01 \cdot p + 1) \cdot (p+1)}.$$

Вариант 4.

$$W(p) = \frac{100 \cdot (0,0001 \cdot p^2 + 0,01 \cdot p + 1)}{(0,01 \cdot p^2 + 0,01 \cdot p + 1) \cdot (0,001 \cdot p + 1)};$$

$$W(p) = \frac{100 \cdot (0,001 \cdot p + 1)}{p \cdot (0,01 \cdot p^2 + 0,04 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 5.

$$W(p) = \frac{(0,0001 \cdot p^2 + 0,012 \cdot p + 1)}{p \cdot (0,01 \cdot p^2 + 0,008 \cdot p + 1) \cdot (0,001 \cdot p + 1)};$$

$$W(p) = \frac{0,01 \cdot (0,1 \cdot p + 1) \cdot (0,01 \cdot p + 1)}{(p+1) \cdot (0,001 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 6.

$$W(p) = \frac{10 \cdot (p+1)}{p \cdot (0,0001 \cdot p^2 + 0,012 \cdot p + 1)};$$

$$W(p) = \frac{100 \cdot (0,01p + 1)}{(p+1) \cdot (0,1 \cdot p + 1) \cdot (0,001 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 7.

$$W(p) = \frac{10 \cdot (500 \cdot p^2 + 60 \cdot p + 1)}{(0,1 \cdot p + 1) \cdot (p + 1)};$$

$$W(p) = \frac{100 \cdot (p + 1)}{p^2 \cdot (0,01 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 8.

$$W(p) = \frac{10 \cdot (0,1 \cdot p + 1)}{p \cdot (0,01 \cdot p + 1) \cdot (0,001 \cdot p + 1)};$$

$$W(p) = \frac{100 \cdot (0,001 \cdot p + 1)}{(p + 1) \cdot (0,01 \cdot p + 1) \cdot (10 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 9.

$$W(p) = \frac{100 \cdot (0,0001 \cdot p^2 + 0,016 \cdot p + 1)}{p \cdot (1000 \cdot p + 1) \cdot (p^2 + p + 1)};$$

$$W(p) = \frac{100 \cdot (0,01 \cdot p + 1)}{(p + 1) \cdot (0,1 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 10.

$$W(p) = \frac{25 \cdot (0,01 \cdot p + 1) \cdot (0,1 \cdot p + 1)}{p^2 \cdot (0,001 \cdot p + 1)};$$

$$W(p) = \frac{0,01 \cdot (p + 1)}{(0,0001 \cdot p^2 + 0,001 \cdot p + 1) \cdot (10 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 11.

$$W(p) = \frac{0,1 \cdot (10 \cdot p + 1) \cdot (50 \cdot p + 1)}{(p^2 + 0,012 \cdot p + 1)};$$

$$W(p) = \frac{(p + 1) \cdot (0,1 \cdot p + 1)}{p^2 \cdot (10 \cdot p + 1) \cdot (0,01 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 12.

$$W(p) = \frac{10 \cdot (0,01 \cdot p^2 + 0,04 \cdot p + 1)}{(10 \cdot p + 1) \cdot (0,01 \cdot p + 1)};$$

$$W(p) = \frac{100 \cdot (0,01 \cdot p + 1)}{p \cdot (0,1 \cdot p + 1) \cdot (0,001 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 13.

$$W(p) = \frac{100 \cdot (0,01 \cdot p + 1) \cdot (p + 1)}{(0,01 \cdot p^2 + 0,004 \cdot p + 1) \cdot (10 \cdot p + 1)};$$

$$W(p) = \frac{10 \cdot (0,01 \cdot p^2 + 0,01 \cdot p + 1) \cdot (0,01 \cdot p + 1)}{p \cdot (0,001 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 14.

$$W(p) = \frac{10 \cdot (0,01 \cdot p + 1) \cdot (p^2 + 0,04 \cdot p + 1)}{p \cdot (0,1 \cdot p + 1) \cdot (10 \cdot p + 1)};$$

$$W(p) = \frac{100 \cdot (p + 1)}{(0,01 \cdot p^2 + 0,008 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 15.

$$W(p) = \frac{10 \cdot (0,01 \cdot p + 1)}{(0,01 \cdot p^2 + 0,0012 \cdot p + 1) \cdot (10 \cdot p + 1)};$$

$$W(p) = \frac{1000 \cdot (0,01 \cdot p + 1) \cdot (p + 1)}{p^3 \cdot (10 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 16.

$$W(p) = \frac{1000 \cdot (0,01 \cdot p + 1) \cdot (10 \cdot p + 1)}{(0,1 \cdot p^2 + 1,1 \cdot p + 1)};$$

$$W(p) = \frac{10 \cdot (0,01 \cdot p + 1) \cdot (100 \cdot p + 1)}{p \cdot (0,01 \cdot p^2 + 0,0012 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 17.

$$W(p) = \frac{100 \cdot (0,01p + 1) \cdot (p + 1)}{(p^2 + p + 1)};$$

$$W(p) = \frac{10 \cdot (p^2 + 0,004 \cdot p + 1)}{p \cdot (0,01 \cdot p + 1) \cdot (10 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 18.

$$W(p) = \frac{100 \cdot (0,0001 \cdot p^2 + 0,016 \cdot p + 1)}{p^2 \cdot (1000 \cdot p + 1)};$$

$$W(p) = \frac{100 \cdot (0,01 \cdot p + 1)}{(p^2 + p + 1) \cdot (0,1 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 19.

$$W(p) = \frac{100 \cdot (0,01 \cdot p^2 + 0,001 \cdot p + 1)}{(0,001 \cdot p + 1)};$$

$$W(p) = \frac{100 \cdot (0,1 \cdot p + 1)}{p^2 \cdot (p + 1) \cdot (100 \cdot p^2 + p + 1) \cdot (0,001 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 20.

$$W(p) = \frac{0,1 \cdot (0,1 \cdot p + 1) \cdot (0,01 \cdot p)}{(10 \cdot p^2 + 11 \cdot p + 1)};$$

$$W(p) = \frac{0,01 \cdot (p + 1)}{p^2 \cdot (0,01 \cdot p^2 + 0,01 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 21.

$$W(p) = \frac{1000 \cdot (10 \cdot p + 1) \cdot (p + 1)}{(0,001 \cdot p^2 + 0,11 \cdot p + 1)};$$

$$W(p) = \frac{0,1 \cdot (p^2 + 0,01 \cdot p + 1)}{p \cdot (0,01 \cdot p + 1) \cdot (100 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 22.

$$W(p) = \frac{10 \cdot (p + 1) \cdot (100 \cdot p + 1)}{(100 \cdot p^2 + p + 1) \cdot (0,001 \cdot p + 1)};$$

$$W(p) = \frac{100 \cdot (0,01 \cdot p + 1)}{(p + 1) \cdot (p + 1) \cdot (0,1 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 23.

$$W(p) = \frac{10 \cdot (p + 1) \cdot (0,1 \cdot p + 1)}{p \cdot (0,0001 \cdot p^2 + 0,001 \cdot p + 1)};$$

$$W(p) = \frac{100 \cdot (0,01 \cdot p^2 + 0,004 \cdot p + 1)}{(0,1 \cdot p + 1) \cdot (p + 1) \cdot (0,001 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 24.

$$W(p) = \frac{100 \cdot (0,01 \cdot p^2 + 0,1 \cdot p + 1)}{(p^2 + p + 1) \cdot (0,001 \cdot p + 1)};$$

$$\frac{0,01 \cdot (p + 1)}{p^2 \cdot (0,1 \cdot p + 1) \cdot (0,01 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 25.

$$W(p) = \frac{100 \cdot (0,01 \cdot p^2 + 0,001 \cdot p + 1)}{p \cdot (0,001 \cdot p + 1)};$$

$$W(p) = \frac{100 \cdot (0,01 \cdot p + 1)}{p^2 \cdot (p + 1) \cdot (0,001 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 26.

$$W(p) = \frac{100 \cdot (0,01 \cdot p + 1) \cdot (p + 1)}{(p^2 + 10,1 \cdot p + 1)};$$

$$W(p) = \frac{10 \cdot (p^2 + 0,004 \cdot p + 1)}{(0,1 \cdot p + 1) \cdot p}.$$

Вариант 27.

$$W(p) = \frac{100 \cdot (0,01 \cdot p^2 + 0,001 \cdot p + 1)}{p \cdot (0,001 \cdot p + 1)};$$

$$W(p) = \frac{100 \cdot (0,1 \cdot p + 1)}{p^2 \cdot (p + 1) \cdot (0,001 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 28.

$$W(p) = \frac{40 \cdot (0,04 \cdot p + 1) \cdot (0,01 \cdot p + 1)}{(0,1 \cdot p + 1) \cdot (0,02 \cdot p + 1) \cdot p};$$

$$W(p) = \frac{100 \cdot (p + 1)}{p^2 \cdot (0,01 \cdot p + 1) \cdot (10 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 29.

$$W(p) = \frac{100 \cdot (0,1 \cdot p + 1)}{p^2 \cdot (p + 1) \cdot (100 \cdot p^2 + p + 1)};$$

$$W(p) = \frac{100 \cdot (0,01p + 1) \cdot (p + 1)}{(p^2 + p + 1) \cdot p^2}.$$

Вариант 30.

$$W(p) = \frac{100 \cdot (0,01 \cdot p + 1)}{(p^2 + p + 1) \cdot (0,01 \cdot p + 1) \cdot p};$$

$$W(p) = \frac{10 \cdot (0,01 \cdot p + 1) \cdot (100 \cdot p + 1)}{p \cdot (p^2 + p + 1)}.$$

8. ЗАДАНИЕ № 3

С помощью критериев Гурвица, Найквиста и Михайлова проанализировать устойчивость замкнутых систем по передаточным функциям разомкнутых систем. Следует отметить, что в случае применения критериев Гурвица и Михайлова предварительно требуется записать передаточные функции замкнутых систем, считая обратные связи единичными.

Вариант 1.

$$1)W(p) = \frac{10 \cdot (p+1)}{p \cdot (0,0001 \cdot p^2 + 0,012 \cdot p + 1)};$$

$$2)W(p) = \frac{100 \cdot (0,01 \cdot p + 1)}{0,1 \cdot p \cdot (p+1) \cdot (0,001 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 2.

$$1)W(p) = \frac{10 \cdot (p+1)}{p \cdot (0,0001 \cdot p^2 + 0,012 \cdot p + 1)};$$

$$2)W(p) = \frac{100 \cdot (0,01 \cdot p + 1)}{0,1 \cdot p \cdot (p+1) \cdot (0,001 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 3.

$$1)W(p) = \frac{1000 \cdot (0,01 \cdot p^2 + 0,1 \cdot p + 1)}{(p^2 + p + 1) \cdot (0,01 \cdot p + 1)};$$

$$2)W(p) = \frac{1000 \cdot (p+1)}{p \cdot (0,1 \cdot p + 1) \cdot (0,01 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 4.

$$1)W(p) = \frac{10 \cdot (0,001 \cdot p + 1) \cdot (0,01 \cdot p + 1)}{(0,1 \cdot p + 1) \cdot (10 \cdot p + 1)};$$

$$2)W(p) = \frac{100 \cdot (0,001 \cdot p + 1)}{(p+1) \cdot (0,01 \cdot p^2 + 0,01 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 5.

$$1)W(p) = \frac{1000 \cdot (0,0001 \cdot p^2 + 0,01 \cdot p + 1)}{p \cdot (0,01 \cdot p^2 + 0,06 \cdot p + 1) \cdot (0,001 \cdot p + 1)};$$

$$2)W(p) = \frac{100 \cdot (0,1p + 1)}{(p+1) \cdot (0,01 \cdot p + 1) \cdot (0,001 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 6.

$$1)W(p) = \frac{(0,0001 \cdot p^2 + 0,012 \cdot p + 1)}{p \cdot (0,01 \cdot p^2 + 0,08 \cdot p + 1) \cdot (0,001 \cdot p + 1)};$$

$$2)W(p) = \frac{0,01 \cdot (0,1 \cdot p + 1) \cdot (0,01 \cdot p + 1)}{(p + 1) \cdot (0,001 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 7.

$$1)W(p) = \frac{100 \cdot (0,0001 \cdot p^2 + 0,01 \cdot p + 1)}{(0,01 \cdot p^2 + 0,01 \cdot p + 1) \cdot (0,001 \cdot p + 1)};$$

$$2)W(p) = \frac{100 \cdot (0,001 \cdot p + 1)}{p \cdot (0,01 \cdot p^2 + 0,04 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 8.

$$1)W(p) = \frac{10 \cdot (500 \cdot p^2 + 60 \cdot p + 1)}{(0,1 \cdot p + 1) \cdot (p + 1)};$$

$$2)W(p) = \frac{100 \cdot (p + 1)}{p^2 \cdot (0,01 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 9.

$$1)W(p) = \frac{10 \cdot (p + 1)}{p \cdot (0,0001 \cdot p^2 + 0,012 \cdot p + 1)};$$

$$2)W(p) = \frac{100 \cdot (0,01 \cdot p + 1)}{(p + 1) \cdot (0,1 \cdot p + 1) \cdot (0,001 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 10.

$$1)W(p) = \frac{1000 \cdot (0,01 \cdot p + 1)}{(p + 1) \cdot (0,1 \cdot p + 1) \cdot (0,001 \cdot p + 1)};$$

$$2)W(p) = \frac{1000 \cdot (0,01 \cdot p^2 + 0,1 \cdot p + 1)}{p \cdot (p + 1) \cdot (0,01 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 11.

$$1)W(p) = \frac{25 \cdot (0,01 \cdot p + 1) \cdot (0,1 \cdot p + 1)}{p^2 \cdot (0,001 \cdot p + 1)};$$

$$2)W(p) = \frac{0,01 \cdot (p + 1)}{(0,0001 \cdot p^2 + 0,001 \cdot p + 1) \cdot (10 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 12.

$$1)W(p) = \frac{100 \cdot (0,001 \cdot p + 1)}{(p + 1) \cdot (0,01 \cdot p + 1) \cdot (10 \cdot p + 1)};$$

$$2)W(p) = \frac{10 \cdot (0,1 \cdot p + 1)}{p \cdot (0,01 \cdot p + 1) \cdot (0,001 \cdot p + 1)}$$

Вариант 13.

$$1)W(p) = \frac{25 \cdot (0,01 \cdot p + 1) \cdot (0,1 \cdot p + 1)}{p^2 \cdot (0,01 \cdot p + 1)};$$

$$2)W(p) = \frac{0,01 \cdot (p + 1)}{(0,0001 \cdot p^2 + 0,001 \cdot p + 1) \cdot (10 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 14.

$$1)W(p) = \frac{100 \cdot (0,0001 \cdot p^2 + 0,016 \cdot p + 1)}{p \cdot (1000 \cdot p + 1) \cdot (p^2 + p + 1)}$$

$$2)W(p) = \frac{100 \cdot (0,01 \cdot p + 1)}{(p + 1) \cdot (0,01 \cdot p + 1)}$$

Вариант 15.

$$1)W(p) = \frac{0,1 \cdot (10 \cdot p + 1) \cdot (50 \cdot p + 1)}{(p^2 + 0,012 \cdot p + 1)}$$

$$2)W(p) = \frac{(p + 1) \cdot (0,1 \cdot p + 1)}{p^2 \cdot (10 \cdot p + 1) \cdot (0,01 \cdot p + 1)}$$

Вариант 16.

$$1)W(p) = \frac{10 \cdot (0,01 \cdot p^2 + 0,04 \cdot p + 1)}{(10 \cdot p + 1) \cdot (0,01 \cdot p + 1)};$$

$$2)W(p) = \frac{(0,01 \cdot p + 1) \cdot (100 \cdot p + 1)}{p \cdot (0,1 \cdot p + 1) \cdot (0,001 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 17.

$$1)W(p) = \frac{100 \cdot (0,01 \cdot p^2 + 0,001 \cdot p + 1)}{p \cdot (0,001 \cdot p + 1)};$$

$$2)W(p) = \frac{100 \cdot (0,1 \cdot p + 1)}{p^2 \cdot (p + 1) \cdot (0,001 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 18.

$$1)W(p) = \frac{100 \cdot (0,01 \cdot p + 1) \cdot (p + 1)}{(p^2 + 10,1 \cdot p + 1)};$$

$$2)W(p) = \frac{10 \cdot (p^2 + 0,004 \cdot p + 1)}{p \cdot (0,1 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 19.

$$1)W(p) = \frac{100 \cdot (0,01 \cdot p + 1) \cdot (p + 1)}{(0,01 \cdot p^2 + 0,004 \cdot p + 1) \cdot (10 \cdot p + 1)};$$

$$2)W(p) = \frac{10 \cdot (0,01 \cdot p^2 + 0,01 \cdot p + 1) \cdot (0,01 \cdot p + 1)}{p \cdot (0,001 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 20.

$$1)W(p) = \frac{10 \cdot (0,01 \cdot p + 1) \cdot (p^2 + 0,04 \cdot p + 1)}{p \cdot (0,1 \cdot p + 1) \cdot (10 \cdot p + 1)};$$

$$2)W(p) = \frac{100 \cdot (p + 1)}{(0,01 \cdot p^2 + 0,008 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 21.

$$1)W(p) = \frac{1000 \cdot (0,01 \cdot p + 1) \cdot (p + 1)}{p^3 \cdot (10p + 1)};$$

$$2)W(p) = \frac{10 \cdot (0,01 \cdot p + 1)}{(0,01 \cdot p^2 + 0,0012 \cdot p + 1) \cdot (10 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 22.

$$1)W(p) = \frac{1000 \cdot (0,01 \cdot p + 1) \cdot (10 \cdot p + 1)}{(0,1 \cdot p^2 + 1,1 \cdot p + 1)};$$

$$2)W(p) = \frac{10 \cdot (0,01p + 1) \cdot (100 \cdot p + 1)}{p \cdot (0,01 \cdot p^2 + 0,0012 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 23.

$$1)W(p) = \frac{100 \cdot (0,01 \cdot p + 1) \cdot (p + 1)}{(p^2 + p + 1)};$$

$$2)W(p) = \frac{10 \cdot (p^2 + 0,004 \cdot p + 1)}{p \cdot (0,01 \cdot p + 1) \cdot (10p + 1)}.$$

Вариант 24.

$$1)W(p) = \frac{100 \cdot (0,0001 \cdot p^2 + 0,016 \cdot p + 1)}{p^2 \cdot (1000 \cdot p + 1)};$$

$$2)W(p) = \frac{100 \cdot (0,01 \cdot p + 1)}{(p^2 + p + 1) \cdot (0,1 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 25.

$$1)W(p) = \frac{100 \cdot (0,01 \cdot p^2 + 0,001 \cdot p + 1)}{(0,001 \cdot p + 1)};$$

$$2)W(p) = \frac{100 \cdot (0,001 \cdot p + 1)}{p \cdot (0,001 \cdot p + 1) \cdot (100 \cdot p^2 + p + 1)}$$

Вариант 26.

$$1)W(p) = \frac{0,1 \cdot (0,1 \cdot p + 1) \cdot (0,01 \cdot p)}{(10 \cdot p^2 + 11 \cdot p + 1)};$$

$$2)W(p) = \frac{0,01 \cdot (p + 1)}{p^2 \cdot (0,01 \cdot p^2 + 0,01 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 27.

$$1)W(p) = \frac{1000 \cdot (10 \cdot p + 1) \cdot (p + 1)}{(0,001 \cdot p^2 + 0,11 \cdot p + 1)};$$

$$2)W(p) = \frac{0,1 \cdot (p^2 + 0,01 \cdot p + 1)}{p \cdot (0,1 \cdot p + 1) \cdot (100 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 28.

$$1)W(p) = \frac{10 \cdot (p + 1) \cdot (100 \cdot p + 1)}{(100 \cdot p^2 + p + 1) \cdot (0,001 \cdot p + 1)};$$

$$2)W(p) = \frac{100 \cdot (0,01 \cdot p + 1)}{(p + 1) \cdot (0,001 \cdot p + 1)(0,1 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 29.

$$1)W(p) = \frac{100 \cdot (0,01 \cdot p^2 + 0,1 \cdot p + 1)}{(p^2 + p + 1) \cdot (0,001 \cdot p + 1)};$$

$$2)W(p) = \frac{0,01 \cdot (p + 1)}{p^2 \cdot (0,1 \cdot p + 1) \cdot (0,01 \cdot p + 1)}.$$

Вариант 30.

$$1)W(p) = \frac{10 \cdot (p + 1) \cdot (0,1 \cdot p + 1)}{p \cdot (0,0001 \cdot p^2 + 0,001 \cdot p + 1)};$$

$$2)W(p) = \frac{100 \cdot (0,01 \cdot p^2 + 0,004 \cdot p + 1)}{(0,1 \cdot p + 1) \cdot (p + 1) \cdot (0,001 \cdot p + 1)}.$$

9. ЗАДАНИЕ № 4

Произвести синтез системы рис. 76:

- 1) выбрать тип регулятора;
- 2) определить параметры регулятора;
- 3) определить передаточные функции разомкнутой и замкнутой синтезированной системы;
- 4) построить ЛЧХ разомкнутой и замкнутой не синтезированной и синтезированной системы;
- 5) построить графики переходных процессов синтезированной и не синтезированной системы.

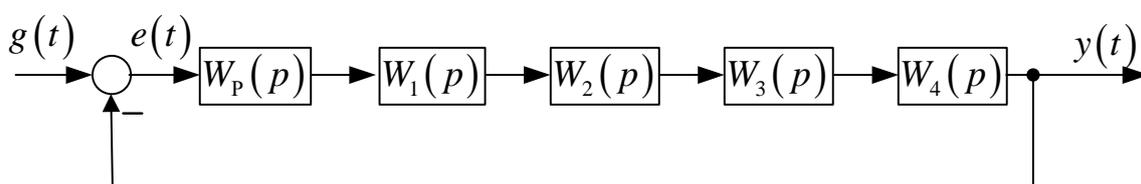


Рис. 76. Замкнутая система

где $W_1(p) = \frac{A}{B \cdot p + C}$; $W_2(p) = \frac{D}{E \cdot p + F}$; $W_3(p) = \frac{G}{H \cdot p + I}$;
 $W_4(p) = e^{\tau \cdot p}$.

Значения переменных $A \dots I$ и τ приведены в табл. 2.

Таблица 2 – Значения переменных

Вариант		A	B, с	C	D	E, с	F	G	H, с	I	$\tau, с$
Вариант 1	1	24,00	1,60	1	42,00	1,35	1	23,33	1,43	0	0,90
	2	2,50	1,13	1	7,00	2,40	1	2,00	0,92	1	0,77
Вариант 2	1	10,00	2,50	1	0,57	0,25	1	5,00	0,44	1	0,13
	2	3,50	12,00	0	2,63	3,33	1	2,00	0,42	1	0,19
Вариант 3	1	2,00	0,63	1	14,40	0,27	1	5,00	10,00	0	0,13
	2	11,67	3,13	1	9,00	1,27	1	10,00	4,00	1	1,27
Вариант 4	1	16,67	1,13	1	0,67	3,57	1	10,00	0,11	0	0,09
	2	2,40	2,45	1	3,50	3,75	1	2,33	2,73	1	0,98
Вариант 5	1	12,50	0,18	0	12,50	0,64	1	8,00	20,00	1	0,30
	2	22,50	1,11	1	8,00	1,56	1	7,50	0,31	1	0,18
Вариант 6	1	1,40	0,20	1	1,29	8,00	1	40,00	0,64	1	0,04
	2	0,44	3,89	1	4,00	8,33	1	5,00	1,11	0	0,28

Продолжение табл. 2

Вариант		A	B, с	C	D	E, с	F	G	H, с	I	τ, с
Вариант 7	1	3,00	0,77	1	4,50	0,40	1	1,50	0,29	1	0,07
	2	3,00	7,50	1	1,50	0,43	1	4,57	1,13	0	0,36
Вариант 8	1	8,40	8,33	1	12,50	3,50	1	3,50	14,00	0	2,10
	2	5,00	1,05	1	15,00	1,00	1	2,00	7,14	1	0,44
Вариант 9	1	5,25	1,24	1	4,00	2,50	1	13,50	18,00	0	2,06
	2	4,50	1,38	1	1,67	9,00	1	27,00	10,00	1	0,69
Вариант 10	1	7,00	0,73	1	10,29	0,63	1	4,00	3,11	1	0,39
	2	16,00	5,00	0	3,11	1,27	1	8,33	1,00	1	0,60
Вариант 11	1	9,00	3,46	1	1,25	0,32	1	0,90	6,67	0	0,21
	2	1,25	4,29	1	0,44	0,80	1	1,50	0,19	1	0,23
Вариант 12	1	1,11	0,20	0	3,43	0,12	1	12,00	0,47	1	0,05
	2	1,13	2,50	1	3,43	0,91	1	8,00	0,22	1	0,11
Вариант 13	1	5,00	1,00	0	7,71	3,86	1	9,33	0,89	1	0,44
	2	0,43	1,00	1	56,00	0,29	1	1,11	20,00	1	0,20
Вариант 14	1	6,22	0,91	0	0,43	1,00	1	2,40	8,00	1	0,30
	2	0,38	0,12	1	6,86	0,33	1	14,00	2,29	1	0,03
Вариант 15	1	7,20	0,71	1	9,00	0,60	1	0,75	12,50	0	0,80
	2	64,00	0,56	0	3,50	0,35	1	6,13	4,44	1	0,35
Вариант 16	1	3,56	0,11	1	1,80	2,00	1	24,00	1,17	1	0,07
	2	1,67	9,00	1	2,50	0,27	1	4,00	1,89	0	0,21
Вариант 17	1	2,00	0,33	1	0,14	0,29	1	1,33	3,38	1	0,15
	2	2,25	1,67	1	4,00	0,42	1	15,00	0,18	0	0,12
Вариант 18	1	12,00	0,75	0	5,00	3,00	1	4,00	1,75	1	0,75
	2	10,00	1,27	1	22,50	3,08	1	7,50	4,17	1	1,70
Вариант 19	1	1,40	5,00	1	16,00	45,00	1	20,00	4,00	0	1,60
	2	90,00	6,00	1	6,00	10,00	1	2,33	1,43	1	1,43
Вариант 20	1	1,00	1,65	1	5,00	2,00	1	30,00	0,47	0	0,38
	2	7,00	3,21	1	10,50	1,67	1	3,43	5,00	1	0,37
Вариант 21	1	2,67	2,50	0	42,00	0,67	1	22,50	1,00	1	0,83
	2	10,50	13,50	1	7,00	3,00	1	3,00	12,50	1	1,71
Вариант 22	1	0,50	1,00	1	2,57	0,05	1	2,00	1,33	1	0,07
	2	8,75	2,14	1	1,50	0,63	1	20,00	0,15	0	0,05
Вариант 23	1	2,00	0,32	1	12,00	45,00	1	36,00	4,00	1	0,23
	2	5,63	0,79	0	4,00	0,35	1	0,25	2,50	1	0,07
Вариант 24	1	20,00	2,00	1	32,00	0,82	1	6,22	0,47	0	0,20
	2	0,50	7,00	1	1,00	0,67	1	2,00	0,45	1	0,13
Вариант 25	1	8,17	2,00	1	12,50	0,90	1	11,67	0,40	1	0,27
	2	0,63	0,63	0	1,29	10,67	1	1,75	1,65	1	0,24
Вариант 26	1	13,33	1,14	1	6,00	1,60	1	4,67	0,50	0	0,33
	2	7,00	0,53	1	3,00	1,71	1	3,75	6,00	1	0,23

Окончание табл. 2

Вариант		<i>A</i>	<i>B, с</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E, с</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H, с</i>	<i>I</i>	$\tau, с$
Вариант 27	1	13,33	5,33	1	12,00	1,29	1	10,00	0,40	0	0,20
	2	5,00	0,60	1	80,00	3,50	1	2,50	6,00	1	0,30
Вариант 28	1	30,00	0,35	1	0,20	1,20	1	2,25	10,00	0	0,07
	2	8,57	7,00	0	8,40	0,91	1	13,33	0,95	1	1,52
Вариант 29	1	7,50	4,29	1	6,00	5,63	1	10,00	0,64	0	0,54
	2	2,40	0,44	1	20,25	50,00	1	0,40	0,27	1	0,09
Вариант 30	1	0,17	7,50	1	2,50	1,56	1	10,00	9,00	0	1,17
	2	20,00	0,10	1	10,00	0,44	1	4,00	2,15	1	0,03

10. ЗАДАНИЕ № 5

Произвести синтез системы рис. 77:

- 1) выбрать тип регулятора;
- 2) определить параметры регулятора;
- 3) определить передаточные функции разомкнутой и замкнутой синтезированной системы для каждого контура;
- 4) построить графики переходных процессов синтезированной системы.

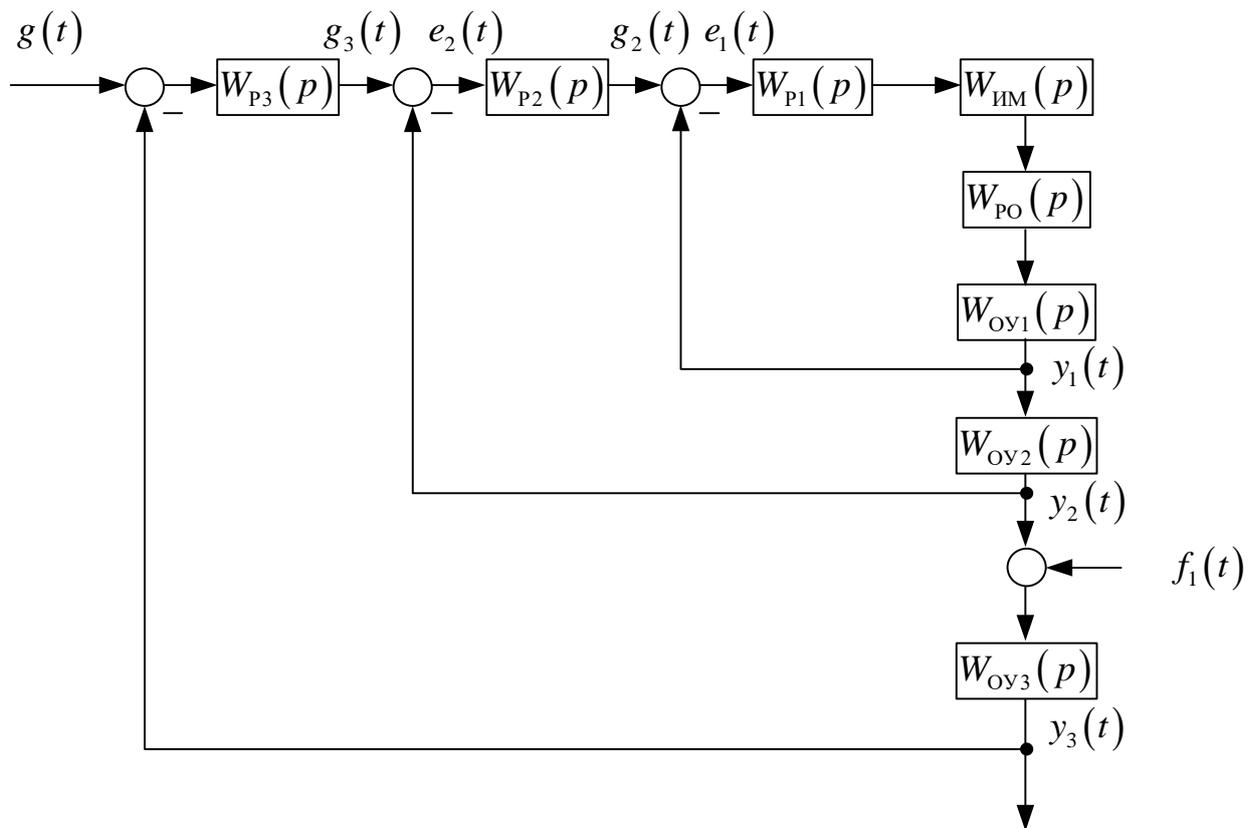


Рис. 77. Система подчиненного (каскадного) управления

где $W_{Oy1}(p) = \frac{A}{(B \cdot p + 1)}$; $W_{Oy2}(p) = \frac{C}{(D \cdot p + 1)}$; $W_{Oy3}(p) = \frac{E \cdot e^{\tau \cdot p}}{(F \cdot p)}$;
 $W_{ИМ}(p) = \frac{G}{(H \cdot p + 1)}$; $W_{PO}(p) = I$; $W_{P1}(p) \dots W_{P3}(p)$ – регулятор i -го контура.

Значения переменных $A \dots I$ и τ приведены в табл. 3.

Таблица 3 – Значение переменных

Вариант		A	B, с	C	D, с	E	F, с	G	H, с	I	τ , с
Вариант 1	1	8,00	4,67	4,00	1,00	0,86	16,33	7,00	1,80	2,67	0,56
	2	32,00	0,40	10,00	4,44	4,00	40,00	2,29	0,46	6,00	0,40
Вариант 2	1	6,00	1,76	6,13	0,25	12,00	5,00	1,67	0,43	5,33	0,13
	2	14,00	2,25	2,29	2,67	22,50	27,00	4,80	2,50	16,33	0,90
Вариант 3	1	2,80	0,50	9,80	6,67	20,00	15,00	4,29	0,67	16,00	0,22
	2	2,50	2,50	8,00	4,44	15,00	5,00	7,50	3,00	11,25	1,88
Вариант 4	1	10,00	2,00	0,60	0,50	6,00	14,00	2,00	8,00	30,00	0,11
	2	4,50	3,46	16,20	0,55	22,50	2,50	2,10	0,38	2,67	0,36
Вариант 5	1	4,29	0,90	5,14	1,75	9,00	54,00	12,00	2,00	3,00	0,30
	2	2,00	0,56	3,00	8,00	7,71	3,00	18,00	2,78	1,50	0,34
Вариант 6	1	1,60	0,36	4,50	1,17	4,50	1,40	4,00	1,39	9,00	0,18
	2	1,50	0,50	6,00	0,57	72,00	45,00	3,33	0,80	6,00	0,31
Вариант 7	1	9,60	0,50	8,00	0,31	2,50	4,80	11,25	0,20	33,33	0,16
	2	0,75	2,00	0,60	0,06	8,00	14,00	1,88	0,06	3,33	0,04
Вариант 8	1	15,00	2,00	3,50	0,88	1,33	10,80	9,33	0,71	27,00	0,49
	2	18,00	0,60	0,75	12,50	15,00	60,00	8,00	2,80	50,00	0,30
Вариант 9	1	0,43	2,18	4,50	1,00	7,00	42,00	30,00	4,00	26,67	0,83
	2	2,33	0,15	3,00	1,17	2,00	15,00	3,50	0,57	6,00	0,08
Вариант 10	1	2,25	3,00	24,00	2,27	5,00	1,50	3,00	0,50	1,25	1,07
	2	4,44	5,00	2,67	2,29	54,00	9,60	7,50	10,00	35,00	2,29
Вариант 11	1	40,50	1,00	10,00	1,00	0,11	12,60	14,00	0,57	20,00	0,33
	2	1,60	0,75	0,30	0,55	1,75	8,00	15,00	5,00	12,00	0,23
Вариант 12	1	5,00	3,00	5,40	0,54	2,25	6,00	2,50	5,00	5,33	0,54
	2	1,14	0,56	3,33	2,25	5,33	12,00	1,50	1,87	24,50	0,35
Вариант 13	1	15,00	10,67	16,00	0,62	0,30	3,60	7,00	2,00	7,00	0,41
	2	3,60	3,46	5,00	1,75	1,00	12,50	5,33	0,18	10,67	1,75
Вариант 14	1	2,00	0,13	2,25	4,00	6,00	12,60	16,67	0,50	4,67	0,07
	2	16,00	1,69	2,00	1,05	40,00	2,00	36,00	1,50	16,00	1,40
Вариант 15	1	27,00	7,50	6,30	0,36	6,00	24,00	10,00	0,90	17,50	0,09
	2	1,00	18,00	0,88	2,00	0,50	8,40	6,00	1,54	15,00	1,60
Вариант 16	1	5,60	21,00	20,00	0,62	3,75	7,50	0,38	3,00	12,00	0,49
	2	6,67	5,00	15,00	2,33	1,78	4,80	0,40	0,75	7,50	2,33
Вариант 17	1	3,33	0,45	4,00	1,25	18,00	7,00	1,25	6,00	20,00	0,76
	2	0,67	4,09	9,00	12,00	1,20	6,75	10,50	2,50	3,00	1,02
Вариант 18	1	10,00	0,50	2,22	0,71	16,00	10,00	2,80	0,50	16,67	0,28
	2	1,00	0,46	10,00	5,63	20,00	7,50	3,00	18,00	8,75	0,31
Вариант 19	1	2,33	0,50	8,40	2,18	8,75	2,40	3,75	4,38	0,50	0,14
	2	4,67	0,60	56,00	14,00	10,80	7,50	2,33	8,00	2,00	0,26
Вариант 20	1	30,00	4,00	16,00	0,53	1,13	25,00	1,40	0,78	10,00	0,32
	2	4,00	17,50	10,00	1,67	2,50	70,00	2,00	0,20	30,00	0,93

Окончание табл. 3

Вариант		A	B, с	C	D, с	E	F, с	G	H, с	I	τ , с
Вариант 21	1	0,71	30,00	8,40	2,67	1,00	2,50	20,00	5,00	10,00	3,13
	2	7,00	2,86	5,40	8,00	1,00	12,00	0,67	0,67	6,00	3,81
Вариант 22	1	0,57	0,57	1,00	2,67	0,50	12,00	1,00	1,00	16,33	0,76
	2	7,00	1,00	1,14	3,33	0,50	2,00	3,00	0,71	10,00	0,25
Вариант 23	1	1,00	1,39	1,00	2,14	32,00	6,00	12,25	1,50	4,50	0,28
	2	24,00	5,00	2,67	2,27	6,00	4,00	2,67	0,50	6,00	0,91
Вариант 24	1	7,14	1,43	3,43	1,00	2,00	8,00	60,00	2,86	13,33	1,33
	2	16,00	4,00	2,40	1,84	8,00	18,00	4,00	4,44	31,50	0,37
Вариант 25	1	1,00	2,00	70,00	0,10	0,80	14,00	4,00	0,07	8,75	0,04
	2	10,00	1,94	1,33	2,27	3,13	1,20	7,00	0,20	35,00	0,80
Вариант 26	1	4,00	0,28	3,00	2,91	8,33	3,50	5,25	1,00	13,50	0,19
	2	4,80	18,00	0,89	3,13	2,50	27,00	2,33	1,50	30,00	1,79
Вариант 27	1	18,00	1,78	8,00	0,50	2,80	20,00	8,00	1,33	10,00	0,40
	2	1,88	8,00	3,43	0,31	2,40	3,50	0,70	1,05	7,50	0,23
Вариант 28	1	6,00	2,67	17,50	0,59	1,00	8,75	6,00	1,67	30,00	0,42
	2	22,50	0,82	1,75	0,80	2,50	5,00	70,00	4,00	2,50	0,60
Вариант 29	1	13,50	0,22	8,33	0,18	4,29	11,20	9,33	0,15	15,75	0,08
	2	0,71	1,80	42,00	1,13	4,29	18,00	8,75	1,20	3,00	0,42
Вариант 30	1	6,40	10,50	6,30	2,57	1,71	24,00	0,80	3,75	6,25	1,29
	2	0,67	4,00	11,67	0,60	1,29	10,00	0,22	1,50	6,00	0,27

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бесекерский, В. А. Теория систем автоматического регулирования [Текст] / В. А. Бесекерский, Е. П. Попов. – М.: Наука, 1985. – 768 с.
2. Башарин, А. В., Новиков, В. А., Соколовский, Г. Г. Управление электроприводами [Текст]: учебное пособие для вузов / А. В. Башарин, В. А. Новиков, Г. Г. Соколовский. – Л.: Энергоиздат. Ленингр. отд-ние, 1982. – 392 с.
3. Первозванский, А. А. Курс теории автоматического управления [Текст] / А. А. Первозванский. – М.: Наука, 1986. – 616 с.
4. Солодовников, В. В. Основы теории и элементы систем автоматического регулирования [Текст] / В. В. Солодовников. – М.: Машиностроение, 1985. – 536 с.
5. Ковалёв, Д. А., Шаряков, В. А., Шарякова, О. Л. Теория автоматического управления [Текст]: учебное пособие / Д. А. Ковалёв, В. А. Шаряков, О. Л. Шарякова. – СПб.: ВШТЭ СПбГУПТД, 2019. – 80 с.
6. Фрер, Ф., Орттенбургер, Ф. Введение в электронную технику регулирования [Текст] / Ф. Фрер, Ф. Орттенбургер; пер. с нем. – М.: «Энергия», 1973. – 192 с.

Учебное издание

Ковалёв Дмитрий Александрович
Шаряков Владимир Анатольевич
Шарякова Ольга Леонидовна

Теория автоматического управления

Практикум

Редактор и корректор А. А. Чернышева
Техн. редактор Д. А. Романова

Темплан 2022 г., поз. 5111/22

Подписано к печати 16.12.2022.	Формат 60x84/16.	Бумага тип № 1.
Печать офсетная.	Печ.л. 8,4.	Уч.-изд. л. 8,4
Тираж 30 экз. (1 завод)	Изд. № 5111/22.	Цена «С». Заказ №

Ризограф Высшей школы технологии и энергетики СПбГУПТД,
198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4.