

А. М. Орбинский

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ**

Текст лекций

**Санкт-Петербург
2022**

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

**«Санкт-Петербургский государственный университет
промышленных технологий и дизайна»
Высшая школа технологии и энергетики
Кафедра автоматизированного электропривода и электротехники**

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Текст лекций для студентов всех форм обучения
по направлению подготовки
13.03.02 – Электроэнергетика и электротехника

Составитель А. М. Орбинский

Санкт-Петербург
2022

Утверждено
на заседании кафедры АЭ и Э
28.10.2021 г., протокол № 3

Рецензенты:
П. А. Галайдин, В. А. Королев

Текст лекций соответствует программам и учебным планам дисциплины «Теоретические основы электротехники» для студентов, обучающихся по направлению подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника». Текст лекций охватывает весь объем материалов по дисциплине. Издание предназначено для самостоятельной работы студентов.

Текст лекций предназначен для бакалавров очной и заочной форм обучения.

Утверждено Редакционно-издательским советом ВШТЭ СПбГУПТД в качестве
текстов лекций

Редактор и корректор А. А. Чернышева
Техн. редактор Д. А. Романова

Темплан 2022 г., поз. 5045

| | | |
|------------------------------|------------------|------------------|
| Подписано к печати 12.01.22. | Формат 60x84/16. | Бумага тип № 1. |
| Печать офсетная. | Печ.л. 6,3. | Уч.-изд. л. 6,3. |
| Тираж 50 экз. | Изд. № 5045. | Цена «С». |
| | | Заказ № |

Ризограф Высшей школы технологии и энергетики СПбГУПТД,
198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4.

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|--|----|
| ВВЕДЕНИЕ | 5 |
| 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ | 7 |
| 1.1. Основные понятия и характеристики электромагнитного поля | 7 |
| 1.2. Основные понятия и определения теории электрических цепей..... | 10 |
| 1.3. Законы электрических цепей | 15 |
| 2. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА | 18 |
| 2.1. Сущность и классификация методов анализа электрических цепей постоянного тока | 18 |
| 2.2. Методы расчета сложных цепей..... | 21 |
| 3. ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА..... | 27 |
| 3.1. Основные понятия, характеристики и режимы работы цепей синусоидального тока | 27 |
| 3.2. Законы и методы расчета линейных электрических цепей синусоидального тока | 31 |
| 3.3. Цепи с взаимной индукцией | 36 |
| 4. ЦЕПИ НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА | 41 |
| 4.1. Несинусоидальные периодические токи и их характеристики | 41 |
| 5. ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ФИЛЬТРЫ..... | 44 |
| 5.1. Расчет цепей с многополюсными элементами..... | 44 |
| 6. ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ | 47 |
| 6.1. Устройство трехфазных цепей..... | 47 |
| 6.2. Режимы работы трехфазных цепей | 50 |
| 7. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ..... | 54 |
| 7.1. Понятие о переходных процессах в электрических цепях | 54 |
| 7.2. Операторный метод расчета переходных процессов | 58 |
| 8. ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ..... | 62 |
| 8.1. Основные понятия, определения и свойства цепей с распределенными параметрами | 62 |
| 8.2. Линия без потерь. Зависимость работы линии от нагрузки | 66 |
| 9. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ | 70 |
| 9.1. Нелинейные электрические цепи постоянного тока | 70 |

| | |
|---|----|
| 9.2. Нелинейные электрические цепи переменного тока | 73 |
| 10. МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ | 78 |
| 10.1. Основы теории магнитных цепей..... | 78 |
| 11. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ | 82 |
| 11.1. Сущность и методы решения задач расчета электромагнитного поля | 82 |
| 11.2. Статические и стационарные поля | 89 |
| 11.3. Переменное электромагнитное поле | 93 |
| 11.4. Электромагнитное экранирование | 97 |

ВВЕДЕНИЕ

В своей профессиональной деятельности на предприятиях промышленности и других объектах современный специалист-электроэнергетик имеет дело с эксплуатацией устройств, обеспечивающих получение, передачу, распределение и потребление электрической энергии, ее измерение и контроль. Поэтому электротехнической подготовке современного специалиста в Федеральных государственных образовательных стандартах (ФГОС) уделяется большое внимание.

В широком научном смысле *электротехника* – это наука, изучающая способы практического использования электрической энергии. В практическом смысле под электротехникой понимается ряд отраслей техники, связанных с производством, передачей, распределением и потреблением электроэнергии, а также с ее различными преобразованиями.

Началом развития электротехники как науки принято условно считать 1600-й год, когда вышло первое обстоятельное научное сочинение о магнитных и электрических явлениях, принадлежащее Гильберту.

В XVII – XVIII в. в. можно выделить следующие значительные электротехнические открытия:

- М. В. Ломоносов создал теорию атмосферного электричества и создал первую в России лабораторию по изучению электрических явлений;
- О. Герике создал первый электростатический генератор;
- А. Вольта создал первый гальванический элемент;
- Ш. Кулон установил закон механического взаимодействия электрических зарядов.

Использование электромагнитных явлений на практике началось в XIX веке.

В этот период:

- В. В. Петров открыл электрическую дугу;
- Х. Эрстед обнаружил воздействие электрического тока на магнитную стрелку;
- М. Фарадей открыл закон электролиза и закон электромагнитной индукции;
- Э. Ленц и одновременно К. Джоуль независимо друг от друга открыли закон теплового действия тока;
- А. Ампер открыл закон взаимодействия токов, на основе которого был создан первый электромеханический генератор;
- Г. Ом открыл закон, устанавливающий связь между током, напряжением и сопротивлением;
- Г. Кирхгоф открыл законы электрических цепей;
- Д. Максвелл разработал теорию электромагнетизма;
- Т. Эдиссон создал первую электростанцию;

- М. О. Доливо-Добровольский изобрел трехфазный двигатель и трехфазный трансформатор, а также построил первую в мире линию передачи трехфазного тока на большое расстояние;

- А. Г. Столетов разработал теорию магнитных цепей и теорию фотоэлектрического эффекта.

Необходимо также отметить другие значительные открытия и изобретения русских ученых в области электротехники: изобретение выдающим русским ученым А. С. Поповым радио, электромагнитный телеграф П. Л. Шиллинга, первая в мире лампа накаливания А. Н. Лодыгина, электрическая свеча П. Н. Яблочкова, первый в мире электродвигатель Б. С. Якоби и др.

В XX веке происходило широкое внедрение электротехники во все области жизни. В этот период были созданы гигантские энергосистемы огромной мощности, сверхмощные электростанции, сверхдальние линии электропередачи. Во второй половине XX века и в начале века XXI большое развитие получила так называемая *нетрадиционная энергетика*, т. е. преобразование в электроэнергию не энергии сжигаемого топлива, а различных других видов энергии – атомной, энергии ветра и солнца и др. При этом необходимо отметить, что сегодня название «нетрадиционная» уже в значительной мере потеряло свой смысл. Наоборот, для энергообеспечения объекта становится нормой наличие нескольких альтернативных источников энергии. Кроме того, элементная база электротехники совершенствуется, появляются устройства, работающие на новых принципах, применяются нанотехнологии.

Электротехника сформировалась в самостоятельную науку в связи с конкретными инженерными задачами. *Теоретическая электротехника*, или как ее еще называют, теоретические основы электротехники (ТОЭ) включает в себя вопросы теории электрических и магнитных цепей, а также электромагнитных полей.

Цель учебной дисциплины ТОЭ – сформировать у студента компетенции в области фундаментальных законов электротехники, позволяющие использовать базовые знания для изучения комплекса специальных электротехнических дисциплин.

Материал по каждой теме полностью соответствует целям обучения, сформулированным в ФГОС.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

1.1. Основные понятия и характеристики электромагнитного поля

1.1.1. Электрическое поле: определение, свойства, основные характеристики

Электромагнитное поле (ЭМП) – это особый вид материи, характеризующийся совокупностью взаимно связанных и взаимно обуславливающих друг друга электрического и магнитного полей.

ЭМП характеризуется непрерывным распределением в пространстве, например, в виде электромагнитной волны, и вместе с тем оно может существовать в виде квантов излученного ЭМП.

ЭМП оказывает силовое воздействие на электрические заряды.

Любое электромагнитное явление, рассматриваемое в целом, характеризуется двумя сторонами – электрической и магнитной, между которыми существует тесная связь. Электрическое и магнитное поля могут быть изменяющимися и неизменными во времени. Вместе с тем можно создать условия, когда в некоторой области пространства заметно проявление только электрических или только магнитных явлений. Таковыми являются, например, случай заряженных неподвижных проводящих тел, вне которых обнаруживается только электрическое поле, или в пространстве, окружающем неподвижные постоянные магниты, обнаруживается только магнитное поле.

Электрическое поле – это одна из сторон электромагнитного поля, обусловленная электрическими зарядами и изменением магнитного поля, оказывающая силовое воздействие на заряженные частицы и тела и выявляемая по силовому воздействию на неподвижные заряженные частицы и тела.

Простейшим случаем электрического поля является поле неподвижных электрически заряженных тел, называемое *электростатическим*.

Основной физической величиной, характеризующей электрическое поле в каждой его точке, является *напряженность электрического поля*, равная отношению механической силы, действующей на неподвижное положительно заряженное тело, помещенное в данную точку поля, к величине заряда этого тела.

Напряженность электрического поля изображают вектором \vec{E} , по направлению совпадающим с вектором $\vec{f}_э$ механической силы, действующей на положительно заряженное тело с зарядом q . Следовательно, с учетом закона Кулона, определяющего силу взаимодействия между зарядами, получим:

$$\vec{E} = \frac{\vec{f}_э}{q} = \frac{q}{4\pi\epsilon_a r^2} \cdot \vec{r}_0, \quad (1.1)$$

где r – расстояние от заряда до точки, в которой определяют напряженность поля, измеряемое в метрах (м); \vec{r}_0 – единичный вектор; ϵ_a – абсолютная диэлектрическая проницаемость среды, измеряемая в фарадах на метр (Ф/м).

Для вакуума $\epsilon_a = \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

В системе СИ сила $\vec{f}_э$ измеряется в ньютонах (Н), заряд измеряется Кулонами (Кл). При этом единица измерения напряженности электрического поля – вольт на метр (В/м).

Определив напряженность поля во всех его точках, можно провести ряд линий так, чтобы в каждой точке этих линий касательные к ним совпадали по направлению с вектором напряженности поля. Эти линии называют силовыми линиями или *линиями напряженности* электрического поля. Линии напряженности электрического поля бывают замкнутыми и незамкнутыми, как показано на рис. 1.1.

Какой из этих вариантов имеет место, зависит от того, что является источником поля. Более подробно эти вопросы будут рассмотрены в соответствующей главе, посвященной теории ЭМП.



Рис. 1.1. Линии напряженности электрического поля

При рассмотрении макроскопических процессов в электротехнических устройствах обычно усредняют во времени и в пространстве микроскопические неоднородности, являющиеся результатом того, что изучаемые процессы в действительности представляют собой совокупность огромного числа элементарных процессов. Поэтому вещество характеризуют усредненными параметрами и называют средой. *Однородной* называют среду, которая во всех элементах объема обладает одинаковыми физическими свойствами. *Изотропной* называют среду, обладающую в каждом элементе объема одинаковыми свойствами во всех направлениях.

В ряде случаев электрическое поле удобно характеризовать не напряженностью, а *электрической индукцией* \vec{D} , иногда называемой также вектором электрического смещения.

Иногда электрическое поле можно описывать более простым способом: не векторными величинами E или D , а скалярной (числовой) характеристикой – электрическим потенциалом. При перемещении заряда меняется его потенциальная энергия. *Потенциал* V электрического поля в некоторой точке пространства – потенциальная энергия точечного положительного заряда, помещенного в эту точку. Например, на расстоянии r от заряда q потенциал созданного этим зарядом поля равен:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \frac{q}{r}.$$

Единица измерения электрического потенциала – вольт (В).

Кроме потенциалов, для описания полей используются и другие скалярные величины. При этом все они называются *интегральными* характеристиками поля, т. к. численно каждая из них определяется интегралом от соответствующей векторной характеристики поля.

1.1.2. Магнитное поле: определение, свойства, основные характеристики

Магнитным полем называется одна из двух сторон электромагнитного поля, обусловленная движущимися заряженными частицами и изменением электрического поля, оказывающая силовое воздействие на движущиеся заряженные частицы и выявляемая по силовому воздействию, направленному нормально к направлению движения этих частиц и пропорциональному их скорости.

Если заряженное тело движется в электромагнитном поле со скоростью \vec{v} , то на него действует сила \vec{f}_M со стороны магнитного поля, перпендикулярная вектору скорости \vec{v} и численно пропорциональная величине скорости.

Кроме того, сила \vec{f}_M пропорциональна величине *магнитной индукции*, причем имеет место равенство:

$$\vec{f}_M = q[\vec{v} \vec{B}], \quad (1.2)$$

где $[\vec{v} \vec{B}]$ – векторное произведение векторов \vec{v} и \vec{B} .

Из (1.2) следует, что вектор \vec{f}_M перпендикулярен к векторам \vec{v} и \vec{B} . Величину магнитной индукции B находим из выражения:

$$B = \frac{f_M}{qv}. \quad (1.3)$$

Направление вектора магнитной индукции совпадает с поступательным перемещением правого винта при вращении его от направления механической силы к направлению движения.

Единица измерения магнитной индукции – *тесла* (Тл).

Графически магнитное поле изображается с помощью линий магнитной индукции. Линии магнитной индукции всегда замкнутые.

Д. Максвелл ввел в теорию еще одну векторную характеристику – *напряженность магнитного поля* \vec{H} . Вектор напряженности связан с вектором магнитной индукции соотношением:

$$\vec{B} = \mu_a \vec{H}, \quad (1.4)$$

где μ_a – *абсолютная магнитная проницаемость* вещества, измеряемая в генри на метр (Гн/м).

Для вакуума $\mu_a = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

Напряженность магнитного поля измеряется в амперах на метр (А/м).

Примером интегральной характеристики магнитного поля может служить магнитный поток.

Магнитный поток Φ через поверхность S , пронизываемую линиями магнитной индукции, – поток вектора магнитной индукции через эту поверхность:

$$\Phi = \int_s \bar{B} d\bar{S} . \quad (1.5)$$

Рассмотрим типовое электротехническое устройство – катушку провода (обмотки трансформаторов и электрических машин, дроссели и т. п.), имеющую w витков.

Величину магнитного потока, пронизывающего все витки катушки (*сцепляющегося* с витками катушки), принято характеризовать *потокосцеплением*:

$$\Psi = w\Phi. \quad (1.6)$$

Единицей измерения магнитного потока и потокосцепления является *вебер* (Вб).

1.2. Основные понятия и определения теории электрических цепей

1.2.1. Понятие электрической цепи. Ток, напряжение, ЭДС и мощность в электрической цепи

Реальные электротехнические устройства (ЭТУ) представляют собой сложные системы, анализ работы которых в общем случае предполагает решение весьма сложной задачи на основе уравнений ЭМП, которые будут рассмотрены в соответствующей главе. Вместе с тем, во многих практических случаях можно с достаточной точностью описать работу ЭТУ с помощью модели, называемой электрической или магнитной цепью.

Электрическая цепь – совокупность устройств, образующих путь для электрического тока, электромагнитные процессы в которых могут быть описаны с помощью понятий об ЭДС, токе и напряжении.

Электрическая цепь *предназначена* для передачи, распределения и преобразования электроэнергии в другие виды энергии.

Любая электрическая цепь может состоять из следующих *элементов*:

- источников электроэнергии;
- приемников электроэнергии;
- вспомогательных элементов (соединительные провода, выключатели, предохранители, разъемы, измерительные приборы и др.).

В *источниках электроэнергии* различные виды энергии преобразуются в электрическую. В *приемниках электроэнергии* происходит обратное преобразование – электроэнергия преобразуется в иные виды энергии.

В электрических цепях *электрический ток* – явление направленного движения свободных носителей электрического заряда. Такими носителями заряда в металлах являются электроны, а в плазме или электролите – ионы.

Обозначения тока – I (постоянный или действующий переменный), i (мгновенный переменный).

Электрический ток измеряется количеством электрического заряда q , прошедшего через поперечное сечение проводника в единицу времени:

$$i = \frac{dq}{dt} . \quad (1.7)$$

Постоянный ток – электрический ток, не изменяющийся во времени. Все остальные токи – *переменные*. По роду тока и электрические цепи разделяются на цепи постоянного и переменного тока.

Единица измерения тока – ампер (А).

Условно за *направление тока* в цепи принято направление движения положительных зарядов, т. е. обратное направлению движения электронов.

Движение носителей заряда обусловлено силовым действием электрического поля. При этом, в соответствии с направлением вектора E положительные заряды движутся от точки с большим электрическим потенциалом к точке с меньшим электрическим потенциалом, в частности, от положительно заряженного электрода к отрицательно заряженному.

В химическом источнике электроэнергии постоянного тока в результате действия сил неэлектромагнитной природы (химических, механических и др.), называемых *сторонними силами*, создается электрическое поле, которое характеризуется напряженностью $\bar{E}_{\text{стор}}$. При подключении к выводам источника внешней электрической цепи в ней создается электрическое поле $\bar{E}_{\text{внеш}}$, направленное от положительного электрода источника к отрицательному.

Под действием этого поля носители отрицательных зарядов – электроны перемещаются вдоль внешней части цепи от отрицательного электрода к положительному, нейтрализуя недостаток отрицательных зарядов на положительном электроде. В цепи наступает динамическое равновесие: в источнике происходит разделение зарядов, а через внешнюю часть цепи – их соединение.

Электродвижущая сила (ЭДС) характеризует способность стороннего поля вызывать электрический ток. ЭДС численно равна работе сил стороннего поля по перемещению заряда внутри источника.

При перемещении зарядов по участку цепи вне источника совершаемая электрическим полем работа характеризуется *электрическим напряжением*.

Напряжение (разность потенциалов) между двумя точками цепи есть величина, равная работе сил поля по перемещению заряда между этими точками.

Обозначения ЭДС и напряжения:

- E, U – постоянные или действующие переменные;
- e, u – мгновенные переменные.

Единицы измерения ЭДС и напряжения – вольт (В).

Энергия W , затраченная на перемещение заряда q на участке цепи с напряжением u за промежуток $(t_1; t_2)$:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} u dq = \int_{t_1}^{t_2} u i dt .$$

Скорость изменения энергии во времени называется *мгновенной мощностью* и определяется произведением мгновенных значений тока и напряжения:

$$p = \frac{dW}{dt} = u i . \quad (1.8)$$

Мгновенная мощность измеряется в вольт-амперах (В·А).

1.2.2. Схемы и топологические параметры электрических цепей

Электрические цепи графически изображаются в виде различных схем. На *принципиальных схемах* показывают установленные в Единой системе конструкторской документации (ЕСКД) *условные графические изображения* элементов и схему их соединения. Например, на рис. 1.2 изображена принципиальная схема цепи, включающая в себя: аккумуляторную батарею $G1$; предохранители $F1, F2$; автоматический выключатель S ; реле K ; резисторы $R1, R2, R3$; измерительные приборы (амперметр и вольтметр).

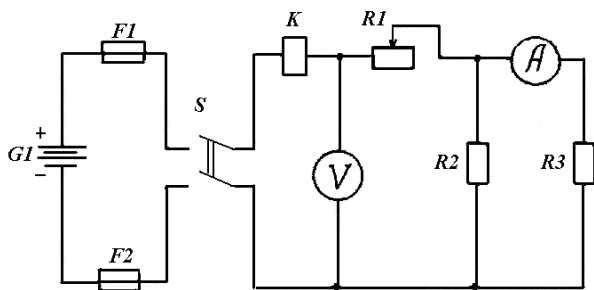


Рис. 1.2. Принципиальная схема электрической цепи

Расчетная *схема замещения* – это модель электрической цепи, в которой реальные элементы замещаются *идеальными элементами* (у каждого идеального элемента *только один* параметр) и исключаются все вспомогательные элементы, не влияющие на результаты расчета.

Для цепи, принципиальная схема которой изображена на рис. 1.2, схема замещения показана на рис. 1.3.

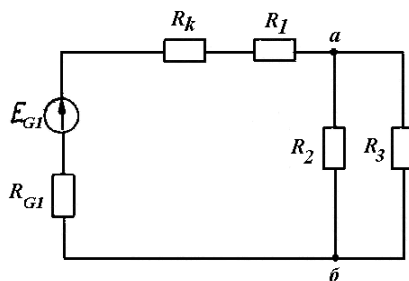


Рис. 1.3. Схема замещения электрической цепи

Активным называется участок цепи, содержащий источник электрической энергии, *пассивным* – не содержащий.

Электрическая цепь имеет несколько так называемых *топологических параметров*, характеризующих ее устройство. *Ветвь* называется участок цепи, в пределах которого имеет место один и тот же ток. *Узел* электрической цепи называется место соединения трех и более ветвей. *Контур* – любой путь вдоль ветвей электрической цепи, начинающийся и заканчивающийся в одной и той же точке. *Независимый контур* – контур, содержащий хотя бы одну новую ветвь, не входящую в рассмотренные ранее контуры.

К *простым цепям* относятся цепи, содержащие источники электроэнергии только в одной из ветвей. К *сложным цепям* относятся многоконтурные электрические цепи, содержащие источники электроэнергии в нескольких ветвях.

1.2.3. Элементы электрической цепи и их параметры

К параметрам элементов электрических цепей относят электрическое сопротивление, индуктивность, емкость, величину создаваемой ЭДС и т. д.

По характеру параметров элементов цепи разделяются на линейные и нелинейные. К *линейным* цепям относятся цепи, у которых параметры *всех* элементов не зависят от значений и направлений токов и напряжений. В противном случае цепь является *нелинейной*.

Приемники электроэнергии по своим свойствам принято разделять на резистивные, индуктивные и емкостные.

Идеальный *резистивный элемент* – это элемент, в котором происходит только необратимое преобразование электромагнитной энергии в тепло, а запасание энергии электрического и магнитного поля отсутствует.

Основным параметром резистивного элемента является *активное сопротивление* R . Единица измерения активного сопротивления – ом (Ом).

Величина G , обратная активному сопротивлению, называется *активной проводимостью*:

$$G = 1/R. \quad (1.9)$$

Проводимость измеряется в сименсах (См).

Идеальным *индуктивным элементом* электрической цепи называют элемент, в котором при протекании тока происходит только запасание энергии магнитного поля.

Примером реального прибора, близкого по свойствам к такому элементу, на практике служит катушка медного или алюминиевого провода – *индуктивная катушка* или *катушка индуктивности*. Протекание тока по виткам катушки вызывает появление магнитного поля. При этом сумма всех потоков, сцепленных с отдельными витками катушки – потокосцепление – связано с величиной тока соотношением:

$$\Psi = L i, \quad (1.10)$$

где L – *индуктивность* – основной параметр индуктивного элемента.

Единица измерения индуктивности – генри (Гн).

По *закону электромагнитной индукции* при изменении магнитного поля, пронизывающего контур (виток провода), в нем наводится ЭДС. Величина этой ЭДС равна скорости изменения магнитного потока (для катушки – потокосцепления), при этом ЭДС направлена так, чтобы ток, вызванный ею, стремился воспрепятствовать изменению магнитного поля через виток. Для индуктивной катушки это можно записать в виде математического соотношения:

$$e = -\frac{d\Psi}{dt} = -L \frac{di}{dt} = -u_L.$$

Таким образом:

$$u_L = L \frac{di}{dt}, \quad (1.11)$$

т. е. напряжение на индуктивном элементе определяется скоростью изменения тока.

При протекании через идеальный индуктивный элемент постоянного тока напряжение на таком элементе равно нулю, что равносильно короткому замыканию выводов элемента.

Идеальный *емкостный элемент* электрической цепи – элемент, в котором происходит только запасание энергии электрического поля.

Примером емкостного элемента является конденсатор, представляющий собой две обкладки из проводящего материала плоской (цилиндрической, сферической и др.) формы, между которыми находится диэлектрик. В случае приложения к конденсатору напряжения на его обкладках появляются заряды, равные по значению и противоположные по знаку, а в диэлектрике между обкладками образуется электрическое поле, при этом заряд на обкладках конденсатора пропорционален напряжению между обкладками

$$q = C U, \quad (1.12)$$

где C – *емкость*.

Единица измерения емкости – фарада (Ф).

Для установления связи между током и напряжением в емкостном элементе достаточно продифференцировать выражение (1.12). В результате получим:

$$i_c = C \frac{du_c}{dt}. \quad (1.13)$$

Ток в емкостном элементе определяется скоростью изменения напряжения. В случае приложения постоянного напряжения ток в емкости равен нулю, т. е. такой элемент равнозначен разрыву цепи.

Особенность индуктивных и емкостных элементы, заключающаяся в способности как запасать энергию, так и отдавать ее (в отличие от резистивного), обусловила общее название таких элементов – *реактивные*.

Идеальный источник ЭДС – источник, напряжение на выходных зажимах которого не зависит от тока, проходящего через источник. У такого источника отсутствует внутреннее сопротивление и его ЭДС равна напряжению на зажимах $U = E$.

Идеальный источник тока – источник, в котором ток не зависит от напряжения на выходных зажимах. Такой источник обладает бесконечно большим внутренним сопротивлением.

Данный элемент часто применяется в схемах замещения при расчете электронных устройств с транзисторами и другими усилительными элементами.

1.3. Законы электрических цепей

1.3.1. Закон Ома

Электрическая цепь постоянного тока – цепь, во всех ветвях которой токи, напряжения и ЭДС не меняют величины и направления. При рассмотрении таких цепей имеет смысл учитывать наличие приемников только резистивного типа.

Рассмотрим простейшую цепь, состоящую из аккумуляторной батареи GB и одного резистора R , принципиальная электрическая схема которой показана на рис. 1.4а. Схема замещения данной цепи показана на рис. 1.4б.

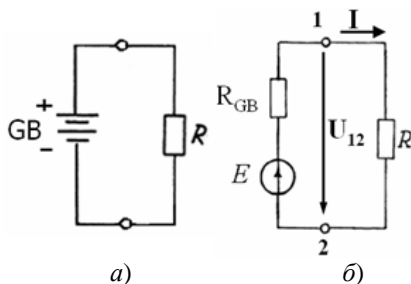


Рис. 1.4. Схемы цепи постоянного тока: а – принципиальная; б – схема замещения

Реальная аккумуляторная батарея замещается последовательным соединением идеального источника с постоянной ЭДС E и дополнительного резистора с сопротивлением R_{GB} (*внутреннее сопротивление источника*).

Немецкий ученый Г. Ом установил, что ток I в такой цепи выражается зависимостью, известной под названием *закона Ома для полной цепи*:

$$I = \frac{E}{R + R_{GB}}. \quad (1.14)$$

Преобразовав (1.14), получим:

$$E = IR + IR_{GB}. \quad (1.15)$$

Выражение (1.15) отражает закон сохранения энергии – энергия источника (характеризуемая величиной ЭДС) тратится на работу по перемещению заряда по внешней цепи – напряжение на зажимах источника $U_{12} = IR$, а также на дополнительную работу по преодолению внутреннего сопротивления самого источника. Следовательно:

$$I = \frac{U_{12}}{R}.$$

В общем случае закон Ома для участка цепи без источника дает:

$$I = \frac{U}{R}. \quad (1.16)$$

Для участка цепи с источником (с учетом возможных обозначений напряжения между точками 1 и 2 U_{12} или U_{21} , при этом заметим, что $U_{12} = -U_{21}$) получаем:

$$I = \frac{E - U_{12}}{R_{GB}} = \frac{E + U_{21}}{R_{GB}}. \quad (1.17)$$

1.3.2. Законы Кирхгофа

Для расчета сложных цепей применяются уравнения, вытекающие из закона, установленных Густавом Кирхгофом.

Так *закон сохранения электрического заряда*, гласящий, что в узле не может быть накопления электрического заряда и не может быть его расхода, для электрических цепей формулируется в виде *первого закона Кирхгофа*:

- в любой момент алгебраическая сумма токов ветвей, сходящихся в узле электрической цепи, равна нулю:

$$\sum I_k = 0. \quad (1.18)$$

Принято считать, что токи, направленные к узлу, берутся со знаком «+», а направленные от узла со знаком «-».

Например, для узла «а» цепи, схема замещения которой изображена на рис. 1.5, первый закон Кирхгофа дает:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0.$$

Второй закон Кирхгофа выражает закон сохранения энергии и формулируется следующим образом: в любой момент алгебраическая сумма ЭДС в контуре цепи равна алгебраической сумме падений напряжений на элементах этого контура:

$$\sum E_k = \sum I_k R_k. \quad (1.19)$$

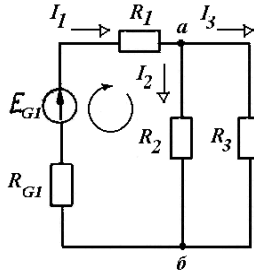


Рис. 1.5. Пример схемы замещения цепи постоянного тока

Для составления уравнения в контуре произвольно выбирают положительное направление обхода. Затем составляются алгебраические суммы напряжений и ЭДС по следующему правилу: если направление тока в элементе и в источнике ЭДС совпадает с направлением обхода, то соответствующие слагаемые записываются со знаком «+», а если не совпадают, то со знаком «-».

Например, для контура «а- R_2 -б- R_{G1} -а» на рис. 1.5 уравнение по второму закону Кирхгофа имеет вид:

$$I_1(R_{G1} + R_1) + I_2R_2 = E_{G1}.$$

1.3.3. Баланс мощностей в электрической цепи

При протекании тока I за время t в резистивном элементе с сопротивлением R электроэнергия превращается в тепло, определяемое по закону Джоуля-Ленца:

$$Q = I^2 R t. \quad (1.20)$$

Производная по времени от этого выражения есть мощность для участка цепи постоянного тока I с сопротивлением R , равная I^2R . С другой стороны, мощность источника ЭДС E при протекании по нему тока I равна EI .

На основании закона сохранения энергии количество тепла, выделяемое в цепи, должно равняться энергии, вырабатываемой за то же время источниками. В общем случае для цепи постоянного тока уравнение энергетического баланса (баланса мощностей) имеет вид:

$$I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + \dots = \pm E_1 I_1 \pm E_2 I_2 \pm \dots \quad (1.21)$$

При составлении уравнения баланса для конкретной цепи соблюдается следующий принцип: если направление тока I_k , протекающего через источник ЭДС E_k , совпадает с направлением ЭДС, то произведение $E_k \cdot I_k$ входит в уравнение (1.21) со знаком «+» (источник работает в режиме генератора); если же направление тока встречно направлению ЭДС, то источник потребляет энергию и произведение $E_k \cdot I_k$ войдет в уравнение (1.21) со знаком «-».

Рассмотренные законы и соотношения составляют основу типовых методов расчета электрических цепей.

2. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

2.1. Сущность и классификация методов анализа электрических цепей постоянного тока

2.1.1. Классификация методов расчета линейных электрических цепей. Расчет простых цепей

Линейная цепь состоит только из линейных элементов, у которых параметры (сопротивления, индуктивности, емкости и т. д.) не зависят от величины и направления протекающего тока. Процессы в линейной цепи описываются линейными алгебраическими или дифференциальными уравнениями. Наибольшее значение порядка уравнения цепи характеризует *порядок сложности цепи* (порядок цепи), который зависит от числа реактивных элементов (L , C) в ней.

Для линейных цепей справедлив *принцип суперпозиции*: реакция цепи (токи или напряжения) на сложное воздействие, представляющее собой линейную комбинацию простых воздействий (ЭДС источников), равна линейной комбинации реакций, вызванных каждым из воздействий в отдельности.

В теории цепей решаются расчетные задачи двух типов:

- *задачи анализа*, в которых известны конфигурация и элементы цепи, а требуется определить токи и напряжения тех или иных участков;
- *задачи синтеза*, в которых заданы токи и напряжения, а требуется найти конфигурацию цепи и выбрать ее элементы (обратные задачи).

В дальнейшем будут рассматриваться только задачи анализа электрических цепей. Различные методы решения задач анализа электрических цепей могут быть классифицированы по ряду признаков.

По способу математической записи уравнений различают классический и символический методы.

Классический метод базируется на использовании соотношений для реальных токов, напряжений, ЭДС и параметров элементов цепи.

Символический метод основан на замене реальных токов, напряжений, ЭДС и параметров элементов цепи их «изображениями», для чего чаще всего используются комплексные числа (комплексный метод расчета) или преобразование Лапласа (операторный метод).

По используемой методике расчета различают:

- метод преобразования схем (или просто метод преобразования);
- метод непосредственного применения законов Кирхгофа;
- метод контурных токов;
- метод узловых потенциалов (напряжений);
- метод эквивалентного генератора;
- метод наложения.

Метод преобразования – основной метод расчета простых электрических цепей. Суть расчета простой цепи с помощью метода преобразований заключается в преобразовании исходной цепи к простейшему виду, показанному на рис. 2.1, и расчет такой цепи по закону Ома.

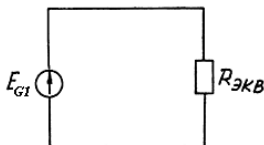


Рис. 2.1. Результат преобразования схемы замещения простой цепи постоянного тока

В основе преобразования схем обычно лежат свойства последовательного и параллельного соединения однотипных элементов (резисторов, конденсаторов и т. д.).

Напомним, что если участок цепи содержит *последовательно* соединенные k резисторов с сопротивлениями R_k то общее (эквивалентное) сопротивление такого участка:

$$R_{\text{экв}} = R_1 + R_2 + \dots + R_k. \quad (2.1)$$

Если же участок цепи содержит параллельно соединенные k резисторов с сопротивлениями R_k то общее сопротивление участка может быть найдено из выражения:

$$1 / R_{\text{экв}} = 1 / R_1 + 1 / R_2 + \dots + 1 / R_k. \quad (2.2)$$

Существуют виды преобразования цепи (преобразование «звезда-треугольник» и т. д.), информацию о которых нетрудно найти в литературе по расчету цепей.

2.1.2. Современное программное обеспечение для расчета электрических цепей на ЭВМ

Говоря о решении задач расчета электрических цепей в современных условиях, нельзя обойти вниманием вопрос применения вычислительной техники. Сегодня наряду с традиционными методами расчета цепей современному специалисту необходимо владеть и таким методом решения подобных задач, как *компьютерное моделирование*.

Все существующие прикладные математические и инженерные компьютерные программные пакеты можно классифицировать по следующим признакам:

- по разделам математики, поддерживаемых данным пакетом;
- по предметной области, на которую ориентирован пакет;

- по способу представления исходных данных и принципу их обработки. Согласно второму признаку пакеты делятся на три группы:
- чисто математические;
- инженерные, т. е. ориентированные на ту или иную техническую область;
- схемотехнические.

Входные данные в схемотехнических (структурных) пакетах задаются в виде тех или иных структурных схем, используемых, например, в теории автоматического управления, радиотехнике, электронике. При этом пользователь освобождается от необходимости писать какие-либо программы, получая результат моделирования в виде осциллограмм, графиков, либо таблиц. К числу структурных пакетов относятся *SIMULINK*, *LABVIEW*, *ELECTRONICS WORKBENCH* и др.

При изучении студентами многих инженерных дисциплин получила широкое распространение серия программ *MATCAD*. Данный пакет содержит уникальный формульный интерпретатор. Отличительная черта пакета – входной язык, максимально приближенный к обычному математическому языку.

При решении задач моделирования электротехнических цепей и устройств в системе *MATCAD* необходимо иметь математические модели исследуемых объектов в виде, например, системы уравнений. Для исследования данной модели в окне программы необходимо сформировать данную систему уравнений в виде набора формул, а затем получить решение задачи и вывести его на экран одним из возможных способов: в виде таблицы, диаграммы или графика.

Серия пакетов *MATLAB* имеет десятки специальных библиотек подпрограмм, ориентированных на различные прикладные области. Из числа инструментов *MATLAB* для исследования электротехнических цепей и устройств прежде всего ориентирована система библиотек *SIMULINK*.

Из числа наиболее доступных современных программных продуктов этим целям в наибольшей степени отвечает получившая широкое распространение во всем мире программа *ELECTRONICS WORKBENCH (EWB)*, как отличающаяся самым простым, легко осваиваемым интерфейсом.

После запуска программы на экране компьютера появляется рабочее окно *EWB*, вид которого показан на рис. 2.2.

Окно состоит из полоски меню, панели инструментов и рабочей области.

Полоса меню состоит из следующих компонентов:

- меню работы с файлами (*File*);
- меню редактирования (*Edit*);
- меню работы с цепями (*Circuit*);
- меню анализа схем (*Analysis*);
- меню работы с окнами (*Window*);
- меню работы с файлами справок (*Help*).

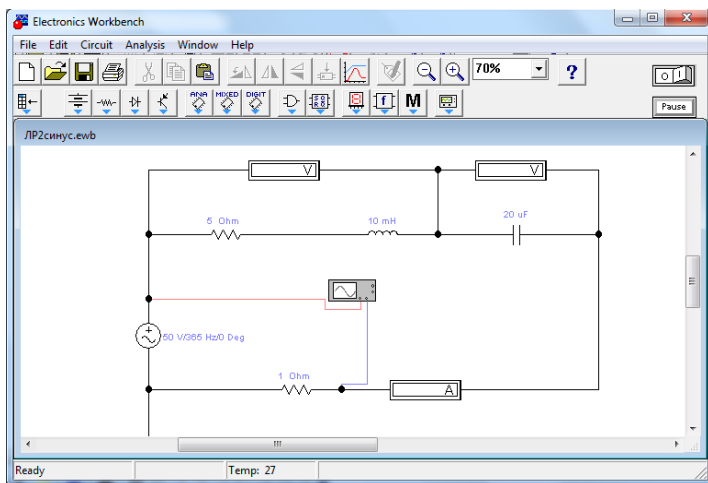


Рис. 2.2. Общий вид рабочего окна *EWB*

Алгоритм моделирования в *EWB* предусматривает выполнение следующих операций. Подготавливается новый файл, после чего в рабочую область из библиотек элементов (*Sources*, *Basic* и т. д.) переносятся необходимые элементы схемы. Затем соединяются контакты элементов. После сборки схемы для каждого элемента устанавливаются номиналы и свойства. Затем нажимается кнопка включения процесса моделирования. Для проведения анализа работы схемы используются виртуальные измерительные приборы: амперметры, вольтметры, осциллографы и др. При наличии такой элементной базы программа позволяет эффективно решать задачи по исследованию разнообразных электротехнических цепей и устройств в виртуальной лаборатории.

2.2. Методы расчета сложных цепей

2.2.1. Метод непосредственного применения законов Кирхгофа

Очевидно, что решить задачу расчета сложной цепи можно, если составить для узлов и контуров цепи уравнения по законам Кирхгофа так, чтобы в получившуюся систему вошли все неизвестные токи, и число этих уравнений было не меньше числа неизвестных. Такой способ, в котором уравнения составляются для реальных токов и напряжений рассматриваемой цепи, называется *методом непосредственного применения законов Кирхгофа*.

Пусть для сложной цепи постоянного тока заданы значения сопротивлений всех элементов и ЭДС всех источников. Алгоритм расчета (анализа) цепи данным методом предусматривает выполнение следующих этапов:

- 1) Составление схемы замещения.
- 2) Анализ топологии цепи.

На данном этапе необходимо определить число узлов n_y , ветвей n_b , независимых контуров $n_{нк} = n_b - n_y + 1$.

Одновременно становится понятным, сколько токов необходимо определить в данной задаче. На схеме замещения необходимо произвольно обозначить направления всех токов. Кроме того, необходимо выбрать независимые контуры и обозначить на схеме замещения условные положительные направления их обхода.

- 3) Составление системы уравнений для расчета неизвестных токов.

По 1-му закону Кирхгофа нужно составить $n_y - 1$ уравнений (для всех узлов кроме одного, выбираемого произвольно). По 2-му закону Кирхгофа нужно составить уравнения для всех выбранных независимых контуров.

В полученную систему подставляются числовые значения ЭДС и сопротивлений.

- 4) Решение системы уравнений.

Для решения системы может применяться любой известный метод (подстановка, метод определителей и др.).

Если величина тока в какой-нибудь ветви получится отрицательной, то его первоначальное направление (выбранное произвольно) необходимо изменить на противоположное. После уточнения направления величины всех токов считаются положительными.

- 5) Производится проверка правильности решения задачи.

Для проверки можно использовать законы Кирхгофа или составить уравнение баланса мощностей.

Применение данного метода чаще всего нецелесообразно вследствие того, что он требует составления системы уравнений наиболее высокого порядка (равного числу ветвей).

2.2.2. Метод контурных токов

Данный метод, который был впервые предложен Д. Максвеллом, является наиболее универсальным и для большинства задач позволяет рассчитать цепь путем решения системы уравнений минимально возможного порядка.

Алгоритм расчета (анализа) цепи – определения токов во всех ветвях – данным методом предусматривает выполнение следующих этапов:

- 1) Составление схемы замещения.
- 2) Анализ топологии цепи.

Особенность метода заключается в том, что для выбранных независимых контуров предполагается наличие в них фиктивных *контурных токов*, «циркулирующих» независимо друг от друга. На схеме замещения вместо

условных положительных направлений обхода обозначаются (произвольно) направления этих контурных токов. Пример оформленной схемы замещения после выполнения этапа № 2 показан на рис. 2.3. Первоначальный выбор направлений токов в ветвях обозначен на схеме сплошными стрелками.

3) Составление системы уравнений.

Система уравнений составляется для всех независимых контуров по 2-му закону Кирхгофа относительно контурных токов.

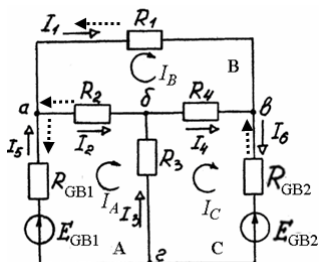


Рис. 2.3. Оформление схемы замещения цепи для расчета методом контурных токов

В общем случае уравнение для некоторого контура A сложной цепи при произвольно выбранных положительных направлениях всех контурных токов имеет вид:

$$I_A R_A \pm I_B R_{AB} \pm \dots \pm I_N R_{AN} = E_A, \quad (2.3)$$

где I_A – контурный ток, циркулирующий внутри контура A ; I_B, \dots, I_N – контурные токи, циркулирующие внутри смежных к контуру A контуров B, \dots, N ; R_A – сумма сопротивлений всех элементов, входящих в контур A ; R_{AB}, \dots, R_{AN} – сопротивления общих ветвей смежных контуров с контуром A ; E_A – алгебраическая сумма ЭДС, действующих в контуре A .

Выбор знака перед падениями напряжений от токов смежных контуров и при составлении алгебраической суммы ЭДС определяется тем, совпадает ли направление соответствующего контурного тока или направление включения источника с направлением собственного тока контура.

Например, для контура A цепи, изображенной на рис. 2.3, уравнение (2.3) принимает вид:

$$I_A (R_{GB1} + R_2 + R_3) - I_B R_2 - I_C R_3 = E_{GB1}.$$

В полученную систему подставляются числовые значения ЭДС и сопротивлений.

4) Решение системы уравнений.

В результате решения определяются числовые значения контурных токов. Если величина контурного тока получится отрицательной, то никаких изменений направления делать не нужно, т. к. это фиктивный ток.

5) Определение реальных токов в ветвях.

Реальный ток в каждой из ветвей равен алгебраической сумме контурных токов, протекающих в данной ветви. При этом, если направление контурного тока совпадает с направлением тока ветви, то в алгебраической сумме он записывается со знаком «+», а если не совпадает, то со знаком «-».

Например, для ветви «бг» цепи, изображенной на рис. 2.3, выражение для расчета тока имеет вид:

$$I_3 = I_C - I_A.$$

Если величина реального тока в какой-нибудь ветви получится отрицательной, то его первоначальное направление необходимо изменить на противоположное. На рис. 2.3 пример необходимых уточнений направлений токов показан пунктирными стрелками.

6) Производится проверка правильности решения задачи.

2.2.3. Метод узловых напряжений

Несмотря на то, что метод контурных токов является наиболее универсальным, как было сказано ранее, существует ряд задач, которые значительно проще решить иначе.

Примером служит ситуация, когда рассчитываемая сложная цепь содержит два узла. В этом случае самым простым решением будет применить метод, который называется методом узловых напряжений, а также иногда его называют методом узловых потенциалов или даже методом двух узлов, что подчеркивает область его применения.

Основой для расчета токов служит *узловое напряжение* – напряжение между двумя узлами цепи. Если обозначить узлы буквами «а» и «б», то это напряжение определяется следующим образом:

$$U_{ab} = \frac{\sum (E_k \cdot G_k)}{\sum G_k}, \quad (2.4)$$

где E_k – ЭДС k -той ветви; G_k – проводимость k -той ветви.

В числителе (2.4) находится алгебраическая сумма, при этом выбор знака перед произведением $E_k G_k$ производится по следующему принципу: со знаком «+» записываются слагаемые с ЭДС, включенными по направлению к узлу «а».

Для схемы замещения, показанной на рис. 2.4, узловое напряжение определяется выражением:

$$U_{ab} = \frac{E_{GB1}G_1 + E_{GB2}G_2 - E_{GB3}G_3}{G_1 + G_2 + G_3}.$$

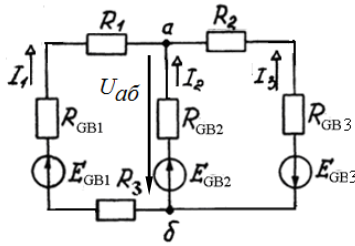


Рис. 2.4. Пример схемы замещения цепи

Проводимости ветвей:

$$G_1 = \frac{1}{R_{GB1} + R_1}; G_2 = \frac{1}{R_{GB2}}; G_3 = \frac{1}{R_{GB3} + R_3}.$$

Токи в ветвях находим по закону Ома, например:

$$I_1 = \frac{E_{GB1} - U_{ab}}{R_{GB1} + R_1}.$$

2.2.4. Метод наложения

Данный метод базируется на упомянутом выше принципе суперпозиции. Суть метода заключается в последовательном анализе работы исходной сложной цепи при условии, что в любой момент работает только один из источников. Искомые токи в ветвях находятся как линейная комбинация – алгебраическая сумма – токов, создаваемых каждым из источников в отдельности.

Расчет цепи с источниками в N ветвях разбивается на следующие этапы:

1. Расчет цепи при условии, что работает *только первый источник*.

При этом цепь становится *простой* и расчет производится с помощью метода преобразования. Токи в такой цепи назовем *частичными* и обозначим I'_1, I'_2, \dots

2. Расчет цепи при условии, что работает *только второй источник*.

Частичные токи в такой цепи обозначим I_1'', I_2'', \dots

3. ...

$N + 1$. Определяем реальные токи в исходной цепи как алгебраическую сумму частичных токов:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \pm I'_1 \pm I_1'' \pm \dots; \\ I_2 &= \pm I'_2 \pm I_2'' \pm \dots; \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Если направление частичного тока совпадает с первоначально выбранным направлением тока в ветви, то в алгебраической сумме частичный ток записывается со знаком «+», а если не совпадает, то со знаком «-».

2.2.5. Метод эквивалентного генератора

Метод активного двухполюсника (или эквивалентного генератора) позволяет достаточно просто определить ток в одной ветви сложной линейной цепи, не находя токи в остальных ветвях.

Двухполюсник – это часть схемы произвольной конфигурации, имеющая одну пару зажимов (обычно называемую входными).

Активный двухполюсник – у которого на разомкнутых входных зажимах имеется ненулевое напряжение $U_{xx} \neq 0$ (при отсутствии нагрузки – разомкнутых зажимах – источник работает в режиме холостого хода – «хх»).

Пусть у активного двухполюсника A напряжение на разомкнутых зажимах равно U_{xx} . При присоединении к двухполюснику A ветви с сопротивлением R ток в этой ветви будет равен $I = U / R$, причем $U \neq U_{xx}$.

Идея *метода эквивалентного генератора* заключается в условной замене двухполюсника A источником с ЭДС $E_{\text{эКВ}} = U_{xx}$ и сопротивлением $R_{\text{эКВ}}$, равным входному сопротивлению активной цепи, как показано на рис. 2.5.

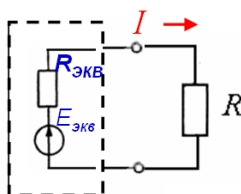


Рис. 2.5. Замена двухполюсника эквивалентным генератором

При этом искомый ток в ветви можно определить по закону Ома:

$$I = E_{\text{эКВ}} / (R + R_{\text{эКВ}}) = U_{xx} / (R + R_{\text{эКВ}}). \quad (2.6)$$

Таким образом, задача сводится к определению двух неизвестных параметров эквивалентного генератора $E_{\text{эКВ}}$ и $R_{\text{эКВ}}$.

Параметры активного двухполюсника определяются следующим образом. Во-первых, любым методом расчета цепей определяют напряжение на зажимах активного двухполюсника при отключенной исследуемой ветви.

Во-вторых, эквивалентное сопротивление активного двухполюсника определяется как сопротивление участка цепи, получаемой из исходной схемы двухполюсника при исключении из нее всех источников при сохранении на месте их внутренних сопротивлений.

3. ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

3.1. Основные понятия, характеристики и режимы работы цепей синусоидального тока

3.1.1. Основные параметры и характеристики синусоидального тока

Переменный электрический ток – ток, изменяющийся во времени.

Мгновенное значение переменного тока – значение тока в любой данный момент времени. Мгновенные значения тока, напряжения, ЭДС обозначаются строчными буквами i , u , e .

Периодическим током называется такой электрический ток, мгновенные значения которого повторяются через равные промежутки времени.

Периодом электрического тока называется наименьший интервал времени T , по истечении которого мгновенное значение тока повторяется. Период измеряется в секундах (с).

Частота f периодического тока – есть число периодов в секунду, т. е. $f = 1 / T$.

Частота измеряется в герцах (Гц).

Синусоидальным электрическим током называется периодический электрический ток, мгновенное значение которого определяется выражением:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i), \quad (3.1)$$

где I_m – *амплитуда* или максимальное значение тока, А; $(\omega t + \psi_i)$ – *фаза* синусоидального тока, рад; ω – *угловая частота* синусоидального тока, рад/с; ψ_i – *начальная фаза* синусоидального тока (значение фазы в момент времени $t = 0$), рад.

Если у нескольких синусоидальных функций, изменяющихся с одинаковой частотой, начальные фазы не совпадают, то говорят, что они *сдвинуты по фазе* относительно друг друга. Особое место играет сдвиг φ по фазе между током и напряжением на одном участке цепи синусоидального тока:

$$\varphi = \psi_u - \psi_i. \quad (3.2)$$

Для количественной оценки энергетических свойств периодического переменного тока вводится понятие о среднем квадратичном значении тока за период, которое называется *действующим значением* тока:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}.$$

Как было указано ранее, при протекании постоянного тока I в проводнике с сопротивлением R за время t выделяется тепловая энергия $I^2 R t$. Такое же тепло выделится и в том случае, когда будет протекать переменный ток с

действующим значением I . Т. е. с точки зрения данного энергетического процесса такие токи эквивалентны, поэтому они и обозначаются одинаково.

Для синусоидального тока связь между действующим значением I и амплитудой I_m определяется выражением:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 I_m. \quad (3.3)$$

Аналогичные выражения справедливы для синусоидальных напряжений и ЭДС:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}; E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}. \quad (3.4)$$

3.1.2. Синусоидальные токи и напряжения на участках цепи с резистивным, индуктивным и емкостным элементами

Если к резистивному элементу с активным сопротивлением R приложено синусоидальное напряжение $u_a = U_{am} \sin \omega t$, то по закону Ома:

$$i_a = u_a / R = I_{am} \sin \omega t,$$

где I_{am} – амплитуда тока, определяемая выражением:

$$I_{am} = U_{am} / R.$$

Разделив левую и правую части последнего соотношения на $\sqrt{2}$, получаем соотношение для действующих значений:

$$I = U / R.$$

Таким образом, на участке цепи с линейным резистором ток изменяется также по синусоидальному закону, и, кроме того, напряжение и ток совпадают по фазе.

Мгновенная мощность в цепи с резистором может быть записана следующим образом:

$$p_a = u_a i_a = R I^2 (1 - \cos 2 \omega t).$$

Мгновенная мощность в резистивном элементе пульсирует от нуля до максимума с двойной частотой, принимая только положительные значения. Значит, движение энергии в цепи происходит от источника к резистору, т. е. электрическая энергия *необратимо* преобразуется в тепло.

Среднее значение мгновенной мощности за период называют *активной мощностью*:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt. \quad (3.5)$$

Для участка цепи с резистором имеем:

$$P_a = U_a I_a = I_a^2 R. \quad (3.6)$$

Активная мощность измеряется в ваттах (Вт).

Пусть к индуктивному элементу приложено синусоидальное напряжение $u_L = U_{Lm} \sin \omega t$. Как известно, для индуктивного элемента напряжение и ток

связаны соотношением (1.14). Подставляя в него синусоидальное напряжение u_L и интегрируя, получаем:

$$i_L = I_{Lm} \sin(\omega t - \pi/2) \quad (3.7)$$

Таким образом, ток в линейном индуктивном элементе также будет синусоидальным, а угол сдвига фаз между напряжением и током $\varphi = -\pi/2$, т. е. ток по фазе отстает от напряжения на 90° .

Амплитуда тока:

$$I_{Lm} = U_{Lm} / \omega L = U_{Lm} / X_L,$$

где $X_L = \omega L$ – *индуктивное сопротивление*. (3.8)

Обратная величина $b_L = 1 / X_L$ называется *индуктивной проводимостью*.

Действующее значение тока:

$$I_L = U_L / \omega L = U_L / X_L.$$

Мгновенная мощность в индуктивном элементе:

$$p_L = u_L i_L = U_L I_L \sin 2\omega t.$$

Среднее за период значение – активная мощность – $P_L = 0$. Для характеристики процессов преобразования энергии в реактивных элементах вводится понятие *реактивной* мощности Q . Для индуктивности:

$$Q_L = U_L I_L. \quad (3.9)$$

Реактивная мощность измеряется в вольт-амперах реактивных (вар).

Пусть к емкостному элементу приложено синусоидальное напряжение $u_C = U_{Cm} \sin \omega t$. Известно, что ток в емкости:

$$i_C = C du_C / dt.$$

Получаем:

$$i_C = \omega C U_{Cm} \cos \omega t = I_{Cm} \sin(\omega t + \pi/2). \quad (3.10)$$

Таким образом, ток на участке цепи с линейным емкостным элементом при синусоидальном напряжении также синусоидальный и по фазе опережает напряжение на 90° .

Амплитуда тока:

$$I_{Cm} = \omega C U_{Cm} = b_C U_{Cm} = U_{Cm} / X_C,$$

где $X_C = \omega C$ – *емкостное сопротивление*. (3.11)

Обратная величина $b_C = \omega C$ называется *емкостной проводимостью*.

Мгновенная мощность емкостного элемента:

$$p_C = u_C i_C = U_C I_C \sin 2\omega t.$$

Активная мощность в емкости $P_C = 0$. Реактивная емкостная мощность:

$$Q_C = U_C I_C. \quad (3.12)$$

Если индуктивный и емкостной элементы соединены последовательно, то в моменты, когда энергия магнитного поля индуктивного элемента увеличивается, энергия электрического поля емкостного элемента уменьшается, и наоборот. Следовательно, эти элементы могут обмениваться энергией не только с источниками, но и друг с другом.

3.1.3. Режимы работы цепи синусоидального тока

Рассмотрим простейшую цепь с последовательным соединением элементов R , L и C , схема замещения которой изображена на рис. 3.1.

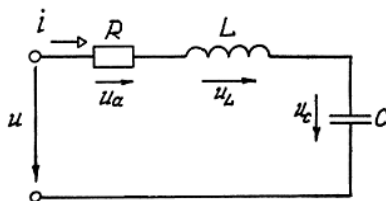


Рис. 3.1. Схема замещения последовательной RLC -цепи

Пусть к такой цепи приложено напряжение:

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

Мгновенное значение этого напряжения можно также получить на основе 2-го закона Кирхгофа:

$$u = u_a + u_L + u_C. \quad (3.13)$$

Подставив выражения для мгновенных значений напряжений на элементах, получим:

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt = u. \quad (3.14)$$

Решение этого уравнения в общем виде имеет вид:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Действующие значения напряжений на элементах:

$$U_a = RI, \quad U_L = X_L I, \quad U_C = X_C I.$$

Сдвиг по фазе $\varphi = \psi_u - \psi_i$ между током и напряжением зависит от параметров элементов и частоты тока в цепи и определяет режим ее работы. Для последовательной цепи возможны следующие варианты:

1) При $\varphi > 0$ режим работы называется *активно-индуктивным*. В этом режиме $X_L > X_C$.

2) При $\varphi < 0$ режим работы называется *активно-емкостным*. В этом режиме $X_L < X_C$.

3) При $\varphi = 0$ режим работы называется *режимом резонанса*. В таком режиме $X_L = X_C$.

Различают *резонанс напряжений* в цепи с последовательным соединением катушки и конденсатора и *резонанс токов* в цепи с параллельным соединением катушки и конденсатора.

Характерной особенностью резонанса является то, что он возникает при определенной частоте ω_0 , называемой резонансной частотой цепи. Для

последовательной цепи резонансная частота может быть получена из соотношения:

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C},$$

откуда:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (3.15)$$

Резонансная частота, как видно из (3.15), определяется только параметрами цепи, поэтому она еще называется *собственной* частотой цепи.

Для последовательной цепи при $X_L = X_C > R$ получим $U_L = U_C > U_R = U$, т. е. напряжение на участках с реактивными элементами больше, чем напряжение питания (возможно, во много раз). Значительное перенапряжение на реактивных элементах может привести к аварийным режимам и опасно для обслуживающего персонала. Таким образом, свойства цепи синусоидального тока при резонансе вызывают необходимость соблюдать меры электробезопасности при обслуживании электроустановок.

3.2. Законы и методы расчета линейных электрических цепей синусоидального тока

3.2.1. Законы цепи синусоидального тока для реальных токов и напряжений

Для анализа работы цепей синусоидального тока удобно пользоваться *векторными диаграммами*. Идея данного подхода основана на том, что любая функция $A_m \sin \omega t$ может быть графически изображена в виде вектора, имеющего длину, равную A_m и вращающегося против часовой стрелки с угловой скоростью ω , как показано на рис. 3.2.

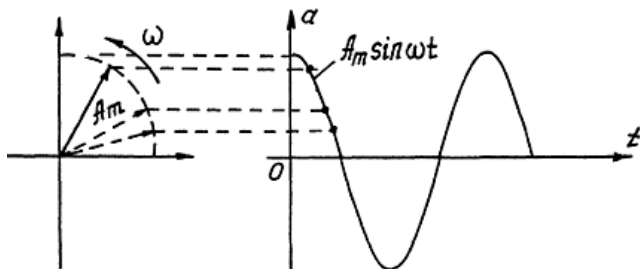


Рис. 3.2. Изображение синусоидальных величин в виде векторов

В каждый момент времени t' проекция вращающегося вектора A_m на ось ординат прямоугольной системы координат совпадает по величине с мгновенным значением синусоидальной функции. Таким образом, для любой цепи синусоидального тока можно построить совокупность векторов, соответствующую токам и напряжениям. Данные векторы будут расположены друг относительно друга в зависимости от углов сдвига фаз.

Т. к. частота всех токов и напряжений цепи одинакова, то эти векторы будут неподвижны друг относительно друга. Таким образом, зная начальные фазы всех токов и напряжений, можно построить неподвижную *векторную диаграмму* цепи. На рис. 3.3 изображена векторная диаграмма для активно-индуктивного режима работы последовательной цепи синусоидального тока.

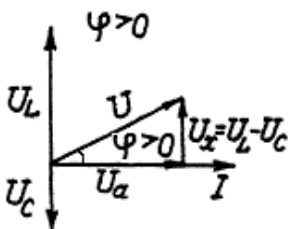


Рис. 3.3. Векторная диаграмма для активно-индуктивного режима

На диаграмме можно выделить прямоугольный *треугольник напряжений*, позволяющий записать расчетные соотношения для действующих или амплитудных значений всех напряжений:

$$\left. \begin{aligned} U_a &= U \cos \varphi; & U_x &= U_L - U_c = U \sin \varphi; \\ U &= \sqrt{U_a^2 + (U_L - U_c)^2}; & \varphi &= \arctg \frac{(U_L - U_c)}{U_a}. \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

Если каждую сторону треугольника напряжений разделить на действующее значение тока, то можно перейти к *треугольнику сопротивлений*:

$$\left. \begin{aligned} R &= z \cos \varphi; & X &= X_L - X_C = z \sin \varphi; \\ z &= \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}; & \varphi &= \arctg \frac{(X_L - X_C)}{R}, \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

где z – *полное сопротивление цепи* синусоидального тока.

Активная мощность цепи синусоидального тока определяется выражением:

$$P = U_a \cdot I = I^2 R = U I \cos \varphi. \quad (3.18)$$

Реактивная мощность:

$$Q = U I \sin \varphi. \quad (3.19)$$

Кроме активной и реактивной мощностей, цепь синусоидального тока характеризуется полной мощностью S – максимально возможной активной мощностью при заданных значениях напряжения U и тока I :

$$S = UI. \quad (3.20)$$

Единица измерения полной мощности – вольт-ампер (В·А).

Отношение активной мощности к полной, численно равное косинусу угла сдвига фаз между током и напряжением, называют *коэффициентом мощности*

$$\cos \varphi = P/S, \quad (3.21)$$

который показывает, какая часть электрической энергии необратимо преобразуется в другие виды и, в частности, используется на выполнение полезной работы. Очевидно, что чем больше $\cos \varphi$ (ближе к единице), тем лучше. Таким образом, необходимо уменьшать величину реактивной мощности цепи, что является одной из актуальных задач современной энергетики и носит название компенсации реактивной мощности.

На основании соотношений (3.16), (3.17) можно установить связь между действующими значениями тока и напряжения на входных зажимах цепи:

$$I = \frac{U}{z}. \quad (3.22)$$

Выражение (3.22) называют *законом Ома для цепи синусоидального тока*.

Таким образом, для цепи синусоидального тока математическое выражение закона Ома с учетом использования полного сопротивления, аналогично выражению для цепи постоянного тока.

Сложнее дело обстоит для законов Кирхгофа, которые для реальных синусоидальных токов, напряжений и ЭДС выполняются только для мгновенных значений этих величин. Становится очевидным, что расчет электрических цепей синусоидального тока классическим методом целесообразно проводить только для самых простых цепей с использованием закона Ома.

3.2.2. Символический метод расчета линейных цепей синусоидального тока

Трудности классического подхода к расчету сложных цепей синусоидального тока привели к созданию символического метода, который основан на использовании *комплексных чисел* для изображения синусоидальных электрических величин, поэтому данный метод еще называют комплексным.

Из математики известно, что комплексное число \underline{A} аналитически можно представить в следующих формах:

- в алгебраической $\underline{A} = a + jb$;
- в тригонометрической $\underline{A} = A \cos \gamma + j A \sin \gamma$;
- в показательной $\underline{A} = A e^{j\gamma}$,

где a , b – вещественная и мнимая части числа \underline{A} ; A , γ – модуль и аргумент числа \underline{A} ; j – мнимая единица ($j = \sqrt{-1}$).

Все формы комплексного числа тождественны. Переход от одной формы к другой осуществляется по формулам:

$$\left. \begin{aligned} A &= \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \gamma = \arctg \frac{b}{a}; \\ a &= A \cos \gamma; \quad b = A \sin \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

Геометрически комплексное число $\underline{A} = Ae^{j\gamma}$ представляется вектором на комплексной плоскости (+j, +1), как показано на рис. 3.4.

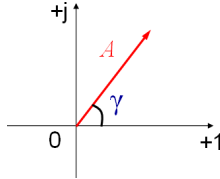


Рис. 3.4. Изображение комплексного числа в виде вектора

Комплексный мгновенный синусоидальный ток есть комплексная величина, модуль и аргумент которой равны соответственно амплитуде и фазе данного синусоидального тока:

$$\dot{i} = I_m e^{j(\omega t + \psi_i)}. \quad (3.24)$$

Комплексная амплитуда синусоидального тока есть комплексная величина, модуль и аргумент которой равны соответственно амплитуде и начальной фазе данного синусоидального тока:

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\psi_i}. \quad (3.25)$$

Комплексный действующий синусоидальный ток есть комплексная величина, модуль и аргумент которой равны соответственно действующему значению и начальной фазе синусоидального тока:

$$\dot{I} = I e^{j\psi_i}. \quad (3.26)$$

В символическом методе используются особенности экспоненциальной функции при вычислении производной и интеграла от нее:

$$\frac{de^{j\omega t}}{dt} = j\omega e^{j\omega t}; \quad \int e^{j\omega t} dt = 1/(j\omega) e^{j\omega t}.$$

Эти свойства позволяют заменить операции дифференцирования и интегрирования синусоидальных функций времени алгебраическими операциями над комплексными функциями.

Рассмотрим последовательную цепь, изображенную на рис. 3.1, для которой справедливо уравнение (3.14). Заменим ток и напряжение их комплексными мгновенными токами и напряжениями. Тогда уравнение (3.14) примет вид:

$$Ri + j\omega Li + \frac{1}{j\omega C}i = \dot{u}. \quad (3.27)$$

Это же уравнение можно записать и в такой форме:

$$\dot{i} = i \cdot \underline{Z}, \quad (3.28)$$

$$\text{где } \underline{Z} = R + j(\omega L - 1/\omega C) = R + j(X_L - X_C). \quad (3.29)$$

По аналогии с классическим методом, величину \underline{Z} называют *полным комплексным сопротивлением* цепи синусоидального тока.

Очевидно, что из (3.28) следует также:

$$i_m = \frac{\dot{U}_m}{\underline{Z}}, \quad (3.30)$$

$$i = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}}. \quad (3.31)$$

Выражения (3.28), (3.30) и (3.31) называют *законом Ома для цепи синусоидального тока в комплексной форме*.

С помощью комплексных токов и напряжений можно также легко рассчитать все виды мощности цепи. Полная комплексная мощность:

$$\dot{S} = \dot{U}i^*, \quad (3.32)$$

где $i^* = Ie^{-j\psi_i}$ – комплексное *сопряженное значение* тока.

Получаем:

$$\dot{S} = Ue^{j\psi_u} \cdot Ie^{-j\psi_i} = UIe^{j(\psi_u - \psi_i)} = UIe^{j\varphi} = UI\cos\varphi + jUI\sin\varphi = P + jQ.$$

Таким образом, уравнение (3.27) стало *алгебраическим уравнением*. Кроме того, анализ формулы (3.29) для цепи с последовательным соединением элементов позволяет сделать вывод об аналогии с эквивалентным сопротивлением участка цепи постоянного тока с последовательным соединением резисторов. Только теперь в качестве «резисторов» выступают элементы с сопротивлениями R , $j\omega L$ и $-j\omega C$. Для еще большей наглядности составим *комплексную схему замещения* исходной цепи, в которой все приемники изобразим в виде резисторов. Для схемы на рис. 3.1 комплексная схема показана на рис. 3.5.

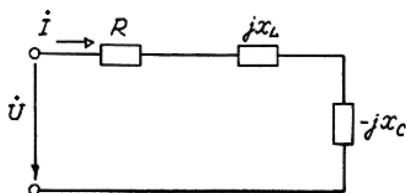


Рис. 3.5. Комплексная схема замещения

При переходе к комплексным изображениям выражение для 1-го закона Кирхгофа принимает вид:

$$\sum i_K = \sum (i_{mK} e^{j(\alpha t + \psi_i)}) = \sum i_{mK} = \sum I_K = 0. \quad (3.33)$$

Аналогично, выражение для 2-го закона Кирхгофа:

$$\sum i_k Z_k = \sum \dot{E}_k . \quad (3.34)$$

Таким образом, переведя условие задачи в комплексную форму и составив комплексную схему замещения, можно с помощью соотношений законов Ома и Кирхгофа в комплексной форме проводить расчет цепей синусоидального тока любой сложности аналогично методам расчета цепей постоянного тока.

3.3. Цепи с взаимной индукцией

3.3.1. Потокосцепление и ЭДС самоиндукции и взаимной индукции. Коэффициент взаимной индукции

До сих пор в цепях переменного тока с индуктивными элементами не учитывались возможные связи этих элементов между собой, а также с индуктивными элементами других цепей посредством магнитного поля. Такие цепи называются *уединенными*. При протекании переменного тока в уединенной катушке создается магнитное поле, линии которого пронизывают витки катушки, причем потокосцепление равно:

$$\Psi = Li.$$

Связанные электрические цепи – электрические цепи, процессы в которых влияют друг на друга посредством общего магнитного поля или общего электрического поля.

Так изменение тока в одном индуктивном элементе может приводить к возникновению ЭДС в другом элементе. Возникающую в этом случае ЭДС называют *ЭДС взаимной индукции*, а про элементы говорят, что они *индуктивно связаны*.

Цепи с взаимной индукцией используются для описания электромагнитных процессов в трансформаторах, электрических машинах, электромагнитных реле и др. Не учитывать явления взаимной индукции при анализе этих устройств нельзя, т. к. именно оно лежит в основе принципа их работы.

Пусть на одном сердечнике размещены две катушки, как показано на рис. 3.6. Обозначим L_1 , L_2 – индуктивности, или точнее *собственные индуктивности* катушек – индуктивности этих катушек, если считать их уединенными.

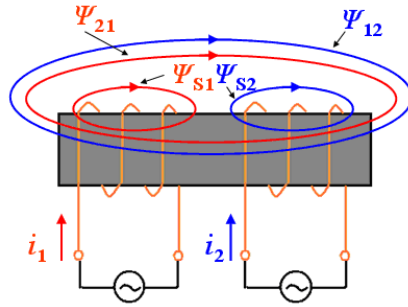


Рис. 3.6. Процессы в индуктивно-связанных катушках

Магнитные процессы при протекании в катушках токов i_1 , i_2 можно описать следующим образом:

– силовые линии магнитного поля, создаваемого током одной из катушек, пронизывающие витки только этой катушки будем характеризовать *потокосцеплением рассеяния*:

$$\psi_{s1} = L_1 i_1; \quad \psi_{s2} = L_2 i_2;$$

– силовые линии магнитного поля, создаваемого током одной из катушек, пронизывающие витки соседней катушки будем характеризовать *потокосцеплением взаимной индукции*:

$$\psi_{12} = M i_2; \quad \psi_{21} = M i_1;$$

где M – взаимная индуктивность элементов (*коэффициент взаимной индукции*), Гн.

Все силовые линии, пронизывающие витки первой катушки, будем характеризовать *потокосцеплением самоиндукции*:

$$\psi_{11} = \psi_{s1} + \psi_{21}.$$

Аналогично, потокосцепление самоиндукции второй катушки:

$$\psi_{22} = \psi_{s2} + \psi_{12}.$$

Зная потокосцепление самоиндукции можно теперь определить ЭДС *самоиндукции* в первой катушке при протекании в ней переменного тока i_1 :

$$e_{11} = -\frac{d\psi_{11}}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt}. \quad (3.35)$$

Во второй катушке при этом будет наводиться ЭДС *взаимной индукции*:

$$e_{21} = -M \frac{di_1}{dt}. \quad (3.36)$$

ЭДС самоиндукции второй катушки:

$$e_{22} = -\frac{d\psi_{22}}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt}. \quad (3.37)$$

В первой катушке при этом будет наводиться ЭДС:

$$e_{12} = -M \frac{di_2}{dt}. \quad (3.38)$$

Очевидно, что потокосцепление самоиндукции каждой катушки с потокосцеплением взаимной индукции (от воздействия тока в соседней катушке) могут иметь либо одно, либо разные направления. С учетом сказанного, полные потокосцепления катушек:

– первой катушки

$$\psi_1 = \psi_{11} \pm \psi_{12}.$$

– второй катушки

$$\psi_2 = \psi_{22} \pm \psi_{21}.$$

Соответственно этому результирующие ЭДС индукции в каждой катушке определяются либо суммой ЭДС самоиндукции и взаимной индукции, либо разностью:

$$e_1 = -\frac{d\Psi_1}{dt} = e_{11} \pm e_{12}; \quad (3.39)$$

$$e_2 = -\frac{d\Psi_2}{dt} = e_{22} \pm e_{21}. \quad (3.40)$$

Степень индуктивной связи двух элементов цепи характеризуется *коэффициентом связи K*, под которым понимают отношение:

$$K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}. \quad (3.41)$$

Очевидно, что $0 \leq K \leq 1$.

3.3.2. Согласное и встречное включение индуктивно-связанных элементов. Расчет цепей с взаимной индукцией

Правильное заключение о том, какой знак ставить перед ЭДС взаимной индукции для данной катушки, можно сделать лишь в том случае, если известно направление намотки каждой катушки на каркасе, а также если выбраны (указаны) условные положительные направления токов в катушках. Для облегчения определения знака перед ЭДС взаимной индукции прибегают к *специальной разметке* зажимов индуктивно связанных катушек, вводя понятие «одноименные зажимы».

Два зажима, принадлежащие двум разным индуктивно-связанным катушкам, называются *одноименными* в том случае, если при одинаковых направлениях токов относительно этих зажимов потокосцепления самоиндукции и взаимной индукции каждой катушки имеют одинаковые направления. В соответствии с ГОСТ одноименные зажимы катушек обозначаются точками, как показано на рис. 3.7.

Правило учета знака перед ЭДС взаимной индукции: при одинаковых направлениях токов по отношению к одноименным зажимам катушек перед членом уравнения, учитывающим ЭДС взаимной индукции (в данной катушке),

ставится тот же знак, что и перед членом уравнения, учитывающим ЭДС самоиндукции в той же катушке.

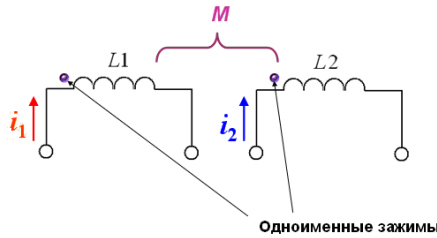


Рис. 3.7. Обозначение одноименных зажимов на принципиальных схемах

При последовательном и параллельном соединении индуктивно связанных катушек различают их согласное или встречное включение. *Согласным* включением двух индуктивно-связанных катушек называется такое их включение, при котором потокосцепления самоиндукции и взаимной индукции для каждой катушки имеют одинаковые направления. При различных направлениях указанных потокосцеплений включение катушек является *встречным*.

Рассмотрим цепь, содержащую две последовательно соединенные индуктивно-связанные катушки, схема замещения которой представлена на рис. 3.8.

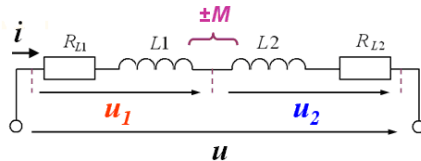


Рис. 3.8. Цепь с последовательным соединением индуктивно-связанных катушек

Имеем:

$$\left. \begin{aligned}
 u &= u_1 + u_2 ; \\
 u_1 &= R_1 i - e_1 = R_1 i - (e_{11} \pm e_{12}) = R_1 i + L_1 \frac{di}{dt} \pm M \frac{di}{dt} ; \\
 u_2 &= R_2 i - e_2 = R_2 i - (e_{22} \pm e_{21}) = R_2 i + L_2 \frac{di}{dt} \pm M \frac{di}{dt} .
 \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

Следовательно, учет взаимной индукции осуществляется введением в уравнения цепи членов, являющихся напряжениями, уравнивающими ЭДС взаимной индукции в соответствующем контуре от токов в соседних контурах. При этом знак перед этими дополнительными слагаемыми зависит от способа включения: при согласном – «плюс», при встречном – «минус».

Подставим 2-е и 3-е уравнение системы (3.42) в 1-е уравнение, после чего сгруппируем все члены уравнения в две группы, относящиеся к каждой из катушек. При согласном включении получаем:

$$\left[R_1 \cdot i + (L_1 + M) \frac{di}{dt} \right] + \left[R_2 \cdot i + (L_2 + M) \frac{di}{dt} \right] = u.$$

В комплексной форме:

$$i[R_1 + j\omega(L_1 + M)] + i[R_2 + j\omega(L_2 + M)] = \dot{U}. \quad (3.43)$$

Обозначим:

$$L'_1 = L_1 + M; \quad L'_2 = L_2 + M; \quad X'_1 = \omega L'_1; \quad X'_2 = \omega L'_2; \\ \underline{Z}'_1 = R_1 + jX'_1; \quad \underline{Z}'_2 = R_2 + jX'_2;$$

где L'_1, L'_2 – эквивалентные индуктивности каждой из катушек при их согласном включении, Гн;

X'_1, X'_2 и $\underline{Z}'_1, \underline{Z}'_2$ – соответственно индуктивные и полные комплексные сопротивления каждой из катушек при их согласном включении, Ом.

Уравнение (3.43) с учетом этих обозначений имеет вид:

$$i\underline{Z}'_1 + i\underline{Z}'_2 = \dot{U},$$

или

$$\begin{aligned} i\underline{Z}'_3 &= \dot{U}; \\ \underline{Z}'_3 &= R_3 + jX'_3 = R_3 + j\omega L'_3; \\ R_3 &= R_1 + R_2; \quad X'_3 = \omega L'_3; \\ L'_3 &= L'_1 + L'_2 = L_1 + L_2 + 2M; \end{aligned} \quad (3.44)$$

где $R_3, X'_3, \underline{Z}'_3$ – соответственно эквивалентные активное, индуктивное и полное комплексное сопротивления цепи при согласном включении катушек, Ом; L'_3 – эквивалентная индуктивность при согласном включении, Гн.

При встречном включении:

$$L''_3 = L_1 + L_2 - 2M. \quad (3.45)$$

Таким образом, эквивалентная индуктивность всей цепи при согласном включении катушек больше, чем при встречном. При последовательном соединении катушек из формул для эквивалентной индуктивности при согласном и встречном включении можно получить:

$$M = \frac{L'_3 - L''_3}{4}. \quad (3.46)$$

Изменения взаимной индуктивности M можно достигнуть, например, путем изменения расстояния между двумя индуктивно связанными катушками.

4. ЦЕПИ НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

4.1. Несинусоидальные периодические токи и их характеристики

4.1.1. Разложение периодических несинусоидальных токов в тригонометрический ряд

Синусоидальная форма кривых напряжения и тока в линейных цепях дает возможность представить эти величины в виде векторов и использовать для анализа цепей векторные диаграммы, а также позволяет применять для расчета цепей символический метод. Однако на практике форма кривых токов и напряжений часто отличается от синусоидальной.

Периодический несинусоидальный ток – электрический ток, изменяющийся во времени по периодическому несинусоидальному закону.

Причинами того, что токи и напряжения в цепи могут быть несинусоидальными, являются:

- применение источников несинусоидальных напряжений;
- наличие нелинейных элементов в цепи с источником синусоидального напряжения;
- влияние на работу цепи электромагнитных помех.

Для расчета цепи несинусоидальный ток необходимо разложить на синусоидальные составляющие – *гармоники*.

Как известно из математики, любая периодическая функция $f(t)$ с периодом T , удовлетворяющая условиям Дирихле (имеющая на любом конечном интервале конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов) может быть разложена в тригонометрический ряд Фурье:

$$f(t) = A_0 + A_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + A_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) + \dots, \quad (4.1)$$

где A_0 – постоянная составляющая; $A_{1m}, A_{2m}, \dots, A_{km}$ – амплитуды составляющих (*гармоник*); $A_{1m} \sin(\omega t + \psi_1)$ – *основная (первая) гармоника*; $A_{km} \sin(k\omega t + \psi_k)$ – k -я гармоника, имеющая частоту в k раз больше частоты основной гармоники; $k = 1, 2, 3, \dots$ – номера гармоник.

Гармоники с номерами $k \geq 2$ называются *высшими*.

Применение представления (4.1) к напряжению источника позволяет построить расчет линейной цепи несинусоидального тока по методу наложения: на первом этапе проводится расчет цепи при условии, что действует только постоянная составляющая напряжения источника методами расчета цепей постоянного тока; затем проводится расчет для каждой гармоники ряда в отдельности – методами расчета цепей синусоидального тока.

4.1.2. Параметры несинусоидальных токов

Несинусоидальные токи и напряжения характеризуются рядом параметров. *Максимальное значение* несинусоидального тока – это наибольшее за период значение тока. *Среднее по модулю значение* несинусоидального тока – среднее значение абсолютной величины тока за период. Это значение определяется выражением:

$$I_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T |i| dt .$$

В случае, когда за период функция не меняет знак, среднее по модулю значение равно постоянной составляющей $I_{cp} = I_0$, как показано на рис. 4.1.

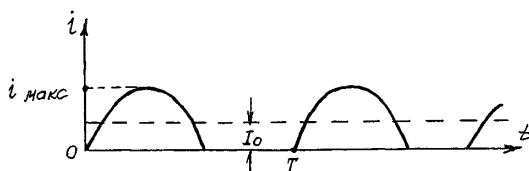


Рис. 4.1. Среднее по модулю значение несинусоидального тока

Большое практическое значение имеет действующее значение несинусоидального тока. С учетом (4.1) среднееквадратичное значение несинусоидального тока за период равно:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [I_0 + I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + \dots + I_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) + \dots]^2 dt} .$$

Можно показать, что из данного выражения следует:

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots + I_k^2 + \dots} . \quad (4.2)$$

Коэффициент амплитуды k_A – это отношение максимального значения тока к его действующему значению:

$$k_A = \frac{I_{\max.}}{I} .$$

Для синусоидального тока коэффициент имеет минимально возможное для периодических токов значение $k_A = \sqrt{2} \approx 1,41$.

Коэффициент формы k_Φ – это есть отношение действующего значения тока к среднему по модулю значению:

$$k_\Phi = \frac{I}{I_{cp}} .$$

Коэффициент искажения $k_{И}$ – это отношение действующего значения первой гармоники к действующему значению всего несинусоидального тока:

$$k_{И} = \frac{I_1}{I}.$$

Для синусоиды $k_{И} = 1$.

Коэффициент гармоник $k_{Г}$ – это отношение действующего значения корня из суммы квадратов высших гармоник к действующему значению основной гармоники:

$$k_{Г} = \frac{\sqrt{\sum_{k=2} I_k^2}}{I_1} \cdot 100\%.$$

Для синусоиды $k_{Г} = 0$. Согласно ГОСТу кривая считается практически синусоидальной, если этот коэффициент не превышает 5 %.

5. ЧЕТЫРЕХПОЛУСНИКИ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ФИЛЬТРЫ

5.1. Расчет цепей с многополюсными элементами

5.1.1. Определение, свойства и параметры четырехполосников

Для цепей переменного тока широкое применение получили методы анализа многополюсных элементов и, прежде всего, четырехполосников.

Четырехполосником называется любая электрическая цепь (часть цепи), позволяющая выделить две пары зажимов (четыре полюса). Примерами четырехполосников служат электрические фильтры, трансформаторы и др.

На рис. 5.1 изображена комплексная схема замещения цепи в виде четырехполосника.

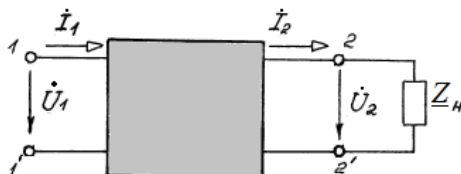


Рис. 5.1. Комплексная схема замещения цепи в виде четырехполосника

Активный четырехполосник содержит в схеме не скомпенсированные источники ЭДС, что вызывает появление на его зажимах электрических напряжений. При отсутствии напряжения на зажимах четырехполосник является *пассивным*. Четырехполосник является *линейным*, если в его внутренней схеме не содержится нелинейных элементов.

Если результат преобразования энергии четырехполосником при смене местами входных и выходных зажимов не изменяется, то такой четырехполосник называется *симметричным*.

Основной смысл теории четырехполосника заключается в том, что с помощью нескольких обобщенных параметров – коэффициентов четырехполосника – можно получить простую связь между напряжениями и токами на входе и выходе четырехполосника. Эта связь выражается в виде двух *основных уравнений* четырехполосника, *A*-форма записи которых имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \underline{A}\dot{U}_2 + \underline{B}\dot{I}_2, \\ \dot{I}_1 &= \underline{C}\dot{U}_2 + \underline{D}\dot{I}_2, \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

где \underline{A} , \underline{B} , \underline{C} , \underline{D} – коэффициенты четырехполюсника (в общем случае – комплексные числа).

Для линейного пассивного четырехполюсника коэффициенты связаны между собой простым соотношением:

$$\underline{A}\underline{D} - \underline{B}\underline{C} = 1. \quad (5.2)$$

Коэффициенты четырехполюсника могут быть определены, например, экспериментальным путем.

5.1.2. Электрические фильтры

Электрическими фильтрами называются четырехполюсники, которые пропускают к приемнику сигнал (ток, напряжение) из всего спектра частот один или нескольких заданных диапазонов частот.

Диапазон частот сигналов, пропускаемых фильтром без затухания, называется *полосой пропускания*; диапазон частот, в котором наблюдается заметное ослабление амплитуды сигнала, называется *полосой затухания*. Частота на границе полос затухания и пропускания называется *частотой среза* f_c .

По характеру полосы пропускания различают фильтры низких частот (ФНЧ) и фильтры высоких частот (ФВЧ), полосовые и заграждающие. Полоса пропускания ФНЧ лежит в диапазоне от 0 до f_c , а ФВЧ – в диапазоне от f_c до ∞ . Для полосового фильтра полоса пропускания – диапазон от f_{c1} до f_{c2} , а для заграждающего фильтра диапазон от f_{c1} до f_{c2} является полосой затухания.

На рис. 5.2 представлена простейшая Г-образная комплексная схема замещения фильтра. Частота среза фильтра определяется из условия равенства продольного сопротивления \underline{Z}_1 и поперечного \underline{Z}_2 .

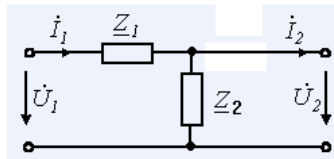


Рис. 5.2. Комплексная схема замещения фильтра

Комплексный коэффициент передачи фильтра:

$$\dot{K}(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{U_2}{U_1} e^{j(\Psi_{U_2} - \Psi_{U_1})} = K(\omega) e^{j\psi(\omega)};$$

где $K(\omega) = \frac{U_2}{U_1}$ – амплитудно-частотная характеристика (АЧХ); $\psi(\omega)$ – фазо-частотная характеристика (ФЧХ).

Для построения фильтров необходимо использовать элементы, параметры которых зависят от частоты – индуктивности и емкости. Широкое применение в схемах выпрямления переменного тока находят сглаживающие ФНЧ, простейшая схема которого показана на рис. 5.3.

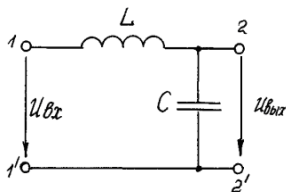


Рис. 5.3. Фильтр низких частот

Частота среза такой схемы определяется выражением:

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (5.3)$$

АЧХ ФНЧ показана на рис. 5.4. Сплошной линией изображена АЧХ идеального фильтра, а пунктирной линией – реального, элементы которого обязательно вносят некоторое ослабление сигнала даже в полосе пропускания (т. е. $K < 1$) и у которого граница между полосами пропускания и затухания определяется на практике по принципу: в полосе пропускания $K > 0,707$.

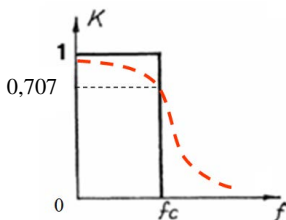


Рис. 5.4. АЧХ фильтра низких частот

При частоте сигнала более нескольких килогерц LC -фильтры из-за своих габаритов и искажения сигнала нелинейной катушкой с ферромагнитным сердечником уступают место безындуктивным RC -фильтрам. Простота и малые геометрические размеры RC -фильтров являются их преимуществами, обеспечивающими достаточно широкое применение, например, в системах электроавтоматики. Однако АЧХ таких фильтров обычно более сильно «размыты» по сравнению с характеристиками LC -фильтров.

6. ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ

6.1. Устройство трехфазных цепей

6.1.1. Трехфазные цепи: основные понятия и определения

Рассмотренные выше цепи переменного тока относятся к так называемым *однофазным* цепям. С точки зрения вопросов преобразования и передачи электроэнергии на большие расстояния такие цепи уступают изобретенным в середине XIX века *многофазным* цепям.

Многофазная система электрических цепей (МСЭЦ) – совокупность электрических цепей, в которых действуют синусоидальные ЭДС одной частоты, сдвинутые друг относительно друга по фазе, создаваемые общим источником энергии.

Фаза – часть МСЭЦ, в которой протекает один из токов многофазной системы токов.

Многофазной цепью называется МСЭЦ, в которой отдельные фазы электрически соединены друг с другом.

На практике наибольшее распространение получили *трехфазные цепи*. Общая теория трехфазных цепей, а также конструкции основных элементов (трехфазного синхронного генератора, трехфазного асинхронного двигателя и др.) были разработаны выдающимся русским ученым и инженером М. О. Доливо-Добровольским.

Трехфазные ЭДС вырабатываются в трехфазных генераторах. Такой генератор состоит из вращающегося *ротора* – электромагнита или постоянного магнита и *статора* с тремя обмотками, оси которых смещены в пространстве на 120° . Концы трех обмоток статора крепятся к зажимам *A* и *X*, *B* и *Y*, *C* и *Z* соответственно, которые также служат для подсоединения внешней цепи.

При вращении ротора создается *вращающееся магнитное поле*, которое по закону электромагнитной индукции создает в обмотках статора ЭДС, которые с учетом описанной выше конструкции будут соответственно сдвинуты друг относительно друга по фазе на 120° . Мгновенные значения ЭДС генератора записываются в виде:

$$\left. \begin{aligned} e_A &= E_{Am} \sin \omega t; \\ e_B &= E_{Bm} \sin(\omega t - 120^\circ); \\ e_C &= E_{Cm} \sin(\omega t - 240^\circ). \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

Выражения (6.1), определяющие порядок достижения трехфазными ЭДС своим максимумом, соответствуют так называемому *прямому порядку чередования фаз (АВС)*. Если поменять местами две любые фазы – *АСВ*, то такой порядок называется *обратным*. Для изменения порядка чередования фаз нужно поменять направление вращения ротора трехфазного генератора.

Если в трехфазной системе ЭДС (напряжений, токов) отдельные ЭДС (напряжения, токи) равны по амплитуде и сдвинуты по фазе относительно друг друга на угол 120° , то такая система обладает свойством: сумма мгновенных значений ЭДС (напряжений, токов) фаз в любой момент времени равна нулю:

$$e_A + e_B + e_C = 0. \quad (6.2)$$

Такие трехфазные системы называются *симметричными*.

6.1.2. Соединения «звездой» и «треугольником»

По способу соединения фаз в трехфазной цепи различают соединение «звездой» и «треугольником».

Для образования соединения «звездой», пример которого показан на рис. 6.2, необходимо выполнить следующее:

- одни концы всех обмоток статора генератора объединить в одну общую точку – *нейтральную точку генератора N*;
- одни концы всех приемников (нагрузки) объединить в одну точку – *нейтральную точку приемника n*;
- нейтральные точки N и n соединить проводом, который называется *нейтральным* (или просто – *нейтралью*);
- другие концы обмоток статора генератора (обозначаемые буквами A, B, C) соединить с концами приемников (a, b, c) проводами, называемыми *линейными* (или просто *линиями*).

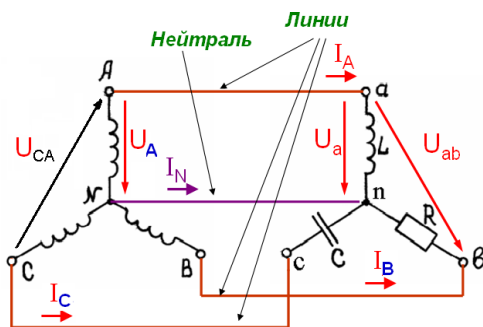


Рис. 6.2. Принципиальная схема трехфазной цепи при соединении «звездой»

Напряжение между двумя любыми линиями в такой цепи называется *линейным напряжением* и обозначается $U_{AB}, U_{BC}, U_{CA}, U_{ab}, U_{bc}, U_{ca}$ или U_L .

Напряжение между любой линией и нейтральным проводом называется *фазным напряжением* и обозначается U_A, U_B, U_C для генератора и U_a, U_b, U_c для приемника или U_ϕ . Из схемы цепи следует, что линейные и фазные напряжения не равны.

Токи в линейных проводах $A-a$, $B-b$, $C-c$ называются *линейными токами* и обозначаются I_A , I_B , I_C или I_L .

Токи в приемниках (на участках цепи $a-n$, $b-n$, $c-n$) называются *фазными токами*, однако, как следует из схемы, они совпадают с линейными и специальных обозначений не требуют.

В соответствии с ГОСТ токоведущие части в трехфазных цепях принято окрашивать в различные цвета: фаза «А» – желтый, фаза «В» – зеленый и фаза «С» – красный.

Для образования соединения «треугольником», показанного на рис. 7.3, необходимо:

- все обмотки статора генератора соединяются между собой последовательно;
- все приемники соединяются между собой последовательно;
- точки соединения обмоток статора (A , B , C) соединяются с точками соединения приемников (a , b , c).

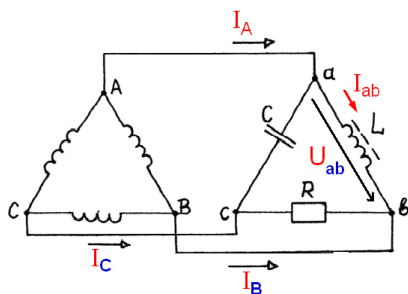


Рис. 6.3. Принципиальная схема цепи при соединении «треугольником»

Токи на участках цепи $a-b$, $b-c$, $c-a$ называются *фазными токами* и обозначаются I_{ab} , I_{bc} , I_{ca} или I_ϕ . Таким образом, при соединении треугольником фазные токи не совпадают по величине с линейными.

Напряжения на приемниках (участках $a-b$, $b-c$, $c-a$) U_{ab} , U_{bc} , U_{ca} в данной схеме совпадают по величине с линейными, и специальных обозначений не требуют.

Часто используется смешанное соединение в трехфазной цепи: генератор обычно соединяют «звездой», а приемник может быть соединен «треугольником».

6.2. Режимы работы трехфазных цепей

6.2.1. Свойства трехфазных цепей в симметричном режиме

Трехфазный приемник называют *симметричным*, если комплексные сопротивления всех фаз одинаковы, например:

$$\underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c.$$

Т. е. у симметричного приемника одинаковые качественные (характер – активный, индуктивный, емкостный и т. д.) и количественные (величины R , L , C) параметры у всех фаз.

Если к симметричному трехфазной приемнику приложена симметричная система напряжений, то, как следствие, получается симметричная система токов. При этом такой *режим* работы цепи также называется *симметричным*.

В симметричном режиме равны между собой по величине все фазные токи, все линейные токи, все фазные напряжения и все линейные напряжения. Следствием этого будет также $U_N = 0$, $I_N = 0$.

Комплексная схема замещения цепи при соединении «звездой» показана на рис. 6.4.

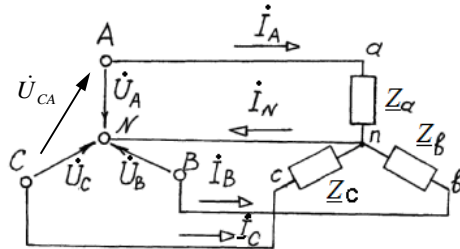


Рис. 6.4. Комплексная схема замещения при соединении «звездой»

Для действующих значений электрических величин в этой схеме справедливы следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{AB} &= \dot{U}_A - \dot{U}_B; \\ \dot{U}_{BC} &= \dot{U}_B - \dot{U}_C; \\ \dot{U}_{CA} &= \dot{U}_C - \dot{U}_A, \end{aligned} \right\}$$

где $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$ – комплексные фазные напряжения генератора; $\dot{U}_{AB}, \dot{U}_{BC}, \dot{U}_{CA}$ – комплексные линейные напряжения генератора.

Векторная диаграмма для схемы «звезда», работающей в симметричном режиме, приведена на рис. 6.5.

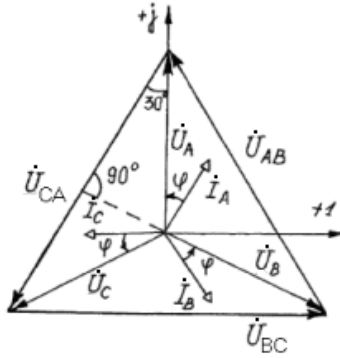


Рис. 6.5. Векторная диаграмма при соединении звездой в симметричном режиме

Как видно из рис. 6.5, с учетом свойств равнобедренного и прямоугольного треугольников:

$$U_{CA} = U_{л} = 2U_A \cos 30^\circ = 2U_\phi \cos 30^\circ = 2U_\phi \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}U_\phi.$$

Таким образом, линейное и фазное напряжения в схеме «звезда» в симметричном режиме связаны соотношением:

$$U_{л} = \sqrt{3} U_\phi. \quad (6.3)$$

Мощность, потребляемая всей цепью, может быть в симметричном режиме определена как утроенная мощность, потребляемая одной фазой:

$$P = 3 P_\phi. \quad (6.4)$$

Векторная диаграмма для схемы «треугольник», работающей в симметричном режиме, приведена на рис. 6.6.

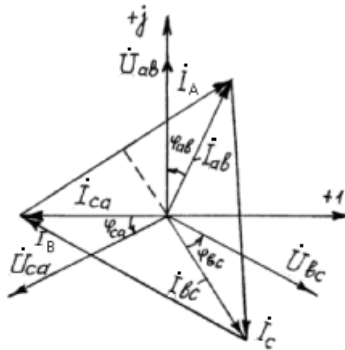


Рис. 6.6. Векторная диаграмма при соединении треугольником в симметричном режиме

Как видно из диаграммы:

$$I_A = I_{II} = 2I_{av} \cos 30^\circ = 2I_\phi \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}I_\phi.$$

Таким образом, линейные и фазные токи в схеме «треугольник» в симметричном режиме связаны соотношением:

$$I_{II} = \sqrt{3}I_\phi. \quad (6.5)$$

Мощность, потребляемая цепью, определяется выражением (6.4).

6.2.2. Свойства трехфазных цепей в несимметричном режиме

Анализ работы трехфазной цепи в несимметричном режиме является сложной задачей. Трехфазная цепь представляет собой сложную электрическую цепь, для расчета которой можно применять соответствующие методы. В схеме «звезда» два узла N и n , поэтому для ее анализа можно применить метод узловых напряжений.

При $Z_a \neq Z_b \neq Z_c$ и *отсутствии нейтрального провода* между узлами N и приемника n возникает напряжение, определяемое исходя из схемы на рис. 6.4 (в ней будет три ветви) выражением:

$$\dot{U}_N = \frac{\dot{U}_A / Z_a + \dot{U}_B / Z_b + \dot{U}_C / Z_c}{1/Z_a + 1/Z_b + 1/Z_c}. \quad (6.6)$$

На рис. 6.7 показана векторная диаграмма цепи для данного случая. При наличии напряжения U_N напряжения на приемниках не составляют симметричной системы, не равны по величине и могут существенно отличаться от номинальных как в меньшую, так и в большую сторону. Т. е. какой-то приемник в результате может не работать, а другой и вовсе может выйти из строя.

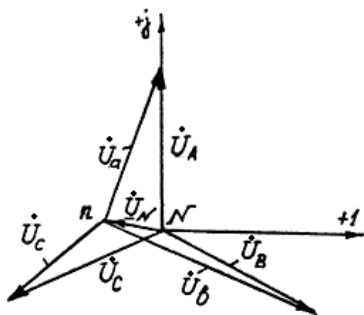


Рис. 6.7. Векторная диаграмма цепи «звезда» в несимметричном режиме при отсутствии нейтрального провода

При наличии нейтрального провода в цепи становится четыре ветви и напряжение U_N определяется следующим выражением:

$$\dot{U}_N = \frac{\dot{U}_A / \underline{Z}_a + \dot{U}_B / \underline{Z}_b + \dot{U}_C / \underline{Z}_c}{1 / \underline{Z}_a + 1 / \underline{Z}_b + 1 / \underline{Z}_c + 1 / \underline{Z}_N}, \quad (6.7)$$

где \underline{Z}_N – комплексное сопротивление нейтрали.

Если сопротивление нейтрального провода мало, то обратная величина $1/\underline{Z}_N$ велика. Таким образом, мало и напряжение U_N . При этом система фазных напряжений на приемнике близка к симметричной системе. С практической точки зрения наличие нейтрального провода обеспечивает то, что будет наблюдаться эффект *выравнивания величин напряжений на приемниках*.

Величина тока в нейтральном проводе определяется выражением:

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C. \quad (6.8)$$

Активная мощность, потребляемая всей цепью при несимметричной нагрузке, определяется выражением:

$$P = P_a + P_b + P_c.$$

7. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

7.1. Понятие о переходных процессах в электрических цепях

7.1.1. Основные понятия и определения теории переходных процессов. Законы коммутации

Режим работы электрической цепи – это состояние цепи в данный момент или интервал времени, характеризующееся конкретными значениями параметров и законами изменения электрических величин.

Установившийся режим – режим, при котором ЭДС, напряжения и токи в цепи являются постоянными или периодическими.

Переходный режим (процесс) – электромагнитный процесс, возникающий в цепи при переходе от одного установившегося режима к другому.

Коммутацией цепи называется совокупность причин, вызывающих изменение условий работы цепи и ее переход от одного установившегося режима к другому.

Примеры коммутации:

- подключение цепи к источнику питания;
- отключение цепи от питающей сети;
- резкое изменение параметров (R , L , C) цепи (например, в результате обрывов или коротких замыканий и др.).

При исследовании переходных процессов начало отсчета времени берется от момента коммутации ($t = 0$). Момент времени непосредственно перед мгновенной коммутацией обозначается « 0_- », а сразу после мгновенной коммутации « 0_+ ».

Переходные процессы в электрических цепях подчиняются двум законам коммутации.

Первый закон коммутации гласит: в любой ветви с индуктивностью ток и потокосцепление в момент коммутации сохраняют те же значения, которые они имели непосредственно перед коммутацией, и далее начинают изменяться именно с этих значений:

$$\left. \begin{aligned} i(0_-) &= i(0) = i(0_+); \\ \Psi(0_-) &= \Psi(0) = \Psi(0_+). \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

Действительно, напряжение на индуктивности определяется выражением:

$$u = L \frac{di}{dt}.$$

Если допустить, что в момент коммутации ток в индуктивности изменяется скачком, то напряжение будет бесконечно большим, что невозможно.

Второй закон коммутации гласит: в любой ветви с емкостью напряжение на емкости и электрический заряд в момент коммутации сохраняют те же значения, которые они имели непосредственно перед коммутацией, и далее начинают изменяться именно с этих значений:

$$\left. \begin{aligned} u_C(0.) = u_C(0) = u_C(0_+); \\ q(0.) = q(0) = q(0_+). \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

Действительно, ток в емкостном элементе определяется выражением:

$$i = C \frac{du}{dt}.$$

Если допустить, что в момент коммутации напряжение на емкостном элементе изменяется скачком, то ток будет бесконечно большим, что также невозможно.

С точки зрения физического смысла невозможность мгновенного изменения тока или напряжения объясняется невозможностью скачкообразного изменения запасенной в индуктивном и емкостном элементах энергии.

7.1.2. Классический метод расчета переходных процессов. Постоянная времени цепи

Пусть в условный момент $t = 0$ к источнику постоянного напряжения U подключается катушка с известными параметрами – активным сопротивлением R_L и индуктивностью L .

Будем считать, что до подключения ток в цепи отсутствовал. Определим ток в данной цепи в момент коммутации, в установившемся режиме и в ходе переходного процесса. Составляем схему замещения цепи после коммутации, как показано на рис. 7.1.

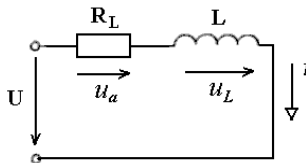


Рис. 7.1. Схема замещения цепи после коммутации

Определяем начальные условия. До подключения ток отсутствовал, т. е. $i(0.) = 0$. По 1-му закону коммутации:

$$i(0) = i(0_+) = 0.$$

Составляем систему уравнений цепи по законам Ома и Кирхгофа. Для данного примера:

$$\left. \begin{aligned} u_a + u_L &= U; \\ u_a &= R_L i; \\ u_L &= L \frac{di}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

Эта система сводится к одному неоднородному дифференциальному уравнению:

$$R_L i + L \frac{di}{dt} = U. \quad (7.4)$$

Решение данного уравнения – *переходный ток* i – может быть представлено в виде суммы двух слагаемых:

$$i = i_y + i_{св}. \quad (7.5)$$

где i_y – установившийся ток; $i_{св}$ – свободный ток.

Установившийся ток – периодический или постоянный электрический ток, устанавливающийся в электрической цепи после окончания переходного процесса. Его существование обусловлено энергией подключенного к цепи источника.

Для рассматриваемого примера установившийся ток есть постоянный ток по окончании переходного процесса, т. е.:

$$i_y = I = U/R.$$

С другой стороны, в математике i_y есть *частное решение* неоднородного уравнения (6.4), которое при подстановке обращается в тождество:

$$\cancel{R_L} \cdot \frac{U}{\cancel{R_L}} + L \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{U}{R_L} \right)}_{=0} = U; \quad U \equiv U.$$

Свободный ток – электрический ток, равный разности переходного и установившегося токов, он существует в цепи только в течение времени переходного процесса и обусловлен запасом энергии в реактивных элементах при отключенных источниках электроэнергии.

По мере уменьшения этого запаса вследствие превращения энергии электромагнитного поля в тепло на активных сопротивлениях цепи уменьшается и исчезает свободный ток. С другой стороны, составляющая $i_{св}$ есть решение однородного уравнения:

$$R_L i_{св} + L \frac{di_{св}}{dt} = 0.$$

Общее решение таких уравнений имеет вид:

$$i_{св} = A e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (7.6)$$

где A – постоянная интегрирования.

$$\tau = L/R - \text{постоянная времени } RL\text{-цепи, с.} \quad (7.7)$$

Функция переходного тока с учетом найденных i_y и $i_{св}$ имеет вид:

$$i = \frac{U}{R_L} + A e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Постоянная интегрирования A определяется из начального условия:

$$i(0) = \frac{U}{R_L} + A e^{-\frac{0}{\tau}} = 0.$$

Отсюда:

$$A = -\frac{U}{R_L}. \quad (7.8)$$

Следовательно, функции свободного и переходного токов примут вид:

$$i_{св} = -\frac{U}{R_L} e^{-\frac{t}{\tau}}; \quad (7.9)$$

$$i = \frac{U}{R_L} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}); \quad (7.10)$$

График тока (7.10) показан на рис. 7.2.

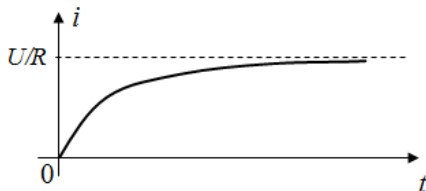


Рис. 7.2. Переходный ток при подключении RL -цепи к источнику постоянного напряжения

Постоянная времени цепи в соответствии с ГОСТ определяется как величина, характеризующая электрическую цепь, в которой свободный ток является экспоненциальной функцией времени, равная интервалу времени, в течение которого этот ток убывает в e раз (где $e = 2,718\dots$ — основание натурального логарифма).

Согласно (7.9) при $t = \tau$

$$i_{св}(\tau) = -\frac{U}{R_L} e^{-\frac{\tau}{\tau}} = -\frac{U}{R_L} e^{-1} \approx -0,37 \cdot \frac{U}{R_L}.$$

За то же самое время переходный ток в цепи $i = I + i_{св}$ достигнет значения:

$$i(\tau) = 0,63 \cdot \frac{U}{R_L}.$$

Обычно на практике длительность переходного процесса в цепи оценивают с помощью τ следующим соотношением:

$$t_{п.п} \approx (3\dots 5) \tau.$$

Для RC -цепи постоянная времени:

$$\tau_C = RC. \quad (7.11)$$

Графики переходных процессов при подключении RC -цепи к источнику постоянного напряжения показаны на рис. 7.3. Таким образом, в ходе переходных процессов в цепях с одним накопителем энергии (1-го порядка) — катушкой или конденсатором — токи и напряжения изменяются по экспоненциальным законам.

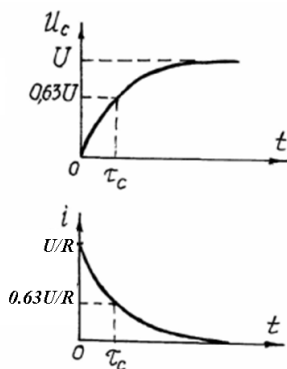


Рис. 7.3. Переходные токи и напряжения при заряде конденсатора

Для цепей более высокого порядка, которые чаще всего и встречаются на практике, решение задачи резко усложняется в связи с необходимостью решать неоднородное дифференциальное уравнение соответствующего порядка.

7.2. Операторный метод расчета переходных процессов

7.2.1. Применение преобразования Лапласа к анализу цепей

Для расчета переходных процессов в линейных цепях высокого порядка применяется символический *операторный метод*. Он основан на известном способе интегрирования линейных дифференциальных уравнений с помощью *преобразования Лапласа*. Сущность метода заключается в том, что функциям переходных токов, напряжений и ЭДС $i(t)$, $u(t)$, $e(t)$, называемым *оригиналами*, ставят в соответствие функции $I(p)$, $U(p)$, $E(p)$ некоторого параметра p , называемые *изображениями* исходных функций. Указанное сопоставление производится по формуле прямого преобразования Лапласа:

$$I(p) = \int_0^{\infty} i(t) e^{-pt} dt. \quad (7.12)$$

Соответствие между $I(p)$ и $i(t)$ в краткой форме записывается в виде:

$$I(p) = L\{i(t); p\}.$$

Отметим свойства преобразования Лапласа, которые используются при расчете переходных процессов.

А. Теорема о сложении:

$$L\{a_1 i_1(t) + a_2 i_2(t); p\} = a_1 L\{i_1(t); p\} + a_2 L\{i_2(t); p\}, \quad (7.13)$$

где a_1 , a_2 – постоянные коэффициенты.

Б. Теорема об интегрировании:

$$L\left\{\int_0^t i(t)dt; p\right\} = \frac{1}{p}I(p). \quad (7.14)$$

В. Теорема о дифференцировании:

$$L\left\{\frac{di(t)}{dt}; p\right\} = pI(p) - i(0), \quad (7.15)$$

где $i(0)$ – в электротехнике – значение тока в момент коммутации.

С помощью (7.12), учитывая свойства (7.13) – (7.15), получим соотношения между операторными напряжениями и токами для резистивного, индуктивного и емкостного элементов.

Изображение напряжения $u_a(t) = Ri(t)$ на резистивном элементе

$$U_a(p) = L\{Ri(t); p\} = RI(p). \quad (7.16)$$

Напряжение на индуктивности определяется выражением:

$$u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}.$$

Изображение напряжения на индуктивном элементе:

$$U_L(p) = L\{L\frac{di(t)}{dt}; p\} = LpI(p) - Li(0). \quad (7.17)$$

Напряжение на емкостном элементе:

$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt = u_C(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt.$$

Тогда изображение напряжения на емкостном элементе:

$$U_C(p) = L\left\{\frac{1}{C}\int i(t)dt; p\right\} = \frac{1}{pC}I(p) + \frac{u_C(0)}{p}. \quad (7.18)$$

Рассмотрим последовательную RLC -цепь, подключаемую к источнику постоянного напряжения U . Уравнение для изображений будет иметь вид:

$$RI(p) + LpI(p) - Li(0) + \frac{1}{pC}I(p) + \frac{u_C(0)}{p} = \frac{U}{p}. \quad (7.19)$$

Таким образом, получено алгебраическое уравнение относительно операторного тока $I(p)$. Следовательно, замена реальных переходных токов и напряжений их изображениями (подобно той, которая осуществляется при расчете цепей синусоидального тока в установившихся режимах символическим методом) приводит к алгебраизации дифференциальных уравнений цепи, отражающих законы Ома и Кирхгофа.

7.2.2. Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме

Выразим из (7.19) операторный ток $I(p)$:

$$I(p) = \frac{\frac{U}{p} + Li(0) - \frac{u_C(0)}{p}}{R + Lp + \frac{1}{pC}} = \frac{U + Li(0)p - u_C(0)}{Z(p)}, \quad (7.20)$$

$$\text{где } Z(p) = R + Lp + 1/(pC). \quad (7.21)$$

Величина $Z(p)$ называется *полным операторным сопротивлением* цепи.

Уравнение (7.21) называется *законом Ома в операторной форме* при ненулевых начальных условиях, т. е. если $i(0) \neq 0$, $u_c(0) \neq 0$.

Слагаемое $L \cdot i(0)$ в числителе (6.20) представляет собой ЭДС, обусловленную запасом энергии магнитного поля в индуктивной катушке вследствие протекания через нее тока $i(0)$. Слагаемое $u_c(0) / p$ представляет собой ЭДС, обусловленную запасом энергии электрического поля в конденсаторе вследствие наличия на нем напряжения $u_c(0)$.

Заметим, что структура полного операторного сопротивления цепи (7.21) аналогична структуре полного комплексного сопротивления той же цепи, если p заменить на $j\omega$. Таким образом, снова можно сделать вывод об аналогии с нахождением эквивалентного сопротивления участка цепи постоянного тока с последовательным соединением резисторов. Только теперь в качестве «резисторов» выступают элементы с сопротивлениями R , pL и $1 / pC$. Нетрудно показать, что для параллельного соединения принцип нахождения операторного сопротивления аналогичен цепи постоянного тока.

Для еще большей наглядности составим *операторную схему замещения цепи*. Схема, описываемая уравнением (7.20), изображена на рис. 7.4.

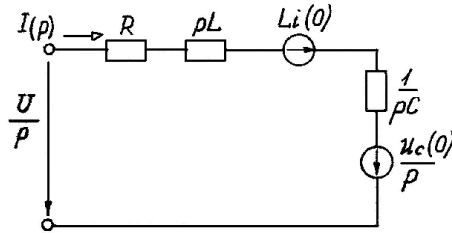


Рис. 7.4. Операторная схема замещения цепи

В общем случае закон Ома при нулевых начальных условиях имеет вид:

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)}. \quad (7.22)$$

Для расчета переходных процессов в сложных цепях необходимо составлять уравнения по законам Кирхгофа. Рассмотрим уравнение по первому закону Кирхгофа для некоторого узла, в котором сходятся токи i_1, \dots, i_k :

$$\sum i_k = 0.$$

Применяя преобразование Лапласа к этому выражению, получим *первый закон Кирхгофа в операторной форме*:

$$L\{\sum i_k(t); p\} = \sum L\{i_k(t); p\} = \sum I_k(p) = 0. \quad (7.23)$$

Для некоторого контура электрической цепи, содержащего элементы с $R_1, \dots, R_k, L_1, \dots, L_k, C_1, \dots, C_k$, в ветвях которого протекают токи i_1, \dots, i_k и действуют ЭДС e_1, \dots, e_k , получаем:

$$\sum E_k(p) = \sum [I_k(p)Z_k(p) - L_k i_k(0) + \frac{u_{ck}(0)}{p}], \quad (7.24)$$

где $Z_k(p) = R_k + L_k p + 1 / (pC_k)$.

Уравнение (7.24) выражает собой *второй закон Кирхгофа в операторной форме* при ненулевых начальных условиях. При нулевых начальных условиях уравнение принимает вид:

$$\sum E_k(p) = \sum I_k(p)Z_k(p). \quad (7.25)$$

Используя законы Ома и Кирхгофа в операторной форме и методы расчета цепей постоянного тока (метод контурных токов и др.), можно найти изображение искомых переходных токов или напряжений. Затем возникает обратная задача операторного метода – найти по известному изображению соответствующий ему оригинал. Реальные переходные токи и напряжения (оригиналы) определяются по найденным изображениям различными способами, например, с помощью теоремы разложения или обратного преобразования Лапласа.

8. ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

8.1. Основные понятия, определения и свойства цепей с распределенными параметрами

8.1.1. Понятие о длинных линиях. Токи и напряжения в длинных линиях. Уравнения однородной линии

Если при описании электрических цепей такие параметры, как сопротивления, индуктивности и емкости относятся к конкретной точке цепи – идеальному резистору, катушке или конденсатору, то речь идет о цепях с *сосредоточенными параметрами*. Такая модель не годится для многих практически важных ситуаций, например, для анализа линий электропередачи (ЛЭП) большой длины (до десятков и сотен километров), телефонных и телеграфных линий, антенно-фидерных систем и высокочастотных трансформаторов и др.

Особенностью протяженных ЛЭП является *волновой характер* передачи электромагнитной энергии в пространстве вдоль линии. При этом существенную роль играет частота электромагнитной волны f , определяющая длину волны λ – именно на расстоянии вдоль линии, равном λ , завершается полный цикл изменения характеристик волны в пространстве.

Модель, используемая для описания электромагнитных процессов в таких объектах, называется *цепью с распределенными параметрами* или *длинными линиями* (ДЛ). В таких электрических цепях параметры распределены вдоль линии на всем ее протяжении.

Критерием, который определяет рассмотрение электротехнического устройства как цепи с распределенными параметрами, является длина волны:

$$\lambda = \frac{v}{f}, \quad (8.1)$$

где v – скорость распространения электромагнитной волны, км/с; f – частота электромагнитной волны, Гц.

В реальной ЛЭП длиной l нужно учитывать ее главные параметры, распределенные по всей длине: активное сопротивление R_l и индуктивность L_l проводов (*продольные* параметры), а также активную проводимость изоляции g_l для токов утечки и емкость C_l между проводами (*поперечные* параметры).

Если условно ДЛ разбить на ряд последовательных участков длиной Δx , линия будет рассматриваться как каскадная схема, составленная из ее отдельных отрезков – четырехполюсников. В каждом таком четырехполюснике имеются свои сосредоточенные параметры R_k , g_k , L_k , C_k . В общем случае однотипные параметры линии на одинаковых по длине участках не одинаковы ($R_1 \neq R_2$, $g_1 \neq g_2$, и т. д.). Такая линия является *неоднородной* ДЛ.

Если параметры ДЛ равномерно распределены вдоль линии, такая линия называется *однородной* ДЛ. Параметры однородной линии (индуктивность L_0 , емкость C_0 , активное сопротивление R_0 и активная проводимость g_0) относят к единице длинной линии (1 м, 1 км). Параметры L_0 , C_0 , R_0 , g_0 называются *первичными параметрами* однородной ДЛ.

Если токи утечки малы, а сопротивление проводов на всех участках также малы, то активными параметрами линии можно пренебречь ($g_0 = 0$, $R_0 = 0$). Такая ДЛ называется *линией без потерь*.

Схема замещения однородной ДЛ показана на рис. 8.1. Линия представлена как цепная схема с бесконечно большим числом элементарных четырехполюсников с сосредоточенными в пределах каждого четырехполюсника параметрами $r_0 dx$, $L_0 dx$, $C_0 dx$, $g_0 dx$. Падение напряжения на продольной ветви элементарного четырехполюсника du учитывается со знаком «минус», если отсчет ведется *от начала* линии, т. к. на следующем элементарном четырехполюснике напряжение уже меньше в тот же момент времени на du . Если же отсчет ведется от конца линии, как и показано на рисунке, то падение напряжения учитывается со знаком «плюс».

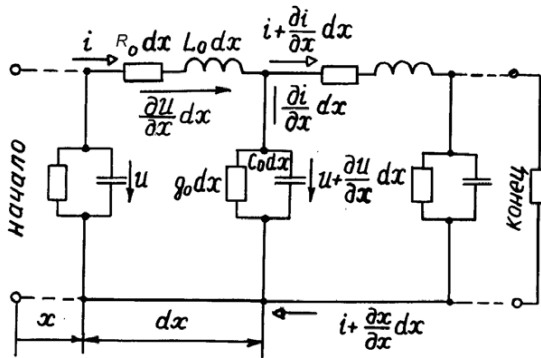


Рис. 8.1. Схема замещения однородной длинной линии

Аналогично обстоит дело и с учетом приращения тока. Изменение мгновенных значений напряжения и тока на участке dx однородной линии описывается дифференциальными уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= R_0 i + L_0 \cdot \frac{\partial i}{\partial t}; \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= g_0 u + C_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

Уравнения (8.2) показывают, что напряжение и ток в линии зависят от двух переменных: времени и координаты по длине линии.

8.1.2. Вторичные параметры однородной линии. Прямая и обратная волны. Коэффициент отражения

Рассмотрим важный случай гармонического (синусоидального) входного воздействия на линию. Комплексные параметры линии:

$$\underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0; \underline{Y}_0 = g_0 + j\omega C_0,$$

где \underline{Z}_0 – продольное комплексное сопротивление единицы длины линии, Ом/м; \underline{Y}_0 – поперечная комплексная проводимость единицы длины линии, См/м.

Комплексная схема замещения однородной линии изображена на рис. 8.2.

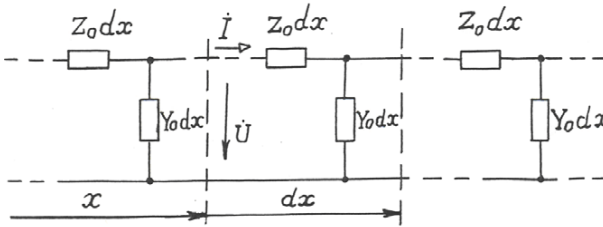


Рис. 8.2. Комплексная схема замещения однородной длинной линии

Система (8.2) при переходе к действующим комплексным напряжениям и токам принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d\dot{U}}{dx} &= (R_0 + j\omega L_0)\dot{i} = \underline{Z}_0 \dot{i}; \\ -\frac{d\dot{i}}{dx} &= (g_0 + j\omega C_0)\dot{U} = \underline{Y}_0 \dot{U}. \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

В (8.3) действующее напряжение и ток от времени t не зависят и являются функциями только расстояния x . Исключив из системы (8.3) ток, получаем уравнение только с искомым напряжением:

$$\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} = \underline{Z}_0 \underline{Y}_0 \dot{U} = \gamma^2 \dot{U}, \quad (8.4)$$

где γ – коэффициент распространения:

$$\gamma = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(g_0 + j\omega C_0)}. \quad (8.5)$$

Если представить коэффициент распространения в алгебраической форме комплексного числа, то получим:

$$\gamma = \alpha + j\beta, \quad (8.6)$$

где α – коэффициент затухания на единицу длины линии, дБ/м; β – коэффициент фазы на единицу длины, рад/м.

Общее решение (8.4) имеет вид:

$$\dot{U} = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x}, \quad (8.7)$$

где A_1 и A_2 – постоянные интегрирования.

С учетом (8.7) комплексный ток:

$$\dot{i} = \frac{1}{Z_B} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}), \quad (8.8)$$

$$\text{где } Z_B = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}} - \text{волновое сопротивление.} \quad (8.9)$$

Комплексные действующие напряжения и ток запишем в виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= A_1 e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} + A_2 e^{\alpha x} e^{j\beta x} = \dot{U}' + \dot{U}''; \\ \dot{i} &= \frac{A_1 e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}}{Z_B} - \frac{A_2 e^{\alpha x} e^{j\beta x}}{Z_B} = \dot{i}' - \dot{i}'' \end{aligned} \right\}$$

Данные уравнения отражают волновой характер процессов во времени и пространстве (вдоль линии). Волны напряжения и тока (u , i) в совокупности составляют *бегущую электромагнитную волну*, которая состоит, в свою очередь, из *падающей (прямой)* и *отраженной (обратной)* волн.

Падающая электромагнитная волна – это процесс перемещения волны от источника к приемнику электрической энергии, т. е. в направлении увеличения координаты x . *Отраженная* электромагнитная волна – это процесс перемещения волны от приемника к источнику энергии (в сторону уменьшения координаты x). Амплитуда волны напряжения (тока) в процессе движения волны убывает по экспоненте.

Скорость перемещения волны (ее фазы) или *фазовая скорость* определяется формулой:

$$v = \frac{\omega}{\beta}. \quad (8.10)$$

В общем случае амплитуды падающей и отраженной волн в каждой точке неодинаковы. В точке, где прямая и обратная волны находятся в противофазе, результирующая бегущая волна напряжения имеет U_{\min} . В точках линии, где прямая и обратная волны оказываются в фазе, возникает U_{\max} .

Коэффициентом бегущей волны $K_{Б.В.}$ называют отношение минимума напряжения волны к ее максимуму:

$$K_{Б.В.} = \frac{U_{\min}}{U_{\max}}. \quad (8.11)$$

Коэффициентом отражения по напряжению называют отношение напряжения отраженной в конце линии волны к напряжению падающей волны также в конце линии.

$$K_{\text{отр}} = \frac{U_{\text{мо}} e^{\gamma l}}{U_{\text{мп}} e^{-\gamma l}} = \frac{Z_2 - Z_B}{Z_2 + Z_B}, \quad (8.12)$$

где $Z_2 = Z_{\text{н}}$ – сопротивление приемника электрической энергии.

Отметим, что если падающая и отраженная волны имеют одинаковые амплитуды и во времени изменяются с одинаковой интенсивностью, то результирующая волна в пространстве не перемещается, т. е. является *стоячей волной*, образуя в отдельных точках линии пучности и узлы.

8.2. Линия без потерь. Зависимость работы линии от нагрузки

8.2.1. Линии без искажений и без потерь. Связь первичных и вторичных параметров линии без потерь

Неискаженной передачей сигнала называется такая передача, при которой форма сигнала на входе и на выходе линии одинакова. В реальной линии неодинаковое затухание сигнала на различных частотах создает так называемые *амплитудные* искажения, а неодинаковая скорость распространения волн на различных частотах приводит к *фазовым* искажениям сигнала.

Для неискаженной передачи требуется выполнить два условия:

- обеспечить независимость коэффициента α от частоты;
- обеспечить пропорциональное частоте изменение коэффициента β .

Фазовая скорость $v = \omega / \beta$ становится независимой от частоты ω .

Эти условия обеспечиваются при соотношении параметров линии:

$$\frac{L_0}{R_0} = \frac{C_0}{g_0} \quad \text{или} \quad \frac{L_0}{C_0} = \frac{R_0}{g_0}. \quad (8.13)$$

ДЛ, удовлетворяющая условию (8.13), называется *линией без искажения*.

Волновое сопротивление линии без искажений – действительное число (активное сопротивление), не зависящее от частоты:

$$\underline{Z}_B = z_B = \rho = \sqrt{\frac{r_0}{g_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}.$$

Фазовая скорость такой линии постоянна:

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}.$$

На практике выполнить условие (8.13) сложно, т. к. в реальных линиях:

$$\frac{L_0}{R_0} \ll \frac{C_0}{g_0}.$$

Рассмотрим *линию без потерь*, в которой $g_0 = 0$, $R_0 = 0$.

Имеем:

$$\left. \begin{aligned} \underline{Z}_B &= \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = z_B = \rho; \\ \rho &= \omega \sqrt{L_0 C_0}; \quad \underline{\gamma} = j\beta; \quad \alpha = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.14)$$

Поскольку затухание отсутствует ($\alpha = 0$), электромагнитная волна распространяется вдоль линии со скоростью:

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}. \quad (8.15)$$

Следовательно, волновое сопротивление и фазовая скорость не зависят от частоты, а волновое сопротивление является активным ($\rho = R_0$).

Для линии без потерь уравнения ДЛ записываются в тригонометрических функциях при отсчете от начала линии:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_1 \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x - j \dot{I}_1 \cdot Z_B \cdot \sin \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x; \\ \dot{I} &= \dot{I}_1 \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x - j \frac{\dot{U}_1}{Z_B} \cdot \sin \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x. \end{aligned} \right\} \quad (8.16)$$

Данные уравнения используются для определения напряжения и тока в любой точке линии при известных (заданных) значениях напряжения, тока и сопротивления на входе линии.

8.2.2. Режимы работы линии без потерь

В режиме согласованной нагрузки уравнения (8.16) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} = \dot{U}_1 = \text{const}; \quad \dot{I} = \dot{I}_1 = \text{const}; \\ Z_{\text{вх}} = Z_1 = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = Z_2 = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = Z_B = \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (8.18)$$

Коэффициент отражения при $Z_2 = Z_B$ оказывается равным нулю.

Таким образом, в рассматриваемом режиме отсутствуют отраженные волны и наблюдается постоянство действующих значений этих величин и значения входного сопротивления линии.

В режиме холостого хода уравнения линии запишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_1 \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x; \\ \dot{I} &= -j \frac{\dot{U}_1}{Z_B} \cdot \sin \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x. \end{aligned} \right\} \quad (8.19)$$

Графики распределения действующих значений тока и напряжения вдоль линии представлены на рис. 8.3.

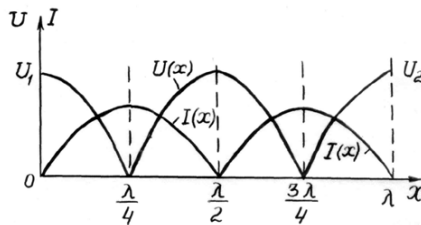


Рис. 8.3. Распределение напряжения и тока вдоль линии в режиме холостого хода

При холостом ходе коэффициент отражения $K_{\text{отр}} = 1$, т. е. прямая и обратная волны одинаковы, неподвижны в пространстве и образуют стоячую волну тока и напряжения. Пучности напряжения имеют место при $x = 0, \lambda/2, \lambda, \dots$, а узлы напряжения – в точках линии с координатами $x = \lambda/4, 3\lambda/4, \dots$

Узлы и пучности тока также не перемещаются в пространстве, сдвинуты относительно узлов и пучностей напряжения на четверть волны.

В режиме короткого замыкания при $Z_2 = 0$ отсутствует и напряжение на выходе линии (при $x = \lambda$), т. е. $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 \cdot Z_2 = 0$. На этой длине полностью завершился цикл изменения напряжения $U(x)$, который начался при $x = 0$. Для использования уравнений (8.16) необходимо принять $U_1 = U_2 = 0$.

Уравнения линии примут вид:

$$\left. \begin{aligned} U_1 = 0; \quad \dot{U} &= j\dot{I}_1 \cdot Z_B \cdot \sin \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x; \\ \dot{I} &= I_1 \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x. \end{aligned} \right\} \quad (8.20)$$

Характер изменения тока и напряжения в линии показан на рис. 8.4.

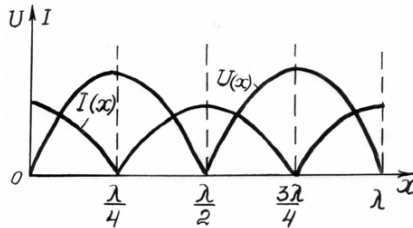


Рис. 8.4. Распределение тока и напряжения вдоль линии в режиме короткого замыкания

Как видно из рис. 8.4, в режиме короткого замыкания, как и при холостом ходе, образуются стоячие волны, при этом картина стоячей волны напряжения повторяет картину волны тока в режиме холостого хода и наоборот.

В режиме согласованной нагрузки $Z_2 \neq Z_B$, $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 \cdot Z_2$. Кривые $U(x)$, $I(x)$ имеют промежуточный характер между кривыми, полученными для режимов холостого хода и короткого замыкания, как показано на рис. 8.5.

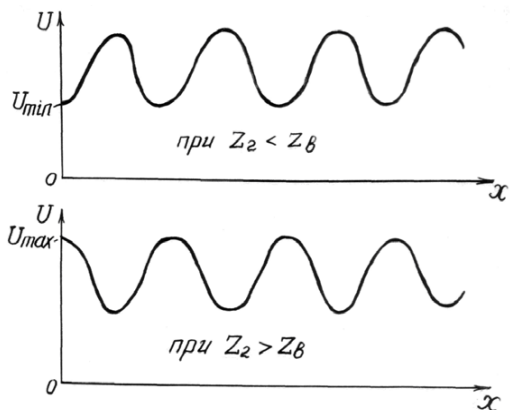


Рис. 8.5. Распределение тока и напряжения вдоль линии в режиме несогласованной нагрузки

Если $Z_B < Z_2$, то напряжение на входе линии максимально, а при $Z_B > Z_2$ – минимально. Чем больше различия между Z_B и Z_2 , тем больше различия между значениями напряжений в пучности (U_{\max}) и во впадине (U_{\min}). Эти напряжения можно измерить опытным путем и определить коэффициент отражения (по модулю):

$$K_{\text{отр}} = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{U_{\max} + U_{\min}}. \quad (8.21)$$

Моделями ДЛ являются *цепные схемы*, представляющие из себя набор последовательно включенных простейших четырехполюсников – искусственную ДЛ.

9. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

9.1. Нелинейные электрические цепи постоянного тока

9.1.1. Нелинейные резистивные элементы и их параметры

Нелинейными элементами (НЭ) электрической цепи называются элементы, параметры которых (электрическое сопротивление, индуктивность или емкость) зависят от величины или направления тока (напряжения) в элементе.

Если цепь содержит хотя бы один НЭ, то она является нелинейной цепью (НЦ). С практической точки зрения все используемые в практической электротехнике элементы являются нелинейными.

При этом в зависимости от условий работы цепи один и тот же НЭ может характеризоваться разными значениями параметров. Так для цепи постоянного тока резистивный НЭ характеризуется *статическим сопротивлением*, величина которого зависит от величины тока и напряжения, как и у линейных элементов:

$$R_{ст}(I) = \frac{U}{I}. \quad (9.1)$$

Для цепи переменного тока тот же НЭ нужно характеризовать другим параметром – *динамическим (дифференциальным) сопротивлением*, зависящим от того, как изменяется ток при изменении приложенного напряжения, т. е.:

$$R_{д}(i) = \lim_{\Delta i \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta i} = \frac{du}{di}. \quad (9.2)$$

Все множество возможных значений параметров нелинейного резистора представляет собой его *вольтамперную характеристику* (ВАХ) $I = f(U)$, которая у таких элементов нелинейная (кривая линия).

Статическое и динамическое сопротивления нелинейного резистора для конкретной точки М его ВАХ с координатами (I', U') могут быть определены, как показано на рис. 9.1. Получим:

$$R_{ст} = U' / I'; \quad R_{д} = \operatorname{tg} \beta = U' / \Delta I',$$

где β – угол между касательной к характеристике в точке М и осью токов.

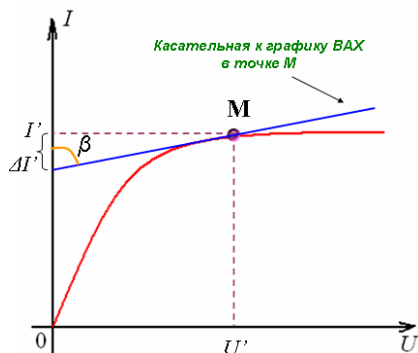


Рис. 9.1. К определению статического и динамического сопротивлений

Если ВАХ симметрична относительно начала координат, то сопротивление такого НЭ не зависит от направления тока. Примером симметричных НЭ являются терморезисторы, у которых нелинейность обусловлена температурной зависимостью сопротивления от величины тока, протекающего через элемент. Представителями данной группы НЭ являются лампы накаливания, бареттеры и др. На рис. 9.2 изображена ВАХ и условное графическое обозначение лампы накаливания с вольфрамовой нитью.

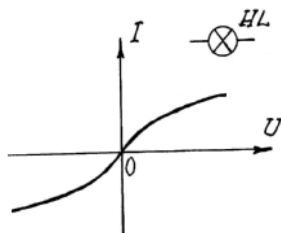


Рис. 9.2. ВАХ лампы накаливания

Примером НЭ с принципиально несимметричной ВАХ являются нашедшие широкое применение в электротехнике и электронике *полупроводниковые диоды*. На рис. 9.3 приведена типичная ВАХ и условное графическое обозначение полупроводникового диода.

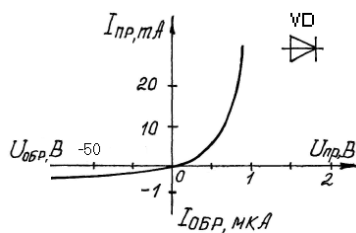


Рис. 9.3. ВАХ полупроводникового диода

По ВАХ диода видно, что значение прямого и обратного токов отличаются на несколько порядков, при этом прямое напряжение не превышает нескольких десятых долей вольта, а обратное напряжение может достигать десятки и сотни вольт. Таким образом, можно считать, что диод пропускает ток только в одном направлении, при этом падение напряжения на самом диоде пренебрежимо мало.

Широкое применение в электротехнике находит разновидность диода – полупроводниковые *стабилитроны*. ВАХ и условное графическое обозначение стабилитрона приведены на рис. 9.4.

Наибольший интерес представляет *обратная ветвь* ВАХ стабилитрона, т. е. зависимость величины обратного тока от приложенного напряжения. При некотором значении обратного напряжения сопротивление стабилитрона резко уменьшается. При этом в широком диапазоне изменения тока через стабилитрон от $I_{ст. min}$ до $I_{ст. max}$ напряжение на нем практически не изменяется и принимается равным $U_{ст}$ – так называемому *напряжению стабилизации*, которое является основным параметром стабилитрона.

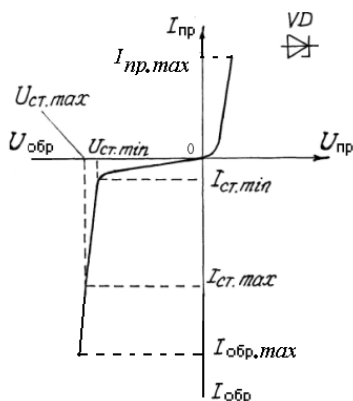


Рис. 9.4. ВАХ полупроводникового стабилитрона

Применение именно обратного участка ВАХ для стабилизации напряжения связано с другим параметром стабилизатора – максимально допустимым значением тока через элемент, значение которого для обратного тока ($I_{обр. max}$) в несколько раз больше, чем для прямого ($I_{пр. max}$).

9.1.2. Расчет нелинейных цепей постоянного тока

Принципиальной особенностью методов расчета нелинейных цепей является то, что они являются приближенными. *Графо-аналитические методы* предполагают расчет цепи на основе аналитических выражений (нелинейных функций), заменяющих реальные ВАХ НЭ. Расчет цепи сводится к решению системы нелинейных уравнений на основе законов Ома и Кирхгофа. Решение этих уравнений основано на их линеаризации в определенных диапазонах изменения электрических величин, либо на использовании приближенных методов решения нелинейных уравнений. Трудности выражения ВАХ в аналитической форме ограничивают применение графо-аналитических методов и приводят к широкому использованию на практике графических методов.

Графические методы основаны на графическом решении нелинейных уравнений для токов и напряжений цепи, т. е. на построении семейства ВАХ для заданной цепи и определении искомых электрических величин по этим характеристикам.

Алгоритм расчета цепи графическим методом предполагает выполнение следующих операций:

- составление исходной схемы замещения цепи;
- вычерчивание в одной системе координат в одном масштабе ВАХ всех элементов цепи;
- составление уравнений цепи;
- построение на основе этих уравнений ВАХ всей цепи;
- по результирующей ВАХ цепи и заданному общему напряжению (току) определяется общий ток или напряжение в цепи;
- определение токов или напряжений на элементах цепи по ВАХ отдельных элементов;
- проверка решения задачи.

9.2. Нелинейные электрические цепи переменного тока

9.2.1. Элементы нелинейных цепей переменного тока.

Свойства нелинейного индуктивного элемента

Основной особенностью нелинейных цепей переменного тока является то, что при наличии нелинейных элементов даже в случае применения источников синусоидального напряжения периодические токи и напряжения в цепи будут *несинусоидальными*.

Пусть, например напряжение $u(t) = U_m \sin \omega t$ приложено к элементу, ВАХ которого можно приближенно аппроксимировать формулой $i = a u^3$. Тогда для тока получим выражение:

$$i(t) = aU_m^3 \sin^3 \omega t = \frac{3}{4} aU_m^3 \sin \omega t - \frac{1}{4} aU_m^3 \sin 3\omega t.$$

Таким образом, функция тока содержит не только основную, но и третью гармонику.

В общем случае для цепей переменного тока наряду с нелинейными резисторами необходимо учитывать нелинейность индуктивных катушек и конденсаторов. Одним из самых распространенных элементов цепей переменного тока является индуктивная катушка с ферромагнитным (стальным) сердечником, которая служит основой реле, контакторов, электрических машин, трансформаторов и т. п. На рис. 9.5 показан эскиз такой катушки с тороидальным сердечником, а на рис. 9.6 – возможные условные графические обозначения катушек.

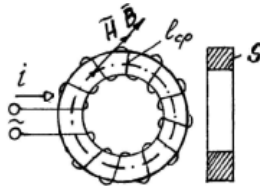


Рис. 9.5. Катушка с тороидальным сердечником

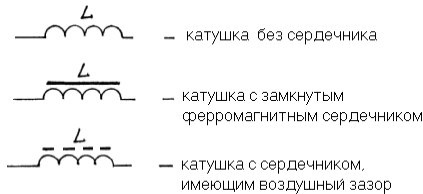


Рис. 9.6. Условные графические обозначения катушек

Основным параметром катушки является индуктивность L . Для катушки, изображенной на рис. 9.5

$$L = w^2 \frac{S}{l_{cp}} \mu_a, \tag{9.3}$$

где S – площадь сечения сердечника, м^2 ; $l_{\text{ср}}$ – длина средней магнитной линии сердечника, м ; w – число витков катушки; μ_a – абсолютная магнитная проницаемость материала сердечника, Гн/м .

Поскольку ферромагнитные материалы имеют $\mu_a \gg \mu_0$, то подавляющее большинство электрических машин и аппаратов содержит обмотки с ферромагнитными (стальными) сердечниками. Главной характеристикой ферромагнетика является петля гистерезиса $B(H)$. На практике в качестве характеристики $B(H)$ используют *кривые намагничивания*, показанные на рис. 9.7. Кривая намагничивания – геометрическое место точек концов гистерезисных петель, снятых при многократных перемагничиваниях ферромагнетика при различных значениях токов.

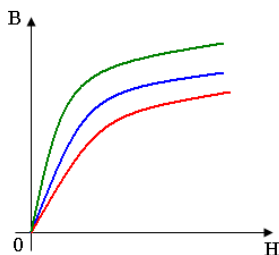


Рис. 9.7. Кривые намагничивания электротехнических сталей

Магнитная проницаемость стали $\mu_a = B / H$ меняется при изменении магнитного поля, связанного с изменением тока в катушке. В результате индуктивность L зависит от величины тока, т. е. наличие стального сердечника делает катушку нелинейным элементом.

Для расчета цепей с нелинейными индуктивностями иногда можно несинусоидальную кривую тока $i(t)$ приближенно заменить *эквивалентной синусоидой* с действующим значением тока I , равным действующему значению несинусоидального тока. В этом случае можно говорить об *эквивалентной индуктивности* L_s катушки с сердечником и использовать понятие «эквивалентное индуктивное сопротивление» $x_{L_s} = \omega L_s$. При этом расчет цепи производится методами расчета линейных цепей.

При протекании тока в катушке с сердечником в ней одновременно происходят несколько процессов преобразования энергии. Для описания энергетических процессов в катушке ее принято рассматривать в виде схемы замещения, представленной на рис. 9.8.

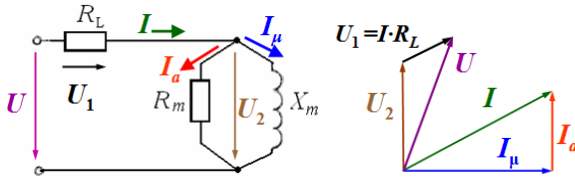


Рис. 9.8. Схема замещения и векторная диаграмма катушки с ферромагнитным сердечником

Потери энергии, связанные с нагревом обмотки из-за наличия активного сопротивления провода R_L называются *потерями в меди*. Потери, связанные с нагревом сердечника за счет вихревых токов, создаваемых в сердечнике переменным электрическим полем, в свою очередь порожденным переменным магнитным полем, а также потери на перемагничивание сердечника вместе называются *потерями в стали* (на схеме замещения за этот вид потерь отвечает R_m).

Из векторной диаграммы следует, что общий ток I через катушку и его составляющие, используемые для описания процессов в сердечнике, связаны соотношением:

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_\mu^2}, \quad (9.4)$$

где I_μ – намагничивающая составляющая тока; I_a – активная составляющая тока.

9.2.2. Явление феррорезонанса. Феррорезонансные стабилизаторы напряжения

Рассмотрим цепь с последовательным соединением указанных элементов, схема которой, ВАХ элементов и цепи в целом показаны на рис. 9.9.

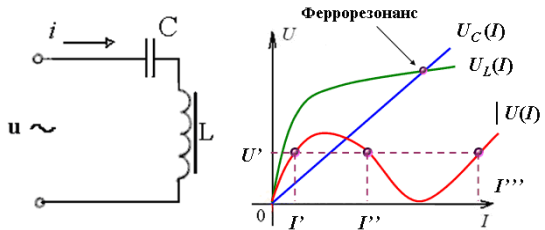


Рис. 9.9. Процессы в цепи с нелинейной катушкой и конденсатором

ВАХ линейного конденсатора $U_C(I)$ является прямой линией, а ВАХ нелинейной катушки $U_L(I)$ повторяет форму кривой намагничивания материала сердечника. Из рис. 9.9 следует, что при некотором значении тока в цепи $U_L = U_C$. Для линейных цепей такой режим называется резонансом. Для НЦ с катушками, имеющими ферромагнитный сердечник, подобный режим получил название «феррорезонанс». Его важнейшей особенностью является способ возбуждения: достаточно изменять величину входного напряжения.

Если пренебречь наличием активного сопротивления, то напряжение на входе цепи:

$$U(I) = U_L(I) - U_C(I). \quad (9.5)$$

На основании (9.5) можно построить ВАХ $U(I)$ цепи в целом путем вычитания ординат ВАХ элементов L и C . Форма полученной кривой характеризует сложность процессов в таких НЦ. Например, значению напряжения U' на графике соответствуют три возможных значения тока I', I'' и I''' .

Для того, чтобы разобраться, какое же значение тока на самом деле, проведем эксперимент, результаты которого показаны на рис. 9.10.

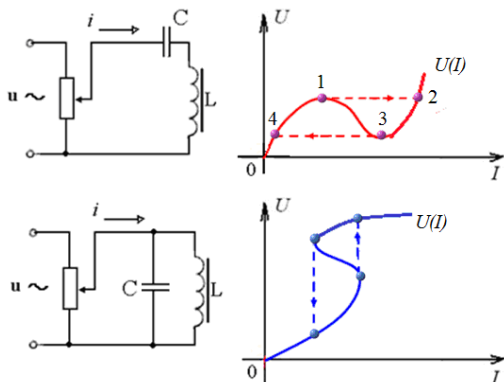


Рис. 9.10. ВАХ реальных цепей с нелинейной катушки и линейным конденсатором

Реальная ВАХ всей цепи в силу наличия активного сопротивления несколько отличается от идеальной – при феррорезонансе напряжение не равно нулю. При этом в цепи с последовательным соединением при увеличении напряжения на входе цепи от нуля ток вначале нелинейно увеличивается, а затем при определенном значении напряжения (точка 1) скачком увеличивается (точка 2), после чего при дальнейшем увеличении напряжения увеличивается плавно и очень незначительно. При уменьшении напряжения в определенный момент (точка 3) также происходит скачок тока – в сторону уменьшения (точка 4).

В цепи с параллельным соединением регулирование общего тока приводит к скачкам напряжения. При этом форма результирующей ВАХ позволяет использовать данную схему для стабилизации напряжения.

10. МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ

10.1. Основы теории магнитных цепей

10.1.1. Понятие магнитной цепи. Элементы магнитных цепей и параметры

Магнитной цепью (МЦ) называется совокупность устройств, содержащих ферромагнитные тела, электромагнитные процессы в которых могут быть описаны при помощи понятий магнитодвижущей силы (МДС), магнитного потока и магнитного напряжения.

Модель МЦ применяется для описания процессов в таких важных электротехнических устройствах, как электрические машины, трансформаторы, электромагнитные реле и др.

Любая МЦ содержит следующие элементы:

- источники МДС (обмотки с токами или постоянные магниты);
- *магнитопроводы* (материалы с большой магнитной проницаемостью – чаще всего ферромагнетики).

Основным параметром источника МДС служит, естественно, сама величина МДС F . Для основного типа источников МДС, применяемых в электротехнических устройствах – обмоток с токами, ее величина определяется по формуле:

$$F = wI, \quad (10.1)$$

где w – число витков провода.

Магнитопровод служит для создания наиболее благоприятных условий распространения магнитного поля в заданное место. Для этого необходимо, чтобы он имел минимальное *магнитное сопротивление*

$$R_M = \frac{l_{cp}}{\mu_a S},$$

где S – площадь сечения магнитопровода; l_{cp} – длина средней магнитной линии в магнитопроводе; μ_a – абсолютная магнитная проницаемость материала магнитопровода.

Все МЦ можно условно разделить на простые и сложные. Пример простой МЦ показан на рис. 10.1.

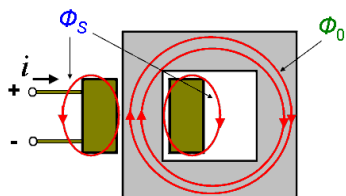


Рис. 10.1. Процессы в простой магнитной цепи

На данном рисунке показана в разрезе одна обмотка (провод, по которому протекает постоянный ток I), расположенная на неразветвленном ферромагнитном замкнутом сердечнике – магнитопроводе. Магнитный поток Φ_0 , замыкающийся полностью по предназначенному для него пути – стальному сердечнику – является *рабочим* магнитным потоком. В реальной МЦ часть линий магнитной индукции замыкается по воздуху, минуя магнитопровод, образуя магнитный *поток рассеяния* Φ_s .

Полный магнитный поток Φ , возбуждаемый током в обмотке, определяется как сумма рабочего потока и потока рассеяния:

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_s.$$

Соотношение между полным и рабочим магнитными потоками характеризуется величиной *коэффициента магнитного рассеяния*:

$$\sigma = \frac{\Phi}{\Phi_0}. \quad (10.2)$$

В реальных цепях поток рассеяния всегда присутствует, т. е. $\sigma > 1$, однако при расчетах МЦ, не имеющих воздушных зазоров, рассеянием часто пренебрегают, считая $\sigma \approx 1$.

10.1.2. Законы магнитных цепей

Законы МЦ вытекают из общих законов электромагнитного поля. По аналогии с электрическими цепями, следствия этих законов называют законами Ома и Кирхгофа для МЦ.

Закон Ома для МЦ устанавливает в простой МЦ связь между величиной магнитного потока в магнитопроводе с заданными параметрами и величиной МДС, возбуждающей указанный поток. Применительно к простой МЦ с одним источником МДС без учета магнитного рассеяния данный закон можно записать следующим образом:

$$\Phi = \frac{F}{R_M}. \quad (10.3)$$

Принцип непрерывности магнитного потока устанавливает, что магнитный поток сквозь любую замкнутую поверхность S равен нулю:

$$\Phi = \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (10.4)$$

Рассмотрим участок МЦ, где магнитопровод разветвляется, образуя *узел МЦ*, показанный на рис. 10.2. Под узлом МЦ следует понимать поверхность S (на рисунке показана пунктиром) в месте разветвления магнитопровода.

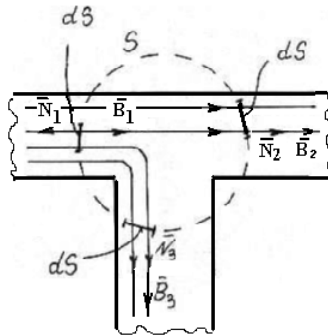


Рис. 10.2. К выводу первого закона Кирхгофа для магнитной цепи

С учетом показанных на рис. 10.2 направлений векторов \vec{B}_k в разных ветвях, а также направлений положительных нормалей \vec{N}_k к выбранным элементарным поверхностям dS , выражение (10.4) принимает вид:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = -\oint_{S_1} \vec{B}_1 d\vec{S} + \oint_{S_2} \vec{B}_2 d\vec{S} + \oint_{S_3} \vec{B}_3 d\vec{S} = 0,$$

или:

$$-\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0.$$

В общем случае:

$$\sum_{k=1}^n \Phi_k = 0. \quad (10.5)$$

Данное выражение называется *первым законом Кирхгофа для МЦ* и формулируется следующим образом: алгебраическая сумма магнитных потоков, сходящихся в узле МЦ, равна нулю.

Закон полного тока определяет связь магнитного поля с током, его создающим – интеграл от вектора напряженности магнитного поля по контуру l МЦ, охватывающего катушку с током I , имеющую число витков w равен:

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = wI, \quad (10.6)$$

где $wI = F$ – МДС катушки, А.

При расчете МЦ магнитопровод разделяют на n расчетных участков, как показано на рис. 10.3, в пределах каждого из которых магнитная индукция B_k ,

напряженность поля H_k и магнитная проницаемость $\mu_{ак}$ принимаются неизменными при заданной величине тока. Деление магнитопровода на расчетные участки позволяет использовать в качестве контура интегрирования замкнутый контур, образованный суммой средних линий магнитной индукции l_k всех последовательных расчетных участков. В этом случае интеграл в выражении закона полного тока заменяется суммой скалярных произведений $H_k l_k$, обычно называемых *магнитными напряжениями*.

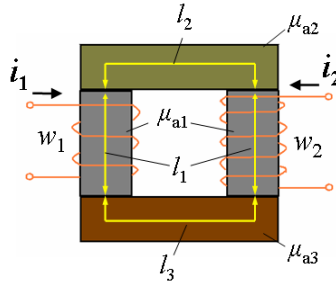


Рис. 10.3. К выводу второго закона Кирхгофа для магнитной цепи

Если учесть, что контур интегрирования в МЦ может охватывать несколько катушек с токами, то выражение (10.6) принимает вид:

$$\sum_{k=1}^n H_k l_k = \sum_{k=1}^m w_k I_k, \quad (10.7)$$

где n – число последовательных расчетных участков магнитопровода; m – число катушек с токами, охватываемых контуром интегрирования; $w_k I_k$ – МДС k -й катушки (обмотки).

Формула (10.7) в теории МЦ называется *вторым законом Кирхгофа*: алгебраическая сумма магнитных напряжений на магнитных сопротивлениях последовательного контура МЦ равна алгебраической сумме МДС обмоток с токами, охватываемых контуром.

11. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

11.1. Сущность и методы решения задач расчета электромагнитного поля

11.1.1. Уравнения электромагнитного поля

Для точного описания работы электротехнического устройства необходимо решать задачи по определению пространственного распределения и изменения во времени характеристик ЭМП – напряженности электрического поля, магнитной индукции и т. д. При этом чаще всего используются уравнения Максвелла. Уравнения Максвелла могут быть интегральными или дифференциальными. Интегральные уравнения описывают ЭМП в некоторой области пространства (вдоль линии, на поверхности, в объеме), а дифференциальные уравнения позволяют рассчитать поле в любой точке.

Связь электрического поля, окружающего заряженные частицы и тела, с величиной их заряда можно получить из *постулата Максвелла*. В интегральной форме данное уравнение устанавливает равенство потока вектора электрической индукции \vec{D} сквозь любую замкнутую поверхность S свободному заряду q , заключенному в объеме, ограниченном этой поверхностью:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q . \quad (11.1)$$

С учетом связи $\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}$ уравнение (11.1) можно записать в виде:

$$\oint_S \epsilon_a \vec{E} \cdot d\vec{S} = q .$$

Для неоднородных или анизотропных сред ϵ_a не может быть вынесена за знак интеграла, поэтому для описания электрического поля в таких диэлектриках удобнее пользоваться вектором электрической индукции.

Физический смысл постулата Максвелла заключается в следующем:

- источники электрического поля расположены в местах нахождения электрических зарядов;
- силовые линии электрического поля могут начинаться и кончаться на противоположных по знаку зарядах;
- при отсутствии зарядов электрическое поле может создаваться переменным магнитным полем, в этом случае его силовые линии образуют замкнутые контуры и выполняется условие:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0 .$$

Рассмотрим элемент ΔV внутри поверхности, как показано на рис. 11.1.

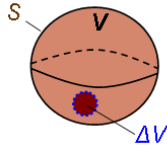


Рис. 11.1. К выводу постулата Максвелла в дифференциальной форме

Пусть внутри ΔV находится свободный заряд Δq . Разделим обе части (11.1) на ΔV , после чего найдем предел отношения при $\Delta V \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \bar{D} d\bar{S}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}.$$

Выражение в правой части уравнения – объемная плотность ρ электрического заряда в данной точке. Выражение в левой части уравнения называется *расхождением* или *дивергенцией вектора* и кратко обозначается $\text{div } \bar{D}$. Таким образом, в дифференциальной форме постулат Максвелла примет вид:

$$\text{div } \bar{D} = \rho. \quad (11.2)$$

В декартовых координатах уравнение (11.2) запишется в виде:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho,$$

где D_x, D_y, D_z – проекции вектора \bar{D} на соответствующие оси.

Связь между магнитным полем, пронизывающим поверхность S , ограниченную контуром l и его источником – электрическим током через эту поверхность устанавливается уравнением Максвелла, называемым *законом полного тока*. В интегральной форме это уравнение имеет вид:

$$\oint_l \bar{H} dl = i, \quad (11.3)$$

где i – *полный электрический ток*.

Уравнение (11.3) запишем в виде:

$$\oint_l \bar{H} dl = \int_S \bar{J} d\bar{S}, \quad (11.4)$$

где \bar{J} – плотность полного электрического тока, А/м².

С позиций теории ЭМП принято различать три вида электрического тока. *Ток проводимости* представляет собой упорядоченное движение зарядов: электронов в металле или ионов в электролите. Плотность тока проводимости равна:

$$\bar{J}_{np} = \gamma \bar{E}, \quad (11.5)$$

где γ – удельная проводимость (электропроводность) среды, См/м.

Ток переноса возникает под действием электрического поля \vec{E} в свободном пространстве, заполненном зарядами со объемной плотностью ρ , движущимися со скоростью \vec{v} :

$$\vec{J}_{пер} = \rho \vec{v}. \quad (11.6)$$

Ток электрического смещения возникает в диэлектриках при изменении электрического поля во времени и обусловлен изменением электрической поляризованности вещества. Плотность тока смещения:

$$\vec{j}_{см} = d\vec{D}/dt. \quad (11.7)$$

Токи проводимости и переноса могут возникать как в постоянных, так и в переменных электрических полях. Ток смещения присутствует только в переменных полях. Таким образом, полный электрический ток представляет собой два разнородных явления – движение электрических зарядов и изменение электрического поля во времени.

Плотность полного тока определяется выражением:

$$\vec{J} = \vec{J}_{пр} + \vec{J}_{пер} + \vec{J}_{см}. \quad (11.8)$$

Нетрудно перейти к дифференциальной форме закона полного тока, которая связывает вектор плотности тока с *ротором* вектора напряженности магнитного поля:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J}. \quad (11.9)$$

В декартовой системе координат уравнение (11.9) принимает вид:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{i} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) = \vec{J};$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные вектора, направленные из начала координат вдоль координатных осей.

Связь между электрическим полем и возбуждающим его переменным магнитным полем открыта Фарадеем и сформулирована им в виде закона электромагнитной индукции. Максвеллу принадлежит заслуга обобщения этого закона для любой среды.

Обобщенный закон электромагнитной индукции Максвелла устанавливает: ЭДС, возникающая в контуре при изменении магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную контуром, равна скорости изменения магнитного потока, взятой с отрицательным знаком. При этом ЭДС, действующая вдоль контура, равна линейному интегралу напряженности электрического поля, взятому вдоль этого контура. Таким образом:

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

С учетом выражения для магнитного потока Φ данное уравнение можно записать в виде:

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_s \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (11.10)$$

В дифференциальной форме уравнение принимает вид:

$$\operatorname{rot} \bar{E} = - \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}. \quad (11.11)$$

Принцип непрерывности магнитного потока гласит: магнитный поток сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю. Данный принцип отражает уравнение Максвелла:

$$\oint_S \bar{B} d\bar{S} = 0, \quad (11.12)$$

или в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0. \quad (11.13)$$

Физический смысл данного уравнения заключается в том, что линии магнитной индукции *замкнуты* (непрерывны).

11.1.2. Граничные условия на поверхности раздела сред с различными электрическими и магнитными свойствами

Задача расчета ЭМП сводится к решению дифференциальных уравнений в частных производных. Для конкретных задач важным моментом является определение *граничных условий* – условий, которым удовлетворяют характеристики поля на границах (поверхностях) между:

- средами различного рода (диэлектриками и проводниками, диэлектриками и магнетиками и т.п.);
- диэлектриками с различными ε ;
- проводящими средами с различными γ ;
- магнитными средами с различными μ .

Граничные условия бывают простыми и сложными, что зависит от свойств среды, как показано на рис. 11.2.

Существует два основных способа задания граничных условий:

- в форме Дирихле (например, величина потенциала на границе);
- в форме Неймана (величина нормальной к границе составляющей градиента потенциала).

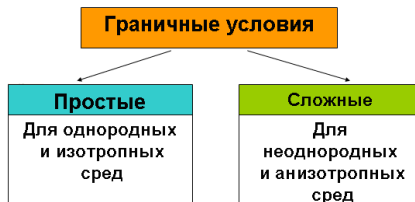


Рис. 11.2. Виды граничных условий

При заданных граничных условиях рассматриваемая задача называется *краевой задачей* ЭМП. Для переменных полей должны быть заданы также начальные условия.

Рассмотрим пример простых граничных условий на поверхности раздела двух однородных и изотропных сред. Выясним свойства различных векторных характеристик поля при переходе такой границы, показанной на рис. 11.3.

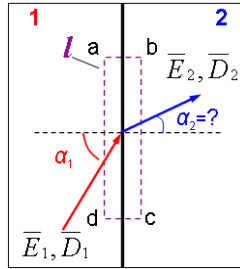


Рис. 11.3. К выводу условий на границе двух однородных изотропных сред

Для каждой среды в отдельности выполняется:

$$\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}; \quad \oint_l \vec{E} d\vec{l} = 0; \quad \oint_s \vec{D} d\vec{S} = 0.$$

Для контура $a-b-c-d-a$, при условии, что стороны прямоугольника удовлетворяют условию $ab \ll ad$, получим:

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} \approx E_1 \sin \alpha_1 ab - E_2 \sin \alpha_2 cd = 0.$$

Так как $ab = cd$, получаем:

$$E_1 \sin \alpha_1 = E_2 \sin \alpha_2. \quad (11.14)$$

Аналогично можно получить:

$$D_1 \cos \alpha_1 = D_2 \cos \alpha_2. \quad (11.15)$$

Если разделить (11.14) на (11.15), то получим:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}. \quad (11.16)$$

Аналогично можно получить соотношение для векторов магнитного поля при переходе из одной среды в другую:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (11.17)$$

Отсюда следует, что если D_1 и H_1 нормальны к границе, то соответственно E и B одинаковы для обеих сред. При этом D и H испытывают скачок по величине.

11.1.3. Аналитические и численные методы расчета электромагнитного поля

Методы решения задач расчета ЭМП делятся на аналитические и численные. Условия для применения методов расчета иллюстрирует рис. 11.4.

По своей сути *аналитические методы* краевых задач ЭМП позволяют находить решение в виде аналитического выражения для функции – характеристики ЭМП. Однако любое реальное электротехническое устройство – очень сложный объект для исследования, в том числе и при решении задачи анализа электромагнитных процессов. Особенно это относится к краевым задачам расчета ЭМП со *сложными граничными условиями*: задачам расчета ЭМП в нелинейных, неоднородных и анизотропных средах.

При аналитическом решении уравнений ЭМП делаются различные допущения. Эти допущения были сформулированы более полувека назад при создании основ современной электротехники. На основе этих допущений были разработаны аналитические методы расчета ЭМП, которые соответствовали вычислительным средствам того времени. При этом вычислительная техника использовалась для *автоматизации и ускорения расчетов* на основе аналитических методов, а не для их уточнения.



Рис. 11.4. Условия для применения аналитических и численных методов расчета ЭМП

Постепенно недостатки аналитических методов электромагнитного расчета становились все более серьезными, и поэтому назрела необходимость заменить устаревшие методы расчета ЭМП численными расчетами на ЭВМ, особенно с учетом огромного качественного скачка в развитии вычислительной техники.

Численные методы решения краевых задач анализа ЭМП основаны на различных способах *приближенного* решения уравнений поля. При этом

большинство численных методов основываются на уравнениях в дифференциальной форме.

На практике из численных методов наиболее широкое распространение получили методы конечных элементов (МКЭ) и конечных разностей (МКР).

Рассмотрим пример задачи, условие которой иллюстрирует рис. 11.5.

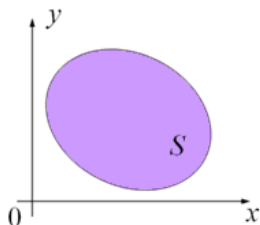


Рис. 11.5. Область поиска решения

Пусть для двухмерной (плоской) области S поле подчиняется уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 E(x, y) = 0, \quad (11.18)$$

где ∇^2 – оператор Лапласа, который в декартовой системе координат имеет вид:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} .$$

На границе области S заданы граничные условия для функции $E(x, y)$.

Суть решения методом МКР состоит в следующем. Область непрерывного изменения аргументов заменяется дискретным множеством точек (узлов), которое называется *сеткой*, как показано на рис. 11.6.

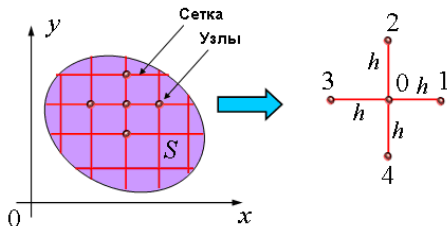


Рис. 11.6. К пояснению сущности МКР

Вместо функции непрерывного аргумента рассматриваются функции дискретного аргумента, определенные в узлах сетки. Уравнения в частных производных заменяются алгебраическими уравнениями, что достигается разложением функции – характеристики ЭМП – в ряд Тейлора:

$$E = E_0 + \frac{\partial E}{\partial x}(x - x_0) + \frac{1}{1 \cdot 2} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}(x - x_0)^2 + \dots$$

$$E_1 = E_0 + h \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{1}{1 \cdot 2} h^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \dots; \quad E_3 = E_0 + h \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{1}{1 \cdot 2} h^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \dots$$

Отсюда получаем выражения для вторых производных:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2}(2E_1 + 2E_3 - 2E_0); \\ \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2}(2E_2 + 2E_4 - 2E_0). \end{cases}$$

При подстановке этих выражений в уравнение (11.18) оно превращается в алгебраическое уравнение. Алгоритм МКЭ во многом аналогичен МКР. Данные методы при малом шаге сетки обладают высокой точностью и, кроме того, легко программируются на ЭВМ.

11.2. Статические и стационарные поля

11.2.1. Уравнения и типовые задачи электростатического поля

Отсутствие подвижных зарядов (электрических токов), а также постоянных магнитов (намагниченных тел) позволяет рассматривать только два уравнения – постулат Максвелла и обобщенный закон электромагнитной индукции.

В интегральной форме эти уравнения принимают вид:

$$\oint_S \bar{D} d\bar{S} = q; \quad \oint_l \bar{E} d\bar{l} = 0.$$

В дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \bar{D} = \rho; \quad \operatorname{rot} \bar{E} = 0.$$

Согласно вторым уравнениям в оставшихся парах циркуляция напряженности электрического поля равна нулю (ротор вектора E равен нулю). Это говорит о том, что электростатическое поле *потенциальное*, а не вихревое. Т. е. такое поле в каждой точке пространства можно характеризовать скалярной величиной – *электрическим потенциалом*.

В случае однородной и изотропной среды вместо постулата Максвелла имеем теорему Гаусса в интегральной форме:

$$\oint_S \bar{E} d\bar{S} = \frac{q}{\varepsilon_a}. \quad (11.19)$$

В дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_a}. \quad (11.20)$$

Рассмотрим связь между напряженностью электрического поля и скалярным электрическим потенциалом. Как было указано ранее, при перемещении электрического заряда q (например, от точки a до точки b) электрическое поле совершает работу, равную интегралу от между напряженностью электрического поля или величине разности потенциалов (напряжения) между точками a и b :

$$\int_a^b \bar{E} d\bar{l} = V_a - V_b = U_{ab}.$$

Найдем приращение потенциала при перемещении заряда на бесконечно малое расстояние dl , считая, что при этом напряженность поля не меняется и равна E_l – проекции вектора E в направлении касательной к траектории движения заряда в рассматриваемой точке:

$$dV = -E_l dl.$$

При перемещении заряда на dl его координата x изменится на dx . Проекция вектора E на ось OX:

$$E_x = -\partial V / \partial x. \quad (11.21)$$

В трехмерной декартовой системе координат любой вектор, и в том числе вектор напряженности электрического поля:

$$\bar{E} = \bar{i}E_x + \bar{j}E_y + \bar{k}E_z.$$

Тогда получим:

$$\bar{E} = -\left(\bar{i} \frac{\partial V}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial V}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial V}{\partial z} \right).$$

В общем случае:

$$\bar{E} = -\operatorname{grad} V. \quad (11.22)$$

Знак минус в последнем выражении говорит о том, что скалярный электрический потенциал *убывает* в направлении вектора напряженности электрического поля.

Подставим выражение для напряженности поля (11.22) в уравнение теоремы Гаусса (11.20):

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} V) = -\frac{\rho}{\varepsilon_a},$$

или:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}. \quad (11.23)$$

Уравнение (11.23) называется *уравнением Пуассона*.

Для электростатического поля наличие свободных зарядов привело бы к возникновению тока. При их отсутствии ($\rho = 0$) электрическое поле будет подчиняться *уравнению Лапласа*:

$$\nabla^2 V = 0. \quad (11.24)$$

Таким образом, задача расчета электростатического поля свелась к решению одного уравнения в частных производных второго порядка с граничными условиями.

Общей задачей расчета электрического поля является определение напряженности поля во всех его точках по заданным зарядам или потенциалам тел. Для электростатического поля задача полностью решается отысканием потенциала как функции координат. Задача расчета весьма упрощается, если все величины, характеризующие поле, зависят только от двух координат. Такому условию удовлетворяет поле системы из нескольких бесконечно длинных параллельных друг другу цилиндрических проводов с зарядами, равномерно распределенными по их длине, как изображено на рис. 11.7. Диэлектрик будем предполагать однородным. Направим ось OZ параллельно осям проводов. Тогда все линии напряженности поля будут лежать в плоскостях, параллельных плоскости XOY .

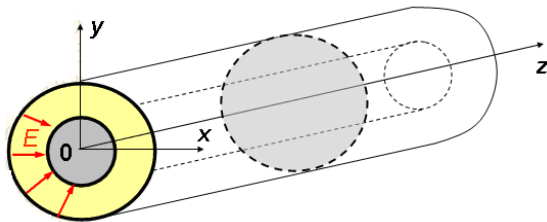


Рис. 11.7. Пример плоскопараллельной задачи

Картина поля во всех этих плоскостях одинакова, и достаточно исследовать поле только в плоскости XOY . Поле такого вида будем называть *плоскопараллельным полем*. Примером такой задачи является расчет электрической емкости.

11.2.1. Уравнения и типовые задачи стационарных полей

К *стационарным полям* относятся постоянные электрическое и магнитное поля, создаваемые постоянными токами. Такой ток, как известно, обладает следующими свойствами:

- протекает в замкнутой проводящей цепи;
- если сопротивление цепи отлично от нуля, то при протекании тока происходит *падение напряжения*;

– в самом проводнике и в окружающем диэлектрике будет существовать магнитное и электрическое поля, не зависящие от времени.

Очевидно, говоря о стационарных полях, создаваемых постоянными токами, под плотностью тока надо понимать:

$$\bar{J}_{\text{стац}} = \bar{J}_{\text{пр}} + \bar{J}_{\text{пер}}.$$

Далее, говоря о плотности стационарного тока, будем опускать обозначение «стац», понимая, что она образована только токами проводимости и переноса.

Рассмотрим, как выглядят уравнения Максвелла, если источником поля служит только постоянный ток. С учетом того, что постоянный ток создает постоянное во времени магнитное поле, имеем:

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = 0.$$

Тогда система уравнений Максвелла принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \bar{D} &= \rho; \\ \operatorname{rot} \bar{H} &= \bar{J}; \\ \operatorname{rot} \bar{E} &= 0; \\ \operatorname{div} \bar{B} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.25)$$

Из третьего уравнения этой системы следует, что стационарное электрическое поле – безвихревое, как и электростатическое. Т. е. такое поле является потенциальным, для которого справедливо соотношение (11.22).

Рассмотрим сначала электрическое поле в диэлектрике, окружающем проводники с постоянными токами. Т. к. при отсутствии токов в диэлектрике следует принять в нем $\rho = 0$, то поле в диэлектрике характеризуется уравнениями:

$$\operatorname{div} \bar{D} = 0; \quad \operatorname{rot} \bar{E} = 0. \quad (11.26)$$

С учетом связи $\bar{E} = -\operatorname{grad} V$ и $\bar{D} = \epsilon_a \bar{E}$ при $\epsilon_a = \text{const}$ эти уравнения равносильны одному уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 V = 0.$$

Таким образом, в диэлектрике стационарное электрическое поле ничем не отличается от электростатического.

Однако граничные условия на поверхности проводников уже не соответствуют тем, которые имеют место в электростатике. В электростатической задаче поверхность каждого проводника является поверхностью равного потенциала. При прохождении по проводнику электрического тока в проводнике возникает падение потенциала и, следовательно, поверхность проводника уже не будет эквипотенциальной. Линии напряженности электрического поля в диэлектрике подходят к поверхности проводника не под прямым углом, т. к. на поверхности проводника появляется касательная составляющая напряженности поля в направлении линий тока.

Вместе с тем во многих случаях падение напряжения вдоль проводников на длине, сравнимой с расстоянием между проводниками, ничтожно мало по сравнению с разностью потенциалов проводников.

Уравнения магнитного поля постоянного тока имеют вид:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{J}; \quad \operatorname{div} \bar{B} = 0. \quad (11.27)$$

Первое уравнение свидетельствует о том, что поле является *вихревым*. Следовательно, в той области пространства, где $\bar{J} \neq 0$ (там находятся проводники с токами), нельзя указать такую скалярную функцию координат $V_M(x, y, z)$ градиент которой пропорционален вектору \bar{H} , т. к. из математики известно, что для любой скалярной функции:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} V_M \equiv 0,$$

что противоречит (11.27).

Однако в той части пространства, где плотность тока равна нулю (нет проводников с токами), введение скалярного магнитного потенциала V_M в виде:

$$\bar{H} = -\operatorname{grad} V_M. \quad (11.28)$$

При этом уравнения стационарного магнитного поля (11.27) сводятся к уравнению Лапласа для скалярного магнитного потенциала:

$$\nabla^2 V_M = 0. \quad (11.29)$$

Для области пространства, содержащий проводники с токами, задачу можно упростить с помощью векторного магнитного потенциала \bar{A} , который вводится с помощью соотношения:

$$\bar{B} = \operatorname{rot} \bar{A}, \quad (11.30)$$

Нетрудно показать, что система (11.27) сводится к уравнению Пуассона, справедливому для любой проекции векторного потенциала:

$$\nabla^2 A = \mu_a J. \quad (11.31)$$

11.3. Переменное электромагнитное поле

11.3.1. Свойства переменного электромагнитного поля

В общем случае ЭМП описывается всеми четырьмя уравнениями Максвелла, в которые входят характеризующие поле четыре вектора $\bar{E}, \bar{D}, \bar{B}, \bar{H}$.

Для однородных и изотропных сред (без учета тока переноса в вакууме) эти вектора связаны между собой:

$$\bar{D} = \varepsilon_a \bar{E}; \quad \bar{B} = \mu_a \bar{H}; \quad \bar{J} = \gamma \bar{E} + \varepsilon_a \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}.$$

С учетом этих уравнений можно свести систему только к двум векторам. Обычно определяют векторы \bar{E} и \bar{H} из уравнений:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \gamma \bar{E} + \varepsilon_a \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \bar{E} = -\mu_a \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}.$$

Для сред с постоянными параметрами ε_a , μ_a , γ полная система уравнений ЭМП принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{H} &= \gamma \bar{E} + \varepsilon_a \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}; & \operatorname{rot} \bar{E} &= -\mu_a \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}; \\ \operatorname{div} \bar{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_a}; & \operatorname{div} \bar{H} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.32)$$

В общем виде система уравнений (11.32) имеет следующий физический смысл:

- магнитное поле всегда *вихревое* и возбуждается оно как движущимися зарядами, так и изменяющимся во времени электрическим полем;
- электрическое поле может быть *вихревым*, когда оно возбуждается изменяющимся во времени магнитным полем, и *безвихревым*, если оно возбуждается постоянными во времени электрическими зарядами;
- электрическое и магнитное поля связаны непрерывным взаимным превращением и представляют собой различные проявления единого ЭМП.

ЭМП, описываемое системой (11.32), часто именуют также *электромагнитной волной* (ЭМВ).

Рассмотрим пример: плоскую ЭМВ в диэлектрике. В этом случае $\gamma = 0$, $\rho = 0$, а вектора E и H не зависят от x и y . Таким образом,

$$E = f_1(z, t), \quad H = f_2(z, t).$$

Нетрудно показать, что из (11.31) в этом случае следует:

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}; \quad (11.33)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon_a \frac{\partial E_y}{\partial t}; \quad (11.34)$$

$$0 = \varepsilon_a \frac{\partial E_z}{\partial t}; \quad (11.35)$$

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu_a \frac{\partial H_x}{\partial t}; \quad (11.36)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = \mu_a \frac{\partial H_y}{\partial t}; \quad (11.37)$$

$$0 = \mu_a \frac{\partial H_z}{\partial t}. \quad (11.38)$$

Если ток и напряжение источника переменные, то из (11.35), (11.38) следует $E_z = H_z = 0$. Выберем систему координат так, что вектор E параллелен OX . Тогда $E_y = 0$. Из (11.34), (11.36) в этом случае следует:

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0.$$

Отсюда $H_x = 0$. Следовательно, вектор H направлен по оси OY . Таким образом в электромагнитной волне, свободно распространяющейся в

однородном и изотропном диэлектрике, векторы E и H взаимно перпендикулярны.

Уравнения (11.33), (11.37) сводятся к одному уравнению:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 E_x}{dz^2}, \quad (11.39)$$

где $v = 1/\sqrt{\mu_a \varepsilon_a}$ – скорость ЭМВ, м/с. (11.40)

Таким образом, ЭМВ распространяется в пространстве со скоростью, зависящей от свойств среды. В вакууме ЭМВ распространяется со скоростью света $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с.

Под направлением ЭМВ понимают направление распространения *потока энергии*, которое совпадает с направлением *вектора Пойнтинга*:

$$\vec{S} = [\vec{E} \vec{H}] \quad (11.41)$$

11.3.2. Гармоническое поле и методы его расчета

Гармоническим называется ЭМП, создаваемое синусоидальными токами. Вектора поля также меняются по гармоническому закону с той же частотой. Для анализа таких полей используется комплексный метод, ранее рассмотренный в теории цепей синусоидального тока.

Пусть зависимость функций-характеристик ЭМП от времени имеет вид:

$$E(t) = E_m \sin(\omega t + \psi_E); H(t) = H_m \sin(\omega t + \psi_H).$$

В комплексной форме:

$$\dot{E}(t) = E_m e^{j(\omega t + \psi_E)}; \quad \dot{H}(t) = H_m e^{j(\omega t + \psi_H)}.$$

Производные во времени от таких функций:

$$\frac{\partial}{\partial t} \dot{E}(t) = j\omega \dot{E}(t); \quad \frac{\partial}{\partial t} \dot{H}(t) = j\omega \dot{H}(t).$$

Система уравнений Максвелла (11.32) для комплексных характеристик ЭМП содержит также в общем случае комплексные параметры среды и имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \dot{E} &= \frac{\rho}{\underline{\varepsilon}_a}; & \operatorname{rot} \dot{H} &= (\underline{\gamma} + j\omega \underline{\varepsilon}_a) \dot{E}; \\ \operatorname{rot} \dot{E} &= -j\omega \underline{\mu}_a \dot{H}; & \operatorname{div} \dot{H} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.42)$$

Можно показать, что из (11.42) для каждой проекции функций E , H (например, для E_z) следует уравнение вида:

$$-\operatorname{div}(\underline{\mu}_a^{-1} \operatorname{grad} \dot{E}) + (j \frac{\omega}{c} Z_B \underline{\gamma} - \frac{\omega^2}{c^2} \underline{\varepsilon}_a) \dot{E} = 0, \quad (11.43)$$

где $c = \sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_0} = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме; $Z_B = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 376,7$ Ом – волновое сопротивление вакуума.

Рассмотрим важный, с точки зрения практики, пример: плоская ЭВМ падает нормально из воздуха на поверхность проводника. В проводящей среде:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{J} = \gamma \bar{E}; \quad \operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = -\mu_a \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}.$$

В плоской волне E и H не зависят друг от друга, поэтому:

$$0 = -\mu_a \frac{\partial H_x}{\partial t}.$$

Отсюда $H_x = \text{const} = 0$.

Получаем:

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \gamma E_x; \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_a \frac{\partial H_y}{\partial t}.$$

Для гармонического поля амплитуды E_m и H_m и начальные фазы ψ_E и ψ_H , являются функциями только координаты z . Подставляя выражения для E_x и H_y в комплексной форме после сокращения на общий множитель $e^{j\omega t}$ получаем:

$$-\frac{d\dot{H}_m}{dz} = \gamma \dot{E}_m; \quad \frac{d\dot{E}_m}{dz} = -j\omega\mu_a \dot{H}_m.$$

Дифференцируя первое уравнение по z и используя выражение левой части второго уравнения, находим:

$$\frac{d^2 \dot{H}_m}{dz^2} = -j\omega\mu_a \gamma \dot{H}_m.$$

Общее решение этого уравнения:

$$\dot{H}_m = k_1 e^{-\alpha z} + k_2 e^{+\alpha z}, \quad (11.44)$$

где k_1, k_2 – константы интегрирования; $\alpha = \sqrt{j\omega\mu_a \gamma}$.

Второе слагаемое в правой части (11.44) равно ∞ при условии $z = \infty$. Поэтому, с точки зрения физического смысла, необходимо $k_2 = 0$.

Таким образом:

$$\dot{H}_m = k_1 e^{-\alpha z}. \quad (11.45)$$

Т. е. амплитуды напряженностей поля по мере проникновения волны вглубь проводящей среды убывают по показательному закону.

Отношение амплитуд электрического и магнитного поля на расстоянии длины волны λ от поверхности проводника к их значениям на поверхности равно $e^{-2\pi} = 0,00187$, т. е. волна практически затухает.

При наличии переменного ЭМП в проводящей среде наблюдается ряд физических эффектов, находящих применение на практике. Так переменный электрический ток на поверхности проводника вызывает в глубине проводника вихревые токи, причем результирующее поле внутри проводника уменьшается. Т. е. переменный электрический ток распределяется *неравномерно* по сечению проводов: плотность тока имеет наибольшие значения на поверхности провода и убывает по мере удаления от поверхности в глубь провода, – в этом и состоит так называемый *поверхностный эффект*.

11.4. Электромагнитное экранирование

11.4.1. Электромагнитное экранирование: основные понятия и физические процессы

Работа электротехнических устройств (ЭТУ) основывается на использовании тех или иных принципов преобразования энергии ЭМП, обеспечивающих полезные свойства устройства. При этом внешние поля оказывают дополнительное воздействие на ЭТУ и заставляет задуматься о существовании *паразитных электромагнитных связей* между разными ЭТУ, типы которых показаны на рис. 11.8.

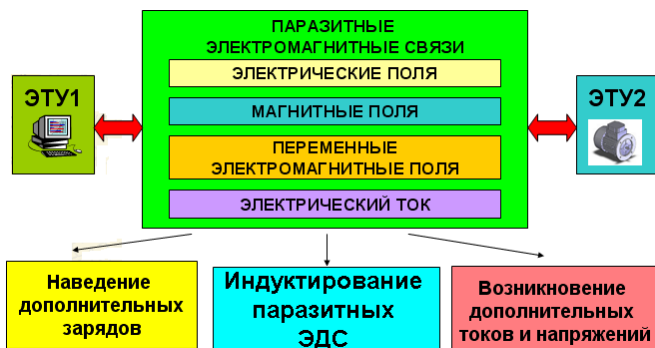


Рис. 11.8. Паразитные электромагнитные связи между электротехническими устройствами и их последствия

В металлических конструкциях и на отдельных участках цепей внешние поля наводят дополнительные заряды (при статических и стационарных полях) или индуктируют паразитные ЭДС и токи. Между отдельными участками цепи внутри ЭТУ могут возникать непредусмотренные разности потенциалов.

Для нарушения (уничтожения) паразитных электромагнитных связей в ЭТУ их экранируют.

Экранирование – это локализация электромагнитной энергии в пределах определенного пространства, что достигается путем преграждения распространения электромагнитной волны в защищаемую зону пространства любыми возможными способами. Экранирование может быть:

- *полным*, если подавляются все четыре вида паразитных электромагнитных связей;
- *частичным*, когда ликвидируются лишь наиболее существенные связи (частичное ослабление паразитных связей между цепями).

От качества экранирования зависит качество работы защищаемых устройств.

Экран – это комплекс деталей, (корпус, кожух, перегородки, фильтрующие ячейки), совместное действие которых на электромагнитное поле дает необходимый эффект защиты ЭТУ от паразитных электромагнитных связей. К экранам в широком смысле следует отнести металлические оболочки, сетки, короткозамкнутые витки и обмотки, магнитные шунты.

По принципу действия различаются следующие экраны:

- электромагнитные;
- магнитные;
- электростатические.

По размещению защищаемой зоны относительно источника поля экраны разделяются на:

- *наружные*, предохраняющие окружающую среду от проникновения поля из пространства, окруженного экраном;
- *внутренние*, предохраняющие пространство, охваченное экраном, от воздействия наружного поля.

По эффективности действия экраны могут быть:

- *непроходимые* (непрозрачные), в которых проникающая в них электромагнитная волна практически гасится перед противоположной стенкой экрана;
- *проходимые* (прозрачные), в которых проникающая в них электромагнитная волна, достигая противоположной стенки экрана, сохраняет еще значительное значение и отражается от стенки или проникает в последующее пространство.

По проходимости различают экраны:

- *закрытые*, в которых поле может попадать в зону вне экрана исключительно через стенку экрана;
- *открытые*, в которых поле может огибать экран;
- *полузакрытые*, в которых поле проникает в зону вне экрана двумя упомянутыми выше путями.

Принцип работы любого электромагнитного экрана определяется заложенным в него принципом подавления, локализации или ограничения воздействия внешних и внутренних электромагнитных полей на определенную защищаемую от них область пространства.

В теории экранирования учитываются общие закономерности распространения электромагнитного поля:

- напряженности электрического и магнитного полей в свободном пространстве обратно пропорциональны квадрату расстояния от элемента, возбуждающего поле.
- энергия ЭМВ обратно пропорциональна первой степени расстояния от элемента, возбуждающего поле.
- напряжение на конце проводной длинной линии с увеличением расстояния может изменяться весьма незначительно.

При малых расстояниях, соизмеряемых с длиной ЭМВ λ , действуют все четыре вида паразитных электромагнитных связей. С увеличением расстояния прежде всего исчезают связи через ближние электрические и магнитные поля. ЭМВ перестают влиять во вторую очередь. На значительных расстояниях дольше всего сохраняются электромагнитные связи по проводам и волноводам.

11.4.2. Виды экранирования и области их применения

Экранирование электрических полей применяется тогда, когда основное проявление паразитных связей происходит за счет электрического поля, т. е. за счет электрической составляющей ЭМП, а магнитная составляющая существенного влияния не оказывает.

Это означает, что главное влияние на объект оказывает напряженность электромагнитного поля \vec{E} , силы поля смещают заряды в диэлектрике («поляризация») или проводнике (электростатическая индукция), возникают токи смещения и, как следствие, – накопление зарядов на телах, оказавшихся в этом поле.

Следовательно, экранирование устройств от электрического поля – это создание препятствия токам смещения, разрушение паразитных емкостных связей.

Такому экранированию могут быть подвергнуты следующие электрические поля:

- а) электростатическое поле (поле, возбужденное неподвижными электрическими зарядами на телах);
- б) стационарное электрическое поле (поле постоянного тока);
- в) переменное электрическое поле низкой (≤ 5 кГц) частоты, когда еще слабо проявляется действие магнитных полей.

Электростатическое экранирование – это защита объекта от влияния электростатических (внешних и внутренних) полей.

Рассмотрим пример решения задачи защиты аппарата (прибора, цепи) от внешнего электростатического поля. Поместим ЭТУ внутрь экрана – металлического короба, как показано на рис. 11.9.

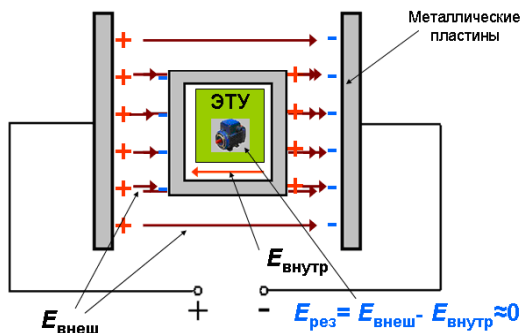


Рис. 11.9. Принцип работы электростатического экрана

На поверхности экрана наводятся электрические заряды. Внутри экрана поле полностью скомпенсировано так, что $E_{рез} = E_{внеш} - E_{внут} = 0$.

Практическая реализация такого экрана может быть осуществлена и в виде мелкой металлической сетки.

Об *экранировании магнитного поля* можно вести речь тогда, когда основную роль играют образовавшиеся магнитные паразитные связи, а именно связи через магнитное поле, а проявления электрических связей несущественно, т. е. экранирование магнитного поля – это разрушение магнитных паразитных связей. Главную роль в этих связях играет напряженность магнитного поля и связанные с ней индукция и магнитный поток.

Такому экранированию могут быть подвергнуты следующие магнитные поля:

а) магнитное поле, возбужденное постоянным током (магнитостатическое экранирование);

б) высокочастотное магнитное поле (до 1 МГц).

Если магнитное поле постоянное или стационарное (поле постоянных токов), то используются экраны из ферромагнетика ($\mu_a \gg \mu_0$), а экранирование называется *магнитостатическим*.

Принцип работы магнитостатического экрана иллюстрирует рис. 11.10.

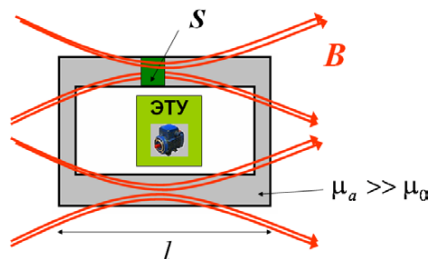


Рис. 11.10. Принцип работы магнитостатического экрана

Суть в том, что магнитный поток стремится замыкаться по путям наименьшего магнитного сопротивления:

$$R_M = \frac{l}{\mu_a \cdot S} .$$

Таким образом, применение стального экрана приводит к «выдавливанию» магнитного поля из пространства внутри экрана.

Экранирование *переменного высокочастотного магнитного поля* чаще всего производится с помощью экранов, изготовленных из немагнитных материалов. Оно основано на использовании явления электромагнитной индукции, которое приводит к возбуждению наведенных ЭДС и токов.

Поставим на пути переменного магнитного поля медный цилиндр, как показано на рис. 11.11.

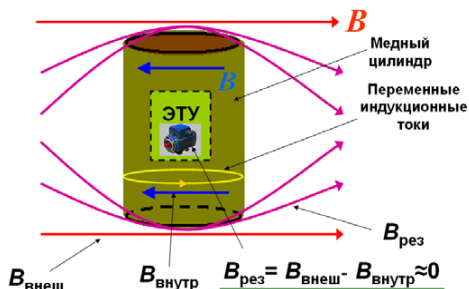


Рис. 11.11. Принцип построения экрана для экранирования переменного магнитного поля

В нем возбуждятся переменные ЭДС, которые, в свою очередь, создадут переменные индукционные вихревые токи. Магнитное поле этих токов будет замкнутым; внутри цилиндра оно будет направлено навстречу возбуждающему полю, а за его пределами – в ту же сторону, что и возбуждающее поле. Результирующее поле оказывается ослабленным у цилиндра и усиленным вне его, т.е. происходит вытеснение поля из пространства, занимаемого цилиндром, в чем и заключается его экранирующее действие. Очевидно, что оно будет тем больше, чем больше создаваемое цилиндром обратное магнитное поле и, следовательно, чем больше протекающие по нему вихревые токи.

Об *электромагнитном экранировании* приходится заботиться, защищая устройство от одинаково вредных паразитных электрической и магнитной составляющих ЭМП. Действие таких экранов может быть интерпретировано как многократное отражение ЭМВ от поверхности экрана и затухание энергии поля в толще экрана за счет тепловых потерь вихревых токов. Отражение энергии волны происходит из-за больших различий волновых сопротивлений сред диэлектрика и металла.