

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ**  
**УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**  
**«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»**

---

**ВЫСШАЯ ШКОЛА ТЕХНОЛОГИИ И ЭНЕРГЕТИКИ**

**Кафедра автоматизации технологических процессов**  
**и производств**



**Н. С. Благодарный**

## **ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

**Анализ систем автоматического управления**  
**в примерах и задачах**  
**(1 часть)**

**Практикум**

Санкт-Петербург  
2020

УДК 62-5 (076)  
ББК 32.965я2  
Б 681

**Благодарный Н.С.** Теория автоматического управления. Анализ систем автоматического управления в примерах и задачах (1 часть): практикум / ВШТЭ СПбГУПТД. – СПб., 2020. – 66 с.

Практикум содержит предварительные теоретические сведения и примеры решения задач анализа систем автоматического управления. Пособие снабжено задачами для самостоятельной работы по каждой теме (текущий контроль) и заданиями для контрольных работ (промежуточный контроль).

Предназначен обучающимся всех форм подготовки бакалавров направления 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств» для выполнения практических работ по первой части трехсеместрового курса «Теория автоматического управления».

Рецензенты: д-р техн. наук, профессор кафедры систем автоматического управления ФГАОУ ВО Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)

**Кузнецов В.Е.**

Канд. техн. наук, доцент, заведующий кафедрой информационно-измерительных технологий и систем управления ВШТЭ СПбГУПТД

**Сидельников В.И.**

Подготовлено и рекомендовано к печати кафедрой автоматизации технологических процессов и производств Института энергетики и автоматизации Высшей школы технологии и энергетики СПбГУПТД (протокол № 2 от 05.10.2020).

Утверждено к изданию методической комиссией Института энергетики и автоматизации Высшей школы технологии и энергетики СПбГУПТД (протокол № 2 от 29.10.2020).

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом Высшей школы технологии и энергетики Санкт-Петербургского государственного университета промышленных технологий и дизайна в качестве практикума.

©Высшая школа технологии  
и энергетики СПбГУПТД, 2020  
© Благодарный Н.С., 2020

## Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	5
1. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ.....	5
1.1. Предварительные сведения об истории развития теории автоматического управления.....	5
1.2. Контрольное задание .....	10
1.3. Основные понятия теории автоматического управления .	11
1.4. Пример анализа объекта управления .....	13
1.5. Задачи для самостоятельной работы.....	16
1.6. Фундаментальные принципы регулирования .....	17
1.6.1. Принцип регулирования по возмущению (компенсационный принцип)	17
1.6.2. Принцип регулирования по отклонению (принцип обратной связи).....	18
1.6.3. Комбинированный принцип регулирования.....	20
1.7. Задачи для самостоятельной работы.....	21
2. СОСТАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СТАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.....	21
2.1. Предварительные сведения о динамических уравнениях и передаточной функции .....	21
2.2. Примеры на составление динамических уравнений .....	24
2.2.1. Пневматическая емкость.....	24
2.2.2. Гидравлическая емкость .....	26
2.2.3. Термопара.....	28
2.2.4. Гидравлический демпфер .....	30
2.2.5. Электрическая цепь .....	31
2.3. Задачи для самостоятельной работы.....	33
2.4. Контрольная работа .....	35
2.5. Примеры на составление передаточных функций.....	37
2.6. Задачи для самостоятельной работы.....	37
2.7. Предварительные сведения о линеаризации .....	38
2.8. Примеры на линеаризацию .....	40
2.9. Задачи для самостоятельной работы.....	41

3. РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ .....	41
3.1. Предварительные сведения .....	41
3.2. Примеры .....	42
3.3. Задачи для самостоятельной работы.....	44
4. ПОСТРОЕНИЕ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК .....	45
4.1. Предварительные сведения .....	45
4.2. Примеры .....	48
4.3. Задачи для самостоятельной работы.....	52
5. ПОСТРОЕНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК.....	53
5.1. Предварительные сведения.....	53
5.2. Примеры .....	54
5.3. Задачи для самостоятельной работы.....	60
5.4. Построение логарифмических характеристик сложных звеньев .....	60
5.5. Примеры .....	61
5.6. Задачи для самостоятельной работы.....	64
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....	64
ПРИЛОЖЕНИЕ .....	65

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория автоматического управления является важнейшей дисциплиной в формировании специалиста по автоматизации технологических процессов и производств. Она прививает студенту умения всесторонне анализировать существующие автоматические системы и синтезировать новые. Эта дисциплина, кроме глубоко проработанной теоретической составляющей, имеет ярко выраженную практическую направленность.

Настоящий практикум нацелен на изучение практической составляющей дисциплины. В пособии рассмотрены основные разделы первой части анализа систем автоматического управления.

### 1. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

#### 1.1. Предварительные сведения об истории развития теории автоматического управления

С древних времен людей привлекали технические устройства, совершающие некоторые действия самостоятельно, без участия человека. Такие самодействующие машины в виде капканов и ловушек животных широко использовались, к примеру, на охоте.

Известный изобретатель древности Герон Александрийский в своей книге «Пневматика» описал принципы действия многих интересных самодействующих механизмов, используемых со II в. до н. э., таких как: автомат для продажи воды или вина, устройство зажигания священного огня в храме, переносной насос для тушения пожаров и т.д.

*Автомат (от греческого *autómatos* - самодействующий)* – самостоятельно действующее устройство, выполняющее по заданной программе без непосредственного участия человека процессы получения, преобразования, передачи и использования энергии, материала и информации [1]. Автоматы применяются для повышения производительности и облегчения труда человека, для освобождения его от работы в труднодоступных или опасных для жизни условиях.

Важной особенностью автоматических устройств, улучшающей точность и качество их работы является так называемая *обратная связь*, подробно описанная в следующем параграфе. Первым автоматическим устройством с обратной связью был поплавковый регулятор уровня, примененный в водяных часах Ктезибия (2-ой век до н. э.), в котором чувствительный элемент был совмещен с исполнительным механизмом в форме поплавка, чтобы повысить точность их показаний. Великие механики средних веков создавали весьма совершенные для тех времен автоматические устройства с обратной связью: термостат Дреббеля, паровой котел Папена, ветряная мельница Эдмунда Ли и др.

В средние века значительное развитие получила так называемая "андроидная" автоматика, когда механики создали ряд автоматов, подражающих отдельным действиям человека, и, чтобы усилить впечатление, изобретатели придавали автоматам внешнее сходство с человеком и называли их "андроидами", т.е. человекоподобными. В 13-м веке немецкий философ-схоласт и алхимик Альберт фон Больштадт построил робота для открывания и закрывания дверей. Весьма интересные андроиды были созданы в 17-18 веках. Швейцарские часовщики Пьер Дро и его сын Анри создали механического писца, механического художника и др. Прекрасный театр автоматов был создан русским механиком-самоучкой Кулибиным. Его театр, хранящийся в Эрмитаже, помещен в "часах яичной фигуры".

Первые автоматические устройства, созданные людьми, создавались и использовались, как правило, в религиозных или развлекательных целях. Практического значения автоматы древности и средневековья, за редким исключением, не имели.

Бурное развитие практических автоматических устройств происходило в 18-м веке в связи с началом широкого применения паровых машин, стабильная работа которых без автоматических регуляторов невозможна. Важнейшими изобретениями этого времени стали изобретения русским механиком И. И. Ползуновым автоматического регулятора питания парового котла (1765) и английским изобретателем Дж. Уаттом центробежного регулятора скорости паровой машины (1784), ставшей после этого основным источником механической энергии для привода станков, машин и механизмов. В параграфе 1.3 будут разобраны принципы действия этих регуляторов.

К первым промышленным регуляторам относят также первое программное устройство управления ткацким станком от перфокарты, построенное в 1808 году Жаккардом. Оно применялось для воспроизведения узоров на коврах. Эти регуляторы как бы открыли путь потоку изобретений принципов регулирования и регуляторов, продолжающемуся вплоть до середины 20-го века.

Основы науки об автоматическом управлении впервые были изложены в статье английского физика Дж. К. Максвелла "О регулировании" (1868) и труде русского учёного И. А. Вышнеградского "О регуляторах прямого действия" (1877), в котором впервые регулятор и машина рассматривались как единая система.

Большое значение для развития теории регулирования имели исследования А. Ляпунова. Его труд, опубликованный в 1892 г., "Общая задача устойчивости движения" явился важной вехой в развитии теории устойчивости. В этой работе А. Ляпунов дал первое в истории науки математически строгое определение устойчивости движения, а также разработал два метода решения задач об устойчивости.

Крупный вклад в теорию внес Н. Жуковский, который создал теорию орбитальной устойчивости на основе вариационных принципов динамики, а также дал математическое описание процессов в длинных трубопроводах, рассмотрел влияние сухого трения в регуляторах, исследовал некоторые процессы импульсного регулирования. Им написан первый русский учебник "Теория регулирования хода машин" (1909 г.).

К началу 20-го века и в первом его десятилетии теория автоматического регулирования формируется как научно-практическая дисциплина. Этому способствовали работы И. Вознесенского (1922 – 1949 гг.) – руководителя одной из крупных советских школ в этой области, который в 1934 г. впервые выдвинул принцип автономного регулирования.

В тридцатые годы 20-го века создаются более эффективные методы исследования, в частности, частотные. Появляются работы Х. Найквиста (1932 г.), формулирующие критерий устойчивости радиотехнических усилителей с обратной связью, и А. Михайлова (1938 г.) "Гармонический метод в теории регулирования", которые вошли в практику в послевоенные годы.

В 1946 г. Г. Боде и Л. Маккол ввели логарифмические частотные характеристики. Г. Браун, А. Холл, Д. Кемпбелл, Г. Честнат, В. Солодовников завершили разработку частотных методов синтеза и расчета систем, придав им форму, удобную для инженерных расчетов. В 40 – 50-е годы разрабатываются основы теории нелинейных систем, сложность которых состоит в отсутствии единого общего математического аппарата. Здесь следует отметить работы по устойчивости А. Лурье (1944 – 1951 гг.), А. Летова (1955 г.).

Завершающим этапом этого направления считается разработка теории абсолютной устойчивости, выдвинутой А. Лурье и В. Постниковым (1944 г.), более детально сформулированной М. Айзерманом (1949, 1963 гг.) и доведенной до изящного решения румынским ученым В. Поповым (1959 г.).

Большое значение для качественного исследования нелинейных систем имеют методы фазовой плоскости и фазового пространства, основы которых заложены А. Андроновым и его школой в 1930 – 1940 гг. Я. Цыпкиным разработаны основы теории релейных (1955 г.) и импульсных (60-е годы) систем с различными видами модуляции. Н. Крыловым и Н. Боголюбовым (1934 г.) разработан метод гармонического баланса для определения параметров автоколебаний и условий их возникновения.

В послевоенные годы теория автоматического управления развивалась плодотворно, и упомянуть обо всех направлениях и авторах просто невозможно. Вот некоторые из них: теория автоматического регулирования по возмущению, теория компенсации возмущений и инвариантности разработаны в трудах Г. Щипанова, В. Кулебакина, Б. Петрова и др.; принципы экстремального управления и теория поиска экстремума разработаны В. Казакевичем. А. Фельдбаумом, А. Красовским. В эти же годы создаются основы теории оптимального управления Л. Понтрягиным. А. Летовым, Н. Красовским и др.

Теория автоматического управления стала основой общей науки об управлении – кибернетики, а наука, изучающая теорию и принципы автоматического управления работой машин и устройств, получила название технической кибернетики.

Еще в 1834 году французский физик, электротехник и математик Андре Мари Ампер выпустил книгу «Очерки по философии наук», в которой был приведен список наук известных автору и тех, которые, по его мнению, должны были вот-вот появиться. Под номером 83 в этом перечне значилась



«Кибернетика» – наука об управлении обществом. Название науке придумал сам Ампер, воспользовавшись греческим понятием «Кибернетос», означавшим «рулевой», «управляющий», «кормчий».

Через сто с лишним лет, в 1948 году, в США вышла в свет книга профессора Норберта Винера под названием «Кибернетика или управление и связь в живых организмах и системах». Этот год и принято считать годом становления кибернетики.

Объектами изучения в кибернетике, науке об управлении, являются автоматические регуляторы, ЭВМ, человеческий мозг, биологические популяции, человеческое общество и т.д. Каждая такая система представляет множество взаимосвязанных объектов, способных воспринимать, запоминать и перерабатывать информацию, а также обмениваться ею.

Современная кибернетика состоит из ряда разделов, представляющих собой самостоятельные научные направления, к которым относятся: теория информации, теория алгоритмов, теория автоматов, теория исследования операций, теория распознавания образов, теория оптимального управления. По прикладному признаку кибернетика подразделяется на: биологическую, медицинскую, военную, экономическую, техническую. Именно последней в вышеприведенном перечислении и уделяется внимание в настоящем пособии. Техническая кибернетика включает теорию автоматического управления, теорию оптимальных и адаптивных систем, теорию надежности, теорию искусственного интеллекта.

Теория автоматического управления разрабатывает принципы построения систем автоматического и автоматизированного управления и изучает основные закономерности протекающих в них процессов [1]. Следует отметить, что при изучении процессов управления теория абстрагируется от природы и конструктивных особенностей устройств и элементов. Вместо реальных объектов теория автоматического управления рассматривает их адекватные модели, именуемые звеньями. Решение задач в теории автоматического управления сводится к изучению характеристик, свойств и особенностей работы объектов и систем автоматического управления, определению структуры и параметров управляющих устройств.

## 1.2. Контрольное задание

**1.2.1.** Посмотрите фильм № 6 «Автоматические устройства» из серии «Технологии древних цивилизаций» по ссылке: <https://dokonline.com/dokumentalnie-filmi/10759-tehnologii-drevnih-civilizacij-echhnology-of-ancient-civilizations-2011.html>. Ответьте на вопросы: Что называлось ценнейшим товаром в древние века, почему? О каких механизмах рассказывается в фильме, кто их изобретатель? Опишите принципы действия этих механизмов. Для чего они использовались?

**1.2.2.** Приведите иллюстрацию и опишите принцип действия одного из древних автоматических устройств (по вариантам), этапы его усовершенствования, приведите примеры использования подобных устройств в наши дни, укажите, как усовершенствованы эти устройства сегодня. Ответ оформите в виде небольшого реферата (2-3 страницы). Варианты задания:

- 1 Автоматические двери Герона;
- 2 Древний торговый автомат;
- 3 Переносной насос для тушения пожаров Герона;
- 4 Превращение воды в вино;
- 5 Фонтан Герона;
- 6 Музыкальная шкатулка предсказаний;
- 7 Геркулес и дракон Герона;
- 8 Полиболос Герона;
- 9 Автоматический ручной арбалет Герона;
- 10 Автоматические передвижные декорации Герона;
- 11 Автоматический театр Герона;
- 12 Диоптра Герона;
- 13 Одометр Герона;
- 14 Эолипил;
- 15 Гидравлос;
- 16 Клепсидра (водяные часы) Ктесибия;
- 17 Автоматон;
- 18 Термостат Дреббеля;
- 19 Регулятор парового котла Папена;
- 20 Ветряная мельница Эдмунда Ли.

### 1.3. Основные понятия теории автоматического управления

*Системы автоматического регулирования (САР)* работают самостоятельно, без участия человека. Чаще всего это несложные системы, предназначенные для регулирования (управления) одной или несколькими физическими переменными, например, уровнем жидкости в емкости, температурой химического реактора, скоростью вращения электродвигателя, курсом летательного аппарата и другими. Автоматические системы используются для управления теми объектами, где участие человека в управлении невозможно, например, вследствие агрессивной внешней среды, или нецелесообразно, например, из-за простоты решаемых задач.

*Автоматизированные системы регулирования (АСР)* работают под контролем человека и с его участием. Как правило, это сложные системы, объединяющие множество простых САР различными физическими переменными, которые связаны между собой определенным технологическим процессом. Участие человека в управлении такими объектами обусловлено тем, что ввиду сложности и многообразия задач управления, в объектах могут возникать непредвиденные (нештатные) ситуации, с которыми может справиться только опытный подготовленный оператор. Примерами АСР являются системы управления реакторным узлом производства бензола или отделением ректификации производства стирола на химическом предприятии.

В дальнейшем в нашей дисциплине «Теория автоматического управления» будут рассматриваться, в основном, автоматические (САР), а не автоматизированные системы. Автоматизированные (АСР) системы будут изучаться на старших курсах, в других дисциплинах.

*Теория автоматического управления (ТАУ)* – научно-практическая дисциплина, в рамках которой изучаются свойства систем автоматического управления, разрабатываются принципы построения и расчета таких систем.

Типовая структура САР изображена на рисунке 1.1. Ниже будут даны определения составных элементов и сигналов САР.

*Объект управления (ОУ)* – техническое устройство, часть технологического процесса или социально-экономическая система, которые для нормального функционирования нуждаются в управлении.

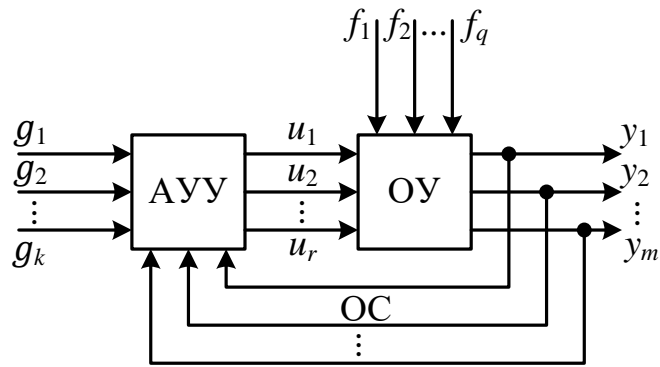


Рисунок 1.1 – Типовая структура САР

*Выходные переменные объекта управления (регулируемые переменные)  $y(t)$*  – физические переменные, которые в процессе управления необходимо поддерживать на заданном значении или изменять по заданному закону.

*Входные переменные объекта управления (регулирующие воздействия на объект)  $u(t)$*  – физические переменные, изменением которых достигается цель управления.

*Цель управления* состоит в поддержании регулируемых переменных  $y(t)$  на требуемом значении или в изменении их по заданному закону:  $y(t) \rightarrow y_{\text{треб}}(t)$ , или в более строгой математической записи:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_{\text{треб}}(t). \quad (1.1)$$

На практике достижению цели управления всегда препятствуют возмущающие воздействия.

*Возмущающие воздействия  $f(t)$*  – случайные внешние воздействия окружающей среды на объект управления. Чаще всего возмущающие воздействия недоступны измерению.

*Автоматическое управляющее устройство (АУУ) или регулятор* – техническое устройство, вырабатывающее, по заранее заложенным в него алгоритмам, регулирующие воздействия на объект  $u(t)$  для достижения цели управления (1.1).

*Задающие воздействия  $g(t)$*  – внешние воздействия на АУУ, соответствующие требуемым значениям регулируемых переменных, т.е.  $g(t) = y_{\text{треб}}(t)$ . С учетом этого цель управления (1.1) можно переписать в виде:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = g(t). \quad (1.2)$$

Обратите внимание, что все упомянутые переменные изменяются с течением времени  $t$  (являются функциями времени), поэтому в их обозначениях указывается время.

*Система автоматического управления (САУ)* – совокупность объекта управления (*ОУ*), автоматического управляющего устройства (*АУУ*) и их взаимосвязи (рисунок 1.1).

Обратите внимание, на АУУ вместе с задающими воздействиями  $g(t)$  необходимо подавать также и заранее измеренные регулируемые переменные  $y(t)$ . Действительно, для эффективного управления объектом на АУУ должна поступать информация как о требуемых значениях регулируемых переменных, так и о текущих значениях последних. Связь, обеспечивающая подачу информации о текущих значениях регулируемых переменных на АУУ, называется *обратной связью (ОС)*. Любая САУ должна содержать обратную связь. Система с обратной связью называется *замкнутой*.

## 1.4. Пример анализа объекта управления

**1.4.1.** Рассмотрите в качестве объекта управления емкость с жидкостью, в которой требуется поддерживать уровень жидкости на требуемом значении. Жидкость в емкость нагнетается насосом, регулирующий клапан установлен на сливе жидкости из емкости. Укажите регулируемую переменную, регулирующее воздействие на объект, сформулируйте цель управления, перечислите возможные возмущающие воздействия на объект. Изобразите САУ уровнем в емкости, укажите задающее воздействие и обратную связь. Поясните, как будет работать система в случае появления протечек в емкости, изменения производительности насоса, остановки насоса.

**Решение.** На рисунке 1.2 изображена САУ уровнем жидкости в емкости, который требуется поддерживать на заданном значении. В этом примере объектом управления является емкость с жидкостью. Регулируемая переменная объекта  $y(t)$  – уровень жидкости, так как именно эту физическую переменную необходимо стабилизировать. Управлять уровнем можно, изменяя положение клапана, расположенного на трубопроводе вытекающей из емкости жидкости. Поэтому регулирующим воздействием  $u(t)$  служит расход вытекающей жид-

кости или положение упомянутого клапана. Цель управления состоит в поддержании уровня жидкости на требуемом значении. Этому могут препятствовать различные возмущающие воздействия, такие, например, как: изменение производительности насоса (Н), нагнетающего жидкость в емкость; изменение проходного сечения трубопровода вытекающей жидкости, вследствие отложения на стенках труб остатков продукта и образования «наростов»; появления утечек в емкости и т.д. Все эти возмущения приводят к отклонению регулируемой переменной (уровня) от требуемого значения.

Для обеспечения цели управления установлено АУУ, на которое подается от внешнего задающего устройства (З) информация о требуемом значении уровня. Эта информация поступает, как правило, в виде *унифицированного* электрического сигнала (тока или напряжения), пропорционального требуемому значению уровня. *Унифицированным* называется такой электрический сигнал, который позволяет согласовать взаимодействие устройств передачи и приема этих сигналов. В настоящее время наиболее распространен унифицированный токовый сигнал, изменяющийся в диапазоне от 4 до 20 мА.

Кроме того, на АУУ подается сигнал (тоже, как правило, электрический), пропорциональный текущему значению регулируемой переменной (уровню). Этот сигнал вырабатывается датчиком уровня (ЛТ) со встроенным в него преобразователем электрического сигнала. Тем самым в системе организуется обратная связь, образующая замкнутый контур регулирования.

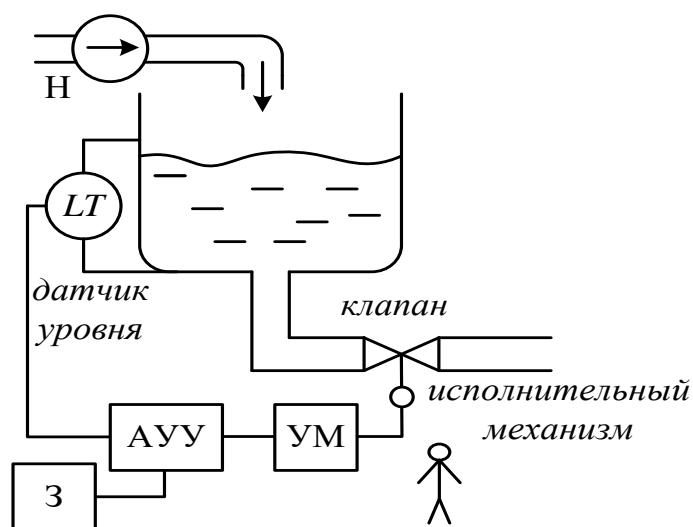


Рисунок 1.2 – Пример САУ уровнем жидкости

АУУ реагирует на отклонения уровня от требуемого значения, т.е. на разность между задающим воздействием  $g(t)$  и регулируемой переменной  $y(t)$ , которая называется *ошибкой регулирования*:  $e(t) = g(t) - y(t)$ . При наличии ошибки регулирования АУУ вырабатывает регулирующее воздействие на исполнительный механизм (электродвигатель или пневматический мембранный механизм). Выходной сигнал АУУ перед подачей на исполнительный механизм усиливается по мощности усилителем (УМ). В случае появления протечек в емкости, изменения производительности насоса, остановки насоса, исполнительный механизм приводит в движение клапан, при этом изменяется расход вытекающей из емкости жидкости, и уровень возвращается на требуемое значение.

В качестве управляющего устройства (не автоматического) может выступить человек, который должен будет вручную изменять положение клапана. Для этого ему необходимо сообщить требуемое для поддержания значение уровня и постоянно давать информацию о текущем его значении, например, с помощью показывающего уровнемера. Очевидно, что человек не сможет эффективно решать эту задачу, в отличие от автоматического устройства.

Из описанного примера видно, что типовая структура САУ, изображенная на рисунке 1.1 является весьма упрощенной. Любая реальная система содержит кроме объекта и АУУ несколько других обязательных элементов, таких как датчик, исполнительный механизм, рабочий орган (клапан) и др. Подробная структурная схема САУ показана на рисунке 1.3. Однако с целью упрощения структурных схем мы будем в дальнейшем изображать САУ так, как показано на рисунке 1.1, считая, что все другие элементы системы отнесены к объекту управления.

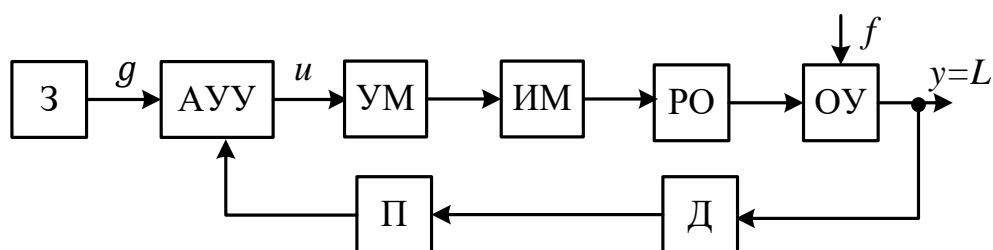


Рисунок 1.3 – Структурная схема САУ:  $З$  – задающее устройство; АУУ – регулятор; УМ – усилитель мощности; ИМ – исполнительный механизм; РО – рабочий орган (клапан); ОУ – объект управления; Д – датчик (измеряющее устройство); П – преобразователь сигнала

## 1.5. Задачи для самостоятельной работы

**1.5.1.** Рассмотрите в качестве объекта управления отсек летательного аппарата, в котором требуется поддерживать пригодное для жизни человека значение давления воздуха, нагнетаемого компрессором из окружающей атмосферы. Отработанный воздух отводится в атмосферу. Укажите регулируемую переменную, регулирующее воздействие на объект, сформулируйте цель управления, перечислите возможные возмущающие воздействия на объект. Изобразите САУ давлением в отсеке, укажите задающее воздействие и обратную связь. Поясните, как будет работать система в случае частичной разгерметизации отсека, изменения производительности компрессора, изменения высоты полета летательного аппарата (давления окружающей атмосферы). Решение выполнить письменно.

**1.5.2.** Рассмотрите в качестве объекта управления холодильную камеру. Укажите регулируемую переменную, регулирующее воздействие на объект, сформулируйте цель управления, перечислите возможные возмущающие воздействия на объект. Изобразите САУ температурой в камере, укажите задающее воздействие и обратную связь, укажите, что представляют собой все элементы структурной схемы САУ (рисунок 1.3). Поясните, как будет работать система в случае частичной разгерметизации камеры, изменения производительности холодильного компрессора, изменения температуры окружающей среды. Решение выполнить письменно.

**1.5.3.** Рассмотрите в качестве объекта управления бытовой утюг. Укажите регулируемую переменную, регулирующее воздействие на объект, сформулируйте цель управления, перечислите возможные возмущающие воздействия на объект. Изобразите САУ температурой утюга, укажите задающее воздействие и обратную связь, укажите, что представляют собой все элементы структурной схемы САУ (рисунок 1.3). Поясните, как будет работать утюг в случае попадания влаги на подошву, изменения напряжения в электрической сети, изменения температуры окружающей среды. Укажите, что является датчиком температуры утюга, за счет чего обеспечивается стабилизация температуры? Решение выполнить письменно.

**1.5.4.** Сформулируйте цель управления (1.2) относительно ошибки регулирования  $e(t)$ , запишите формулу.



## 1.6. Фундаментальные принципы регулирования

Существует три основных (фундаментальных) принципа построения автоматических систем. Они называются фундаментальными принципами регулирования. Рассмотрим подробно каждый из этих принципов.

### 1.6.1. Принцип регулирования по возмущению (компенсационный принцип)

Принцип регулирования по возмущению впервые предложен французским инженером Ж. Понселе в 1830 году для регулирования скорости паровой машины по моменту сопротивления на ее валу.

Цель управления (1.1) или (1.2) можно достичь, если полностью скомпенсировать возмущения, действующие на объект и вызывающие отклонение регулируемой переменной  $y(t)$  от требуемого значения  $g(t)=y_{\text{треб}}(t)$ . В этом и заключается принцип регулирования по возмущению, называемый также *компенсационным*.

Для поддержания регулируемой переменной на заданном значении, датчиком измеряется возмущающее воздействие на объект и после преобразования подается на АУУ с целью компенсации влияния этого возмущения на регулируемую переменную. На рисунке 1.4 изображена структурная схема, реализующая принцип регулирования по возмущению. Как видно из рисунка, система не имеет обратной связи, т.е. является *разомкнутой*.

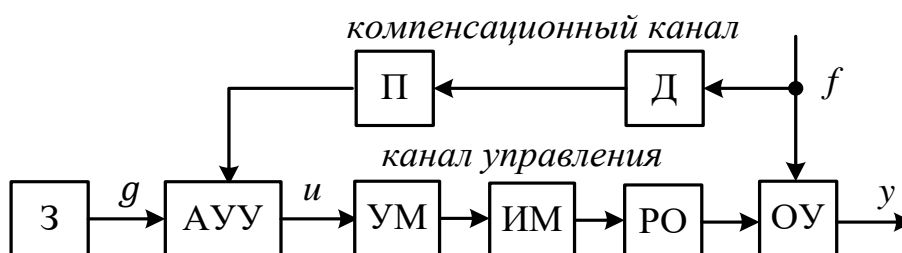


Рисунок 1.4 – Схема регулирования по возмущению

Специально построенный канал для устранения влияния возмущения на объект называется *компенсационным*. Регулирующее воздействие на объект  $u(t)$  подается по каналу *управления*.

*Достоинство* принципа регулирования по возмущению состоит в том, что теоретически можно полностью устранить влияние конкретного возмущения на систему, т.е. сделать систему полностью *инвариантной* (независимой) по отношению к этому возмущению.

*Недостатки* этого принципа регулирования следующие:

- Для каждого возмущения требуется строить собственный компенсационный канал, что увеличит вес, габариты и стоимость системы;
- Ряд возмущений измерить невозможно, следовательно, невозможно построить компенсационный канал;
- Для полной компенсации возмущения необходимо в компенсационном канале использовать прецизионные (высокоточные) элементы со стабильными характеристиками, что увеличивает стоимость системы.

Из-за столь серьезных недостатков, принцип регулирования по возмущению на практике применяется крайне редко.

### **1.6.2. Принцип регулирования по отклонению (принцип обратной связи)**

С этим принципом регулирования мы уже знакомы в п. 1.2 на примере стабилизации уровня жидкости в емкости (рисунок 1.2). В рассмотренном примере система реагировала на отклонение регулируемой переменной (уровня) от требуемого значения, поэтому принцип регулирования и называется «по отклонению».

Впервые принцип регулирования по отклонению был предложен русским механиком И. Ползуновым в 1765 году для регулирования уровня в котле паровой машины. Регулятор, изображенный на рисунке 1.5 а, представляет собой поплавков 1, связанный системой рычагов с регулирующей заслонкой 2. При увеличении уровня поплавков поднимается вверх, в результате чего заслонка опускается, перекрывая трубопровод и уменьшая подачу воды в котел.

В 1784 году английский инженер Уатт (независимо от Ползунова) применил этот принцип для центробежного регулятора скорости вращения вала паровой машины, показанного на рисунке 1.5, б. При увеличении скорости вала грузы 1 под действием центробежной силы перемещаются вверх, что приводит к смещению регулирующего органа 2 и уменьшению подачи пара. Это в свою очередь вызывает уменьшение скорости вращения вала паровой машины.

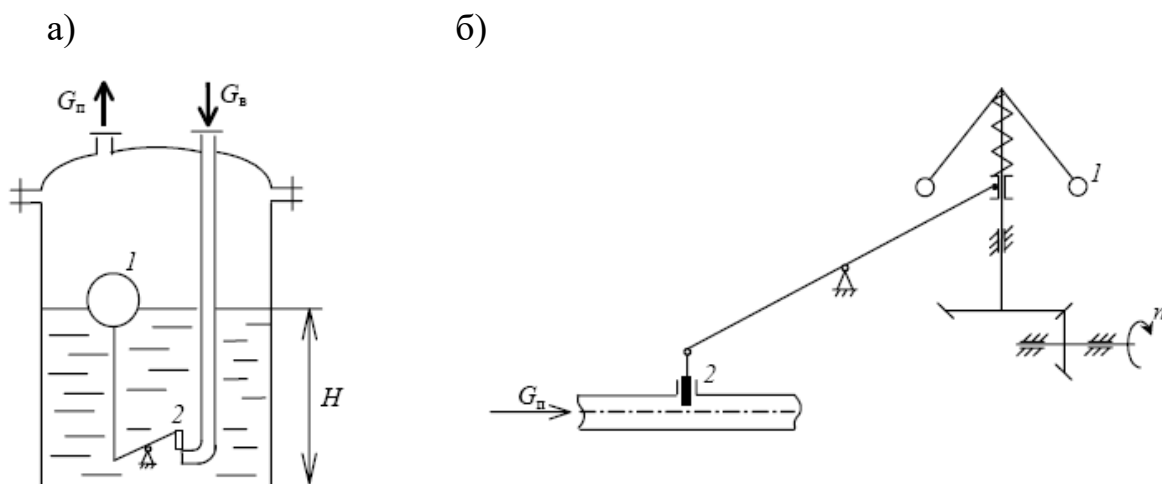


Рисунок 1.5 – Регуляторы И. Ползунова (а) и Д. Уатта (б)

Во всех рассмотренных примерах (рисунки 1.2, 1.5) регулирование обеспечивается за счет организации обратной связи, поэтому этот принцип регулирования называют также *принципом обратной связи*.

Структурная схема, реализующая принцип регулирования по отклонению, показана на рисунке 1.6. Обратите внимание, что на АУУ подается сигнал ошибки регулирования  $e(t) = g(t) - y(t)$  (отклонение регулируемой переменной  $y(t)$  от требуемого значения  $g(t)$ ), называемый «сигнал рассогласования». На схеме элемент, производящий вычитание, изображается в виде окружности и называется *сумматор*. Сумматор, как правило, входит в состав АУУ. Здесь суммируется отрицательный сигнал  $-y(t)$ , так как возле стрелки с сигналом указан знак «минус», поэтому и производится вычитание.

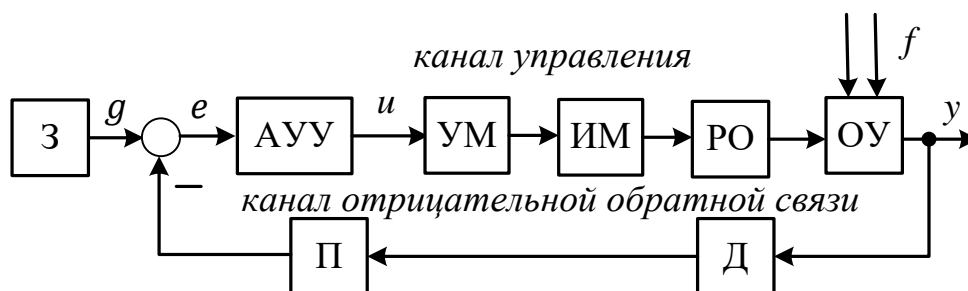


Рисунок 1.6 – Схема регулирования по отклонению

Таким образом для реализации принципа регулирования по отклонению измеряется регулируемая переменная объекта  $y(t)$  и с отрицательным знаком, после сравнения с требуемым значением  $g(t)$ , подается на АУУ.

*Достоинства* принципа регулирования по отклонению:

- С помощью единственной обратной связи можно подавить влияния всех возмущений на ОУ, даже тех, которые невозможно измерить;
- В канале обратной связи нет необходимости использовать прецизионные элементы, так как сам принцип регулирования предполагает наличие ошибки регулирования (рассогласования);

*Недостаток:* за счет наличия обратной связи в системе возникает проблема устойчивости.

На практике в подавляющем большинстве случаев применяются системы с обратной связью.

### 1.6.3. Комбинированный принцип регулирования

Комбинированный принцип сочетает в себе оба предыдущих принципа. Помимо обратной связи в системе строится компенсационный канал для устранения влияния наиболее сильного возмущения. Структурная схема, реализующая комбинированный принцип регулирования, показана на рисунке 1.7.

*Достоинства* принципа очевидны, так как он сочетает в себе достоинства двух предыдущих принципов и ослабляет их недостатки.

*Недостаток:* относительная сложность в реализации.

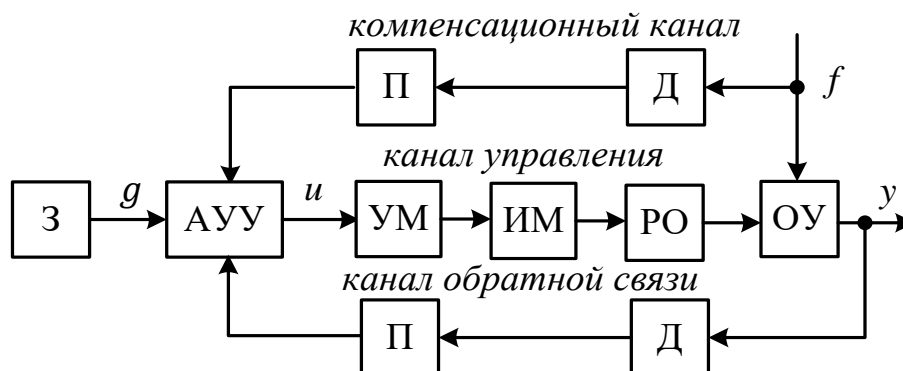


Рисунок 1.7 – Схема комбинированного регулирования

Комбинированные системы регулирования нередко применяются на практике, в системах промышленной автоматики часто их можно встретить на тепловых электростанциях при управлении котельными агрегатами. Эти системы используются в тех случаях, когда на объект воздействует сильное возмущение, которое можно измерить, а следовательно, скомпенсировать.

### **1.7. Задачи для самостоятельной работы**

**1.7.1.** Перечислите возмущающие воздействия на объект, изображенный на рисунке 1.2, которые невозможно измерить.

**1.7.2.** Постройте систему, инвариантную по отношению к изменению расхода притекающей жидкости в емкость, изображенную на рисунке 1.2. Как будет работать Ваша система с учетом погрешности датчика расхода?

**1.7.3.** Выполните предыдущее задание при условии, что насос расположен на трубопроводе стока.

**1.7.4.** Приведите пример использования системы с обратной связью в промышленности. Изобразите структурную схему этой системы, указав все ее переменные и возмущающие воздействия на объект.

**1.7.5.** Приведите пример использования комбинированной системы регулирования в промышленности. Изобразите структурную схему этой системы, указав все ее переменные и возмущающие воздействия на объект.

## **2. СОСТАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СТАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

### **2.1. Предварительные сведения о динамических уравнениях и передаточной функции**

Динамические уравнения характеризуют работу объекта в переходном режиме, при изменении его переменных во времени. Это изменение может происходить из-за влияния на объект управляющих или возмущающих воздействий. Динамические уравнения записываются в форме дифференциальных уравнений.

Построение динамических уравнений начинается с изучения объекта управления. Выделяются входная и выходная переменные объекта. Выходной

$y(t)$  является регулируемая переменная объекта, т.е. та переменная, которая должна поддерживаться на заданном уровне или изменяться по заданному закону. Входной  $u(t)$ , является регулирующая переменная объекта, т.е. та переменная, изменением которой осуществляется процесс регулирования.

Уравнения объекта получают на основе анализа физических закономерностей протекающих в нем процессов. Эти закономерности формируются в виде уравнений, описывающих те или иные физические законы, справедливые для данного объекта. Уравнения переводятся в дифференциальную форму, при необходимости линеаризуются. Далее из уравнений исключаются промежуточные переменные. После упрощения приходят к окончательному динамическому уравнению, связывающему входную и выходную переменные объекта.

Для произвольного односвязного линейного стационарного объекта управления с сосредоточенными параметрами динамическое уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} a_n \cdot y^{(n)}(t) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \cdot y'(t) + a_0 \cdot y(t) = \\ = b_m \cdot u^{(m)}(t) + b_{m-1} \cdot u^{(m-1)}(t) + \dots + b_1 \cdot u'(t) + b_0 \cdot u(t), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $n$  – наивысший порядок производной от выходной переменной, называемый порядком объекта. Коэффициенты  $a_0, \dots, a_n$  и  $b_0, \dots, b_m$ , называются *параметрами* объекта и характеризуют конструктивные параметры объекта, физические и химические свойства веществ, гидродинамические и тепловые константы.

Удобнее использовать другую форму записи уравнения (2.1), называемую *нормальной*. Поделим обе части этого уравнения на коэффициент  $a_0$ , получим:

$$\begin{aligned} T_n^n \cdot \frac{d^n y(t)}{dt^n} + T_{n-1}^{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + T_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \\ = k \left( \tau_m^m \cdot \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \tau_{m-1}^{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + \tau_1 \frac{du(t)}{dt} + u(t) \right), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где коэффициенты  $T_n^n = \frac{a_n}{a_0}, \dots, T_1 = \frac{a_1}{a_0}, \tau_m^m = \frac{b_m}{b_0}, \dots, \tau_1 = \frac{b_1}{b_0}$  называются *постоянными времени* объекта и имеют размерность времени, например секунды (с):  $[T_n], \dots, [T_1], [\tau_m], \dots, [\tau_1] = c$ ;  $k = \frac{b_0}{a_0}$  – коэффициент передачи объекта.

При решении задач необходимо стараться привести динамическое уравнение к виду (2.2).

Из динамического уравнения легко получить *статическое* уравнение, которое характеризует работу объекта управления в установившемся режиме после окончания протекания в нем переходных процессов, т.е. при  $t \rightarrow \infty$ . Для этого в динамическом уравнении достаточно приравнять к нулю все производные, так как производная от установившегося (постоянного) сигнала равна нулю. Из уравнений (2.1) или (2.2) получаем статическое уравнение:

$$y(\infty) = \frac{b_0}{a_0} \cdot u(\infty) = k \cdot u(\infty). \quad (2.3)$$

Очевидно, что если в уравнении (2.1) коэффициент  $b_0$  окажется нулевым, то правая часть уравнения (2.3) тоже равна нулю.

Передаточной функцией объекта  $W(p)$  называют отношение изображения по Лапласу выходной переменной объекта  $y(p)$  и входной  $u(p)$  при нулевых начальных условиях:  $W(p) = y(p)/u(p)$ . Передаточная функция полностью, как и динамическое уравнение, характеризует динамику объекта по определенному каналу, связывающему определенный вход и выход объекта.

Если задано динамическое уравнение объекта, то для получения передаточной функции необходимо преобразовать по Лапласу это дифференциальное уравнение и из полученного алгебраического уравнения найти отношение  $y(p)/u(p)$ . Для преобразования по Лапласу дифференциального уравнения каждая входящая в него производная заменяется на оператор Лапласа  $p$  в той степени, каков порядок производной, при этом все переменные становятся зависимыми не от времени  $t$ , а от оператора  $p$ . Если объект имеет несколько входов, то при определении передаточной функции относительно какой-либо одной входной переменной остальные входные переменные приравниваются к нулю. Определим общий вид передаточной функции односвязного линейного стационарного объекта управления с сосредоточенными параметрами, заданного динамическим уравнением (2.1).

Преобразуя по Лапласу динамическое уравнение (2.1), имеем:

$$\begin{aligned} & a_n \cdot p^n \cdot y(p) + a_{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot y(p) + \dots + a_1 \cdot p \cdot y(p) + a_0 \cdot y(p) = \\ & = b_m \cdot p^m \cdot u(p) + b_{m-1} \cdot p^{m-1} \cdot u(p) + \dots + b_1 \cdot p \cdot u(p) + b_0 \cdot u(p). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) является операторной формой записи динамического уравнения объекта, в котором независимой переменной является не время  $t$  (как в динамическом уравнении), а оператор Лапласа  $p$ .

*Замечание.* При преобразовании динамических уравнений в операторную форму следует пользоваться свойствами преобразования Лапласа (таблица П.1. Приложения).

Вынося в уравнении (2.4) за скобки изображения переменных  $y(p)$  и  $u(p)$ , получаем:

$$\begin{aligned} y(p) \cdot (a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0) = \\ = (b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \dots + b_1 \cdot p + b_0). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Далее из (2.5) находим общий вид передаточной функции объекта

$$W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \dots + b_1 \cdot p + b_0}{a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0}, \quad (2.6)$$

или в другой форме записи, аналогичной (2.2):

$$W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = k \cdot \frac{\tau_m^m \cdot p^m + \tau_{m-1}^{m-1} \cdot p^{m-1} + \dots + \tau_1 \cdot p + 1}{T_n^n \cdot p^n + T_{n-1}^{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + T_1 \cdot p + 1}. \quad (2.7)$$

При решении задач необходимо стараться привести передаточную функцию к виду (2.7).

Передаточную функцию можно получить не только из динамического уравнения. Если известен входной  $u(t)$  и выходной  $y(t)$  сигналы объекта, то можно определить изображения по Лапласу этих сигналов, т.е.  $u(p)$  и  $y(p)$ , и затем определить передаточную функцию как  $W(p) = y(p)/u(p)$ .

*Замечание 1.* Преобразование Лапласа функции времени (сигнала)  $f(t)$  определяется по формуле:  $u(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$ . (2.8)

*Замечание 2.* При нахождении изображений по Лапласу функций времени удобно пользоваться таблицей П.2 Приложения.

## 2.2. Примеры на составление динамических уравнений

### 2.2.1. Пневматическая емкость

Составьте динамическое уравнение и передаточную функцию пневматической емкости (рисунок 2.1), состоящей из камеры объемом  $V$  и дросселя с коэффициентом проводимости  $\alpha$ . Входная переменная – давление воздуха перед дросселем  $P_1$ . Выходная переменная – давление внутри емкости  $P_2$ .



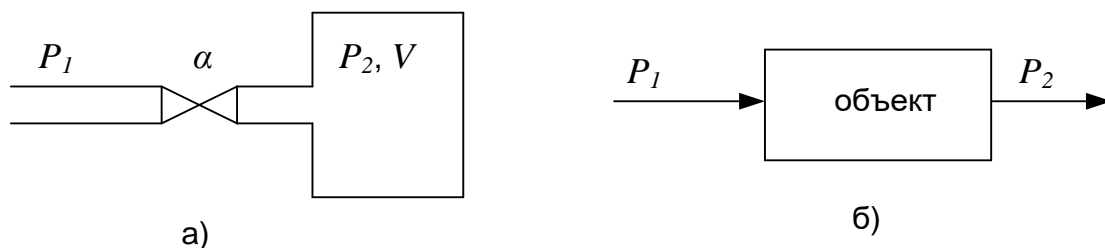


Рисунок 2.1 – Принципиальная (а) и блок-схема (б) пневматической емкости

*Замечание.* Уравнение составляется для малых отклонений переменных от исходного состояния равновесия.

*Решение.* Для малых отклонений переменных от исходного состояния равновесия массовый расход воздуха через дроссель  $F$  можно выразить уравнением:

$$F = \alpha \cdot (P_1 - P_2), \quad (2.9)$$

где  $\alpha$ -коэффициент расхода (проводимость дросселя). Следовательно, масса  $dm$  воздуха, накопившегося в пневматической емкости за малый промежуток времени  $dt$ ,

$$dm = \alpha \cdot (P_1 - P_2) \cdot dt. \quad (2.10)$$

Установившийся режим объекта описывается уравнением состояния газов:

$$P_2 \cdot V \cdot M = m \cdot R \cdot T, \quad (2.11)$$

где  $m$ - масса воздуха в камере,  $R$  - универсальная газовая постоянная,  $T$  - температура воздуха в камере,  $M$  - молярная масса воздуха.

При нарушении равновесия за счет изменения расхода  $F = \frac{dm}{dt}$  изменяется и давление  $P_2$ . Уравнение динамики, описывающее этот процесс, можно получить, продифференцировав по времени уравнение (2.11). Предположим, что температурные изменения в объекте пренебрежимо малы. Тогда после дифференцирования (2.11) получим:

$$M \cdot V \cdot \frac{dP_2}{dt} = R \cdot T \cdot \frac{dm}{dt}. \quad (2.12)$$

Объединив уравнения (2.10) и (2.12), получим искомую зависимость  $P_2$  от  $P_1$  в виде дифференциального уравнения:

$$dm = \frac{MV}{RT} \cdot dP_2 = \alpha \cdot (P_1 - P_2) \cdot dt. \quad (2.13)$$

После преобразования уравнения (2.13) получаем уравнение динамики пневматической емкости:

$$\frac{MV}{\alpha RT} \cdot \frac{dP_2}{dt} + P_2 = P_1. \quad (2.14)$$

Коэффициент, стоящий перед первой производной в уравнении (2.14),  $T = \frac{MV}{\alpha RT}$  – постоянная времени пневматической емкости. Как видим, полученное уравнение является линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Учитывая, что входная  $P_1$  и выходная  $P_2$  переменные объекта являются функциями времени, введем обозначения:  $P_1(t) = u(t)$  и  $P_2(t) = y(t)$ , тогда уравнение (2.14) примет вид уравнения *апериодического звена*:

$$T \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \cdot u(t), \quad (2.15)$$

здесь коэффициент  $k = 1$ .

Запишем последнее уравнение в операторной форме (таблица П.1. Приложения), заменив реальные физические переменные  $u(t)$  и  $y(t)$ , называемые *оригиналами*, на их *изображения* по Лапласу  $u(p)$  и  $y(p)$ , а операцию дифференцирования переменной  $y(t)$  умножением её изображения  $y(p)$  на оператор Лапласа  $p$  (оператор дифференцирования), получим:

$$T \cdot p \cdot y(p) + y(p) = u(p), \quad \text{или} \quad y(p) \cdot (T \cdot p + 1) = u(p). \quad (2.16)$$

Из уравнения (2.16) очевидно, что передаточная функция объекта (апериодического звена) равна:

$$W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{k}{T \cdot p + 1}. \quad (2.17)$$

### 2.2.2. Гидравлическая емкость

Составьте динамическое уравнение и передаточную функцию объекта – резервуара со свободным истечением жидкости (рисунок 2.2).

Резервуар имеет постоянную по высоте площадь поперечного сечения  $S$ . Выходная величина – уровень жидкости  $H$ . Входная величина – расход жидкости на линии притока  $F_{\text{П}}$ . Расход жидкости на линии стока –  $F_{\text{СТ}}$ .

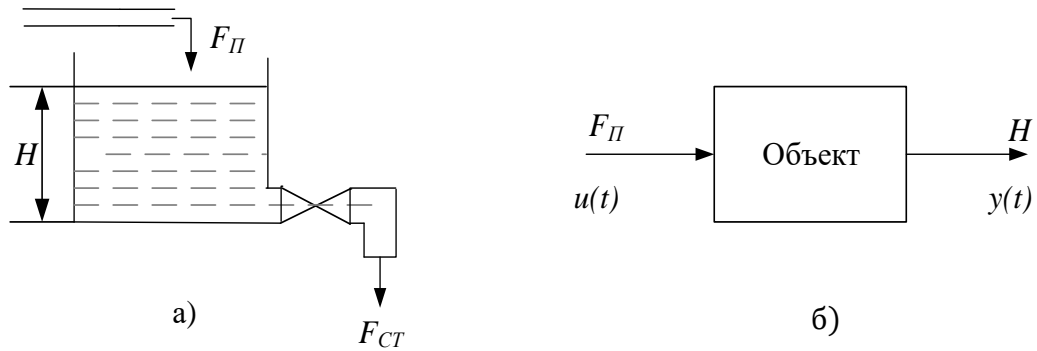


Рисунок 2.2 – Принципиальная (а) и блок – схема (б) гидравлической емкости

**Решение.** Гидравлическая емкость представляет собой резервуар, в котором имеются приток и сток жидкости. Основным параметром, характеризующим состояние такого объекта, является уровень жидкости  $H$ , который и выбирается в качестве выходной координаты  $y(t)$ . При постоянной степени открытия дросселя на стоке жидкости, уровень  $H$  определяется разностью между притоком и стоком  $F_{\Pi} - F_{СТ}$ . По условиям работы объекта величина притока  $F_{\Pi}$  может произвольно меняться во времени, поэтому на структурной схеме (рисунок 2.2, б) расход  $F_{\Pi}$  выбран в качестве входной координаты объекта. Изменение объема жидкости в резервуаре за время  $dt$  зависит от разности расходов на притоке  $F_{\Pi}$ , и стоке  $F_{СТ}$  (это следует из материального баланса):

$$F_{\Pi} \cdot dt - F_{СТ} \cdot dt = dV = d(S \cdot H) = S \cdot dH. \quad (2.18)$$

Переписав это выражение в виде:

$$S \cdot \frac{dH(t)}{dt} = F_{\Pi}(t) - F_{СТ}(t), \quad (2.19)$$

получим уравнение, определяющее уровень жидкости  $H$  в резервуаре (состояние объекта) при изменении расходов на притоке  $F_{\Pi}$  и стоке  $F_{СТ}$ .

В рассматриваемом случае расход жидкости на линии притока  $F_{\Pi}$  не зависит от уровня жидкости в объекте, а расход жидкости на линии стока  $F_{СТ}$  зависит от уровня жидкости в объекте в соответствии с равенством:

$$F_{СТ} = \alpha \cdot \sqrt{H}, \quad (2.20)$$

где  $\alpha$  - коэффициент пропускной способности дросселя.

Допустим, что отклонение  $\Delta H = H - H_0$  от исходного значения уровня  $H_0$  малы, тогда нелинейную зависимость (2.20) можно линеаризовать, разлагая

$\sqrt{H}$  в ряд Тейлора по степеням  $\Delta H$  в окрестности исходного значения  $H_0$  и ограничивая ряд только двумя первыми членами:

$$\sqrt{H} \approx \sqrt{H_0} + \frac{1}{2\sqrt{H_0}} \Delta H = \frac{F_{CT}}{\alpha} + \frac{1}{2\sqrt{H_0}} \Delta H. \quad (2.21)$$

Подставляя  $\sqrt{H}$  из (2.21) в (2.20), а далее  $F_{CT}$  в (2.19), получим линейное дифференциальное уравнение объекта в приращениях:

$$\frac{2S\sqrt{H_0}}{\alpha} \cdot \frac{d\Delta H(t)}{dt} + \Delta H(t) = \frac{2\sqrt{H_0}}{\alpha} \cdot \Delta F_{II}(t), \quad (2.22)$$

где  $\Delta F_{II}(t) = F_{II}(t) - F_{II0}$  – отклонение притока  $F_{II}$  от исходного значения  $F_{II0}$ .

*Замечание.* Без указания исходного (номинального) режима, в окрестности которого выполнена линеаризация, такое уравнение не имеет смысла. Для упрощения записи знак  $\Delta$  часто опускают. Тогда уравнение (2.22) примет вид:

$$T \frac{dH(t)}{dt} + H(t) = k \cdot F_{II}(t), \quad (2.23)$$

где  $T = \frac{2S\sqrt{H_0}}{\alpha}$  – постоянная времени гидравлической емкости,  $k = \frac{2\sqrt{H_0}}{\alpha}$  – коэффициент передачи объекта.

Уравнение (2.23), как и уравнения (2.14), (2.15), предыдущего примера, так же является обыкновенным линейным дифференциальным уравнением первого порядка (уравнением аperiodического звена). Передаточная функция объекта описывается уравнением (2.17).

### 2.2.3. Термопара

Получить дифференциальное уравнение термопары (рисунок 2.3), связывающее ее термоэлектродвижущую силу ( $E$ ) с измеряемой температурой  $\theta_c$ .

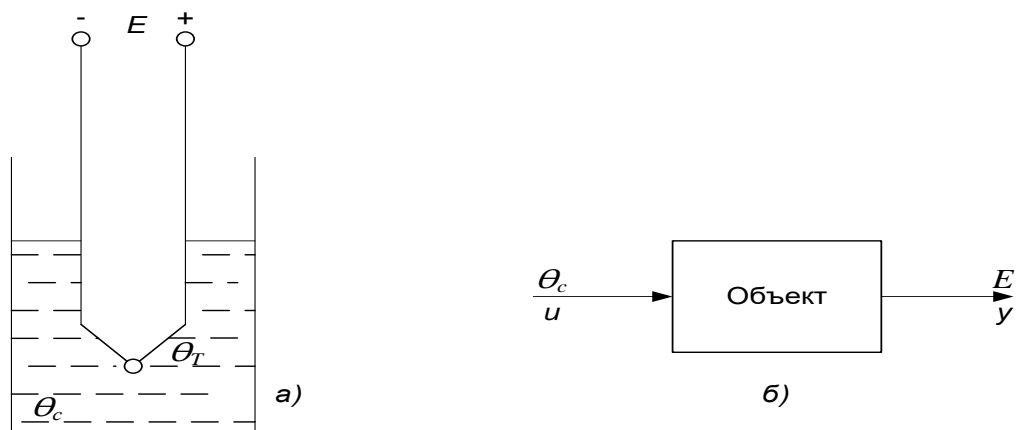


Рисунок 2.3 – Принципиальная (а) и блок-схема (б) термоэлектрического преобразователя (термопары)

**Решение.** Термоэлектрический преобразователь, называемый термопарой, является первичным измерительным преобразователем и широко применяется в системах контроля и управления. Входной величиной термоэлектрического преобразователя является температура  $\theta_c$  измеряемой среды, а выходной величиной – термоэлектродвижущая сила  $E$ .

Сделаем следующие допущения:

а) рабочий спай термопары обменивается теплотой (за счет конвекции) только со средой, температура которой измеряется; количество теплоты, которое передается к рабочему спаю термопары или от него за счет теплопроводности (по проводам термопары) и за счет лучистого теплообмена пренебрежимо мало;

б) температура внутри рабочего спая термопары в каждой его точке одинакова;

в) температура свободных концов термопары равна  $0^{\circ}\text{C}$ ;

г) зависимость между термоэлектродвижущей силой термопары и температурой ее рабочего спая линейна.

В равновесном состоянии, когда температура рабочего спая термопары равна температуре измеряемой среды, термоэлектродвижущая сила  $E$  термопары определена и неизменна. Предположим, что в какой-то момент времени температура среды ступенчато возросла на  $\Delta\theta_c$ . Вследствие разности температур измеряемой среды и рабочего спая термопары последний нагревается до температуры среды. Нагревание рабочего спая термопары происходит не мгновенно, а в течение некоторого времени, зависящего от тепловой емкости рабочего спая и сопротивления передаче теплоты. Количество теплоты  $dQ$ , переданной от измеряемой среды рабочему спаю термопары за бесконечно малый отрезок времени  $dt$ , определяется уравнением:

$$dQ = \alpha \cdot S \cdot (\theta_c - \theta_T) \cdot dt, \quad (2.24)$$

где  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи конвекцией;  $S$  – площадь поверхности теплопередачи рабочего спая;  $\theta_c$  – температуры среды;  $\theta_T$  – температура рабочего спая термопары;  $t$  – время.

Количество теплоты, полученное термопарой при ее нагревании на  $d\theta_T$  градусов,

$$dQ = M \cdot c \cdot d\theta_T, \quad (2.25)$$

где  $M$  – масса рабочего спая термопары,  $c$  – удельная теплоемкость спая.

Приравнивая выражения (2.24) и (2.25) получим:  $\alpha \cdot S \cdot (\theta_C - \theta_T) \cdot dt = M \cdot c \cdot d\theta_T$ , или

$$\frac{M \cdot c}{\alpha \cdot S} \cdot \frac{d\theta_T}{dt} + \theta_T = \theta_C. \quad (2.26)$$

Зависимость термоэлектродвижущей силы  $E$  термоэлектрического преобразователя от температуры  $\theta_T$  рабочего спая считаем линейной и аппроксимируем статическим усилительным звеном, т.е.:

$$E = k \cdot \theta_T, \quad (2.27)$$

где  $k$  – коэффициент пропорциональности.

Из уравнения (2.27) выражаем  $\theta_T$  через  $E$  и подставляем в уравнение (2.26):

$$\frac{M \cdot c}{\alpha \cdot S} \cdot \frac{dE}{dt} + E = k \cdot \theta_C,$$

Обозначая  $\frac{M \cdot c}{\alpha \cdot S} = T$  – постоянная времени объекта, получаем окончательное выражение:

$$T \cdot \frac{dE}{dt} + E = k \cdot \theta_C. \quad (2.28)$$

Полученное уравнение (2.28) показывает, что по динамическим свойствам термоэлектрический преобразователь описывается линейным дифференциальным уравнением первого порядка, т.е. как и объекты из предыдущих двух примеров – апериодическим звеном. Передаточная функция объекта описывается уравнением (2.17)  $W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{k}{T \cdot p + 1}$ .

#### 2.2.4. Гидравлический демпфер

Составьте дифференциальное уравнение и передаточную функцию гидравлического демпфера (рисунок 2.4), если принять за входную величину силу  $u(t) = F(t)$ , действующую на поршень, а за выходную перемещение поршня  $y(t) = x(t)$ . Пренебечь влиянием массы подвижных частей.

**Решение.** Приложенной силе  $F$  противостоит демпфирующая сила  $F_D$ , пропорциональная скорости перемещения поршня, т.е.

$$F(t) = F_D, \quad F_D = C \cdot \frac{dx(t)}{dt},$$

где  $C$  – коэффициент демпфирования.

Тогда окончательное уравнение имеет вид:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{C} \cdot F(t), \text{ или } \frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{T} \cdot u(t), \quad (2.29)$$

$T = C$  – постоянная времени звена.

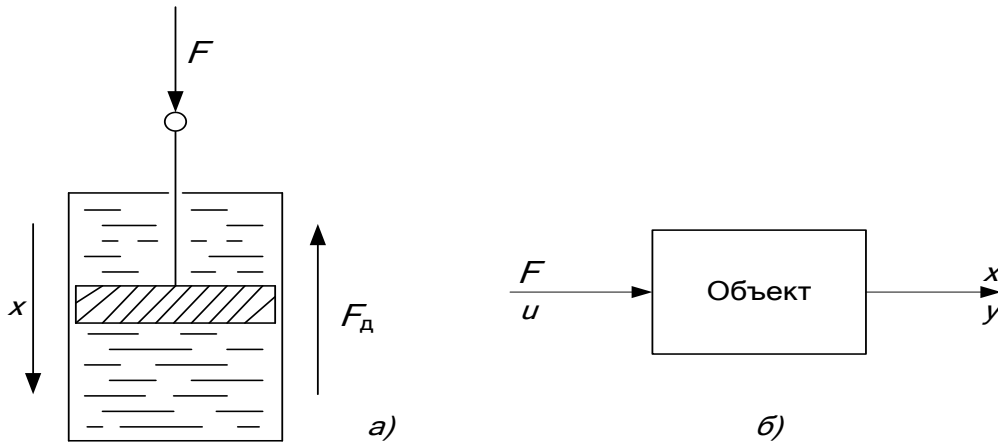


Рисунок 2.4 – Принципиальная (а) и блок-схема (б) гидравлического демпфера

Уравнение (2.29) является уравнением интегрирующего звена

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_0^t u(t) dt. \quad (2.30)$$

Запишем последнее уравнение в операторной форме (таблица П.1. Приложения), заменив операцию интегрирования переменной  $u(t)$  делением её изображения  $u(p)$  на оператор Лапласа  $p$ , получим:

$$y(p) = \frac{u(p)}{T \cdot p}. \quad (2.31)$$

Из уравнения (2.31) очевидно, что передаточная функция объекта (интегрирующего звена)

$$W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{1}{T \cdot p}. \quad (2.32)$$

### 2.2.5. Электрическая цепь

Для электрической цепи (рисунок 2.5, а) с известными значениями индуктивности  $L$ , емкости  $C$ , активного сопротивления  $R$  требуется составить дифференциальное уравнение и передаточную функцию относительно входного  $u(t) = U_{\text{вх}}(t)$  и выходного  $y(t) = U_{\text{вых}}(t)$  напряжений.

**Решение.** Преобразуем исходную схему электрической цепи к расчетной (рисунок 2.5, б), где комплексные сопротивления равны:

$$Z_1(p) = Lp, \quad Z_2(p) = R + \frac{1}{Cp}. \quad (2.33)$$

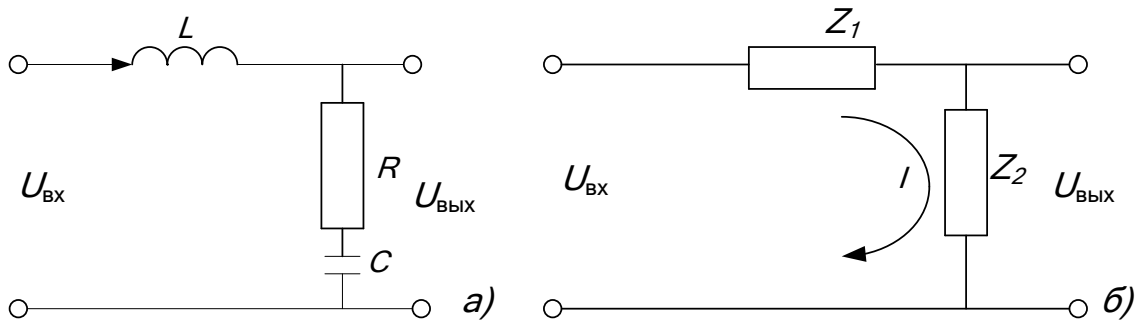


Рисунок 2.5 – Принципиальная (а) и расчетная (б) схемы электрической цепи

При условии, что сопротивление источника бесконечно мало, а сопротивление нагрузки бесконечно велико, значение тока, протекающего по цепи, определяется выражением:

$$I(p) = \frac{u(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)}. \quad (2.34)$$

Тогда

$$y(p) = I(p) \cdot Z_2(p). \quad (2.35)$$

На основании последних двух уравнений получим:

$$y(p) = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)} u(p). \quad (2.36)$$

Подставляя в уравнение (2.36) выражения  $Z_1(p)$  и  $Z_2(p)$  из (2.33), имеем:

$$y(p) = \frac{R \cdot C \cdot p + 1}{L \cdot C \cdot p^2 + R \cdot C \cdot p + 1} \cdot u(p), \quad (2.37)$$

или

$$y(p) = \frac{T_1 p + 1}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1} \cdot u(p), \quad (2.38)$$

где  $T_1 = R \cdot C$ ,  $T_2^2 = L \cdot C$  - постоянные времени.

Последнее уравнение запишем в следующем виде:

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) \cdot y(p) = (T_1 p + 1) \cdot u(p). \quad (2.39)$$



Раскрывая скобки и учитывая, что  $p = \frac{d}{dt}$  – символ дифференцирования, а следовательно,  $p^2 = \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} \right) = \frac{d^2}{dt^2}$ , получим искомого дифференциальное уравнение электрической цепи:

$$T_2^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = T_1 \frac{du(t)}{dt} + u(t). \quad (2.40)$$

Из уравнения (2.38) легко получить передаточную функцию электрической цепи:

$$W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{T_1 p + 1}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}. \quad (2.41)$$

Задача решена. Отметим, что произведение  $R \cdot C$  имеет размерность времени, произведение  $L \cdot C$  имеет размерность времени в квадрате. Полученное уравнение (2.41) является уравнением сложного звена, состоящего из форсирующего звена (в числителе) и апериодического звена второго порядка (в знаменателе).

### 2.3. Задачи для самостоятельной работы

**2.3.1.** Составить дифференциальное уравнение и передаточную функцию электрической цепи, приведенной на рисунке 2.6.

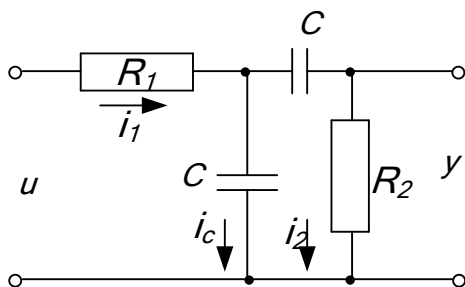


Рисунок 2.6 – Электрическая цепь

**2.3.2.** Составить дифференциальное уравнение и передаточную функцию по условиям примера 2.2.4 с учетом массы подвижных частей.

**2.3.3.** Составить дифференциальное уравнение и передаточную функцию пружины и демпфера (рисунок 2.7), пренебречь влиянием массы подвижных частей и принять за входную величину силу  $F$ , а за выходную – перемещение точки  $A$  (поршня)  $x$ .

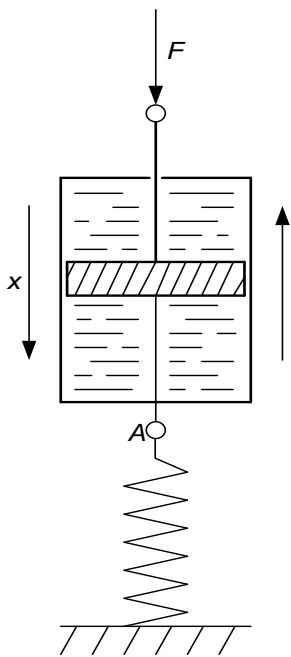


Рисунок 2.7. Подпружиненный демпфер

**2.3.4.** Составить дифференциальное уравнение и передаточную функцию по условиям предыдущей задачи с учетом приведенной к точке  $A$  (рисунок 2.7) массы подвижных частей.

**2.3.5.** Изменится ли тип динамического звена, к которому относится демпфер, рассмотренный в примере 2.2.4, если входную и выходную величины поменять местами? Если изменится, то как?

**2.3.6.** Найти дифференциальное уравнение и передаточную функцию движения по условиям предыдущей задачи, учитывая массу подвижных частей.

**2.3.7.** Составить дифференциальные уравнения и передаточные функции электрических схем, приведенных на рисунке 2.8.

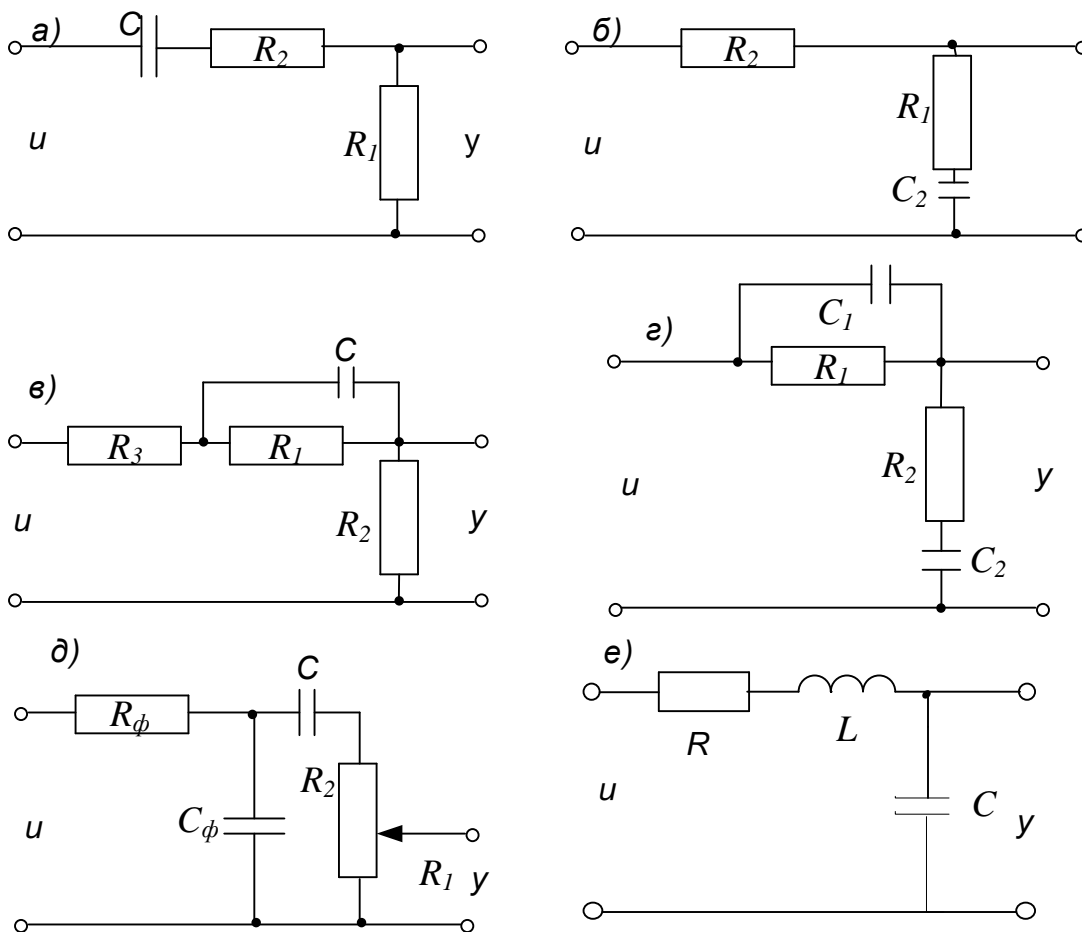


Рисунок 2.8 – Электрические схемы

**2.3.8.** Составить дифференциальные уравнения и передаточные функции для схем, приведенных на рисунке 2.9.

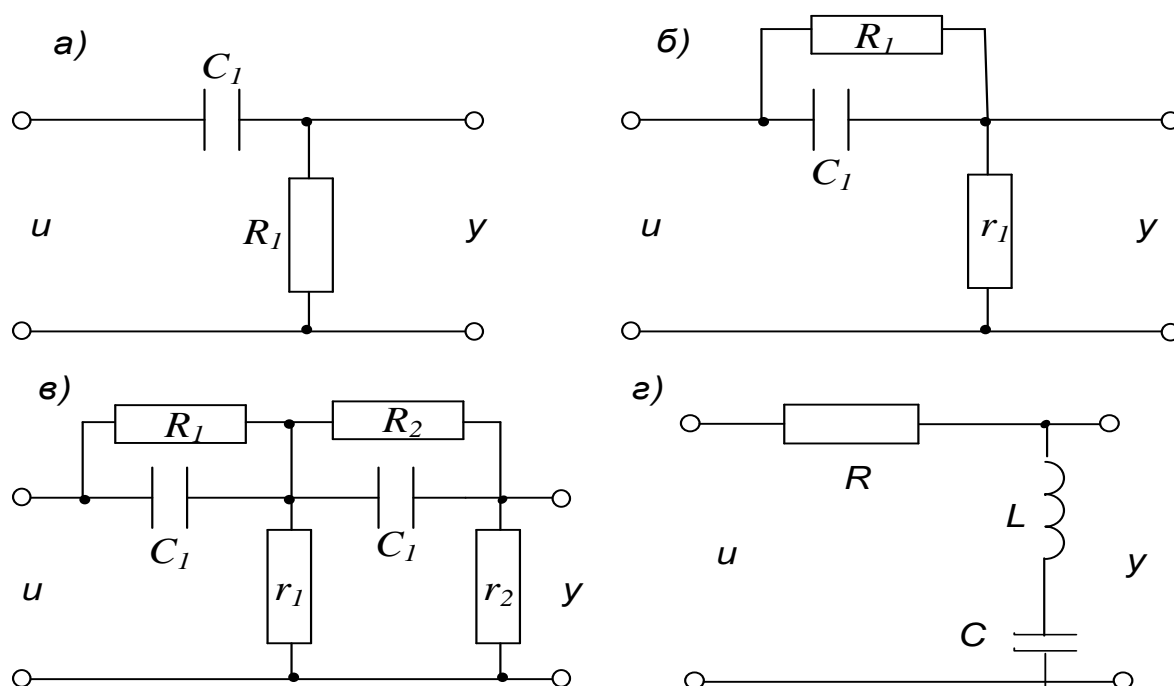


Рисунок 2.9 – Электрические схемы

## 2.4. Контрольная работа

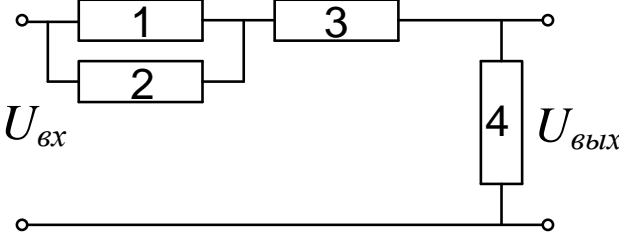
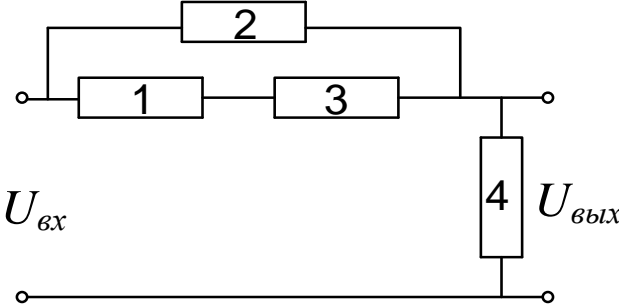
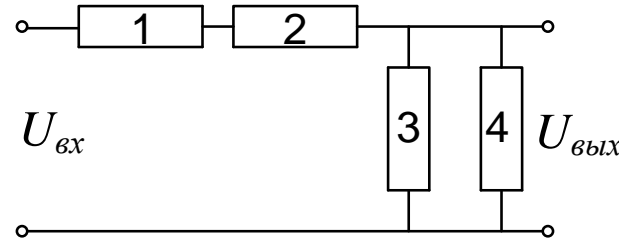
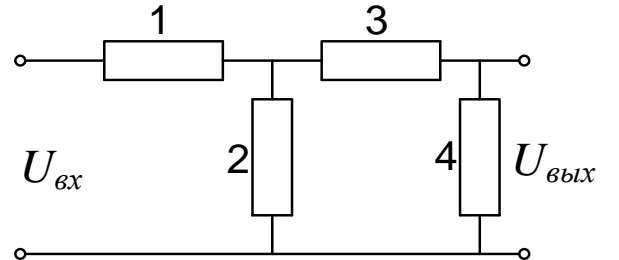
Дана схема электрической цепи и ее параметры (таблица 2.1).

Требуется составить дифференциальное уравнение и передаточную функцию электрической цепи относительно входного  $U_{вх}(t)$  и выходного  $U_{вых}(t)$  напряжений. Считать сопротивление источника бесконечно малым, а сопротивление нагрузки бесконечно большим.

В работе представить:

- задание для практической работы и вариант задания;
- порядок выполняемых действий с комментариями;
- промежуточные и окончательные результаты.

Таблица 2.1 – Варианты контрольных работ

№ варианта	Электрическая схема	Номер элемента и его вид			
		1	2	3	4
1		C1	R1	C2	R2
2		L1	R1	L2	R2
3		C1	R1	L1	R2
4		R1	L1	R2	L2
5		R1	C1	R2	C2
6		L1	C1	R1	C2
7		C1	L1	C2	L2
8		R1	L1	C1	R2
9		L1	R1	L2	C1
10		C1	R1	C2	L1
11		C1	R1	C2	R2
12		L1	R1	L2	R2
13		C1	R1	L1	R2
14		R1	L1	R2	L2
15		R1	C1	R2	C2
16		L1	C1	R1	C2
17		C1	L1	C2	L2
18		R1	L1	C1	R2
19		L1	R1	L2	C1
20		C1	R1	C2	L1
21		C1	R1	C2	R2
22		L1	R1	L2	R2
23		C1	R1	L1	R2
24		R1	L1	R2	L2
25		R1	C1	R2	C2
26		L1	C1	R1	C2
27		C1	L1	C2	L2
28		R1	L1	C1	R2
29		L1	R1	L2	C1
30		C1	R1	C2	L1
31		C1	R1	C2	R2
32		L1	R1	L2	R2
33		C1	R1	L1	R2
34		R1	L1	R2	L2
35		R1	C1	R2	C2
36		L1	C1	R1	C2
37		C1	L1	C2	L2
38		R1	L1	C1	R2
39		L1	R1	L2	C1
40		C1	R1	C2	L1

## 2.5. Примеры на составление передаточных функций

**2.5.1.** Дано дифференциальное уравнение объекта  $T \cdot y'(t) + y(t) = k \cdot u(t - \tau)$ , где  $\tau$  – время запаздывания объекта. Определить передаточную функцию объекта.

**Решение.** После преобразования по Лапласу исходного уравнения (таблица П.1. Приложения) получим:  $T \cdot p \cdot y(p) + y(p) = k \cdot e^{-\tau p} \cdot u(p)$ , или  $y(p) \cdot (T \cdot p + 1) = k \cdot e^{-\tau p} \cdot u(p)$ . Откуда  $W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{k \cdot e^{-\tau p}}{Tp+1}$ . Эта передаточная функция соответствует апериодическому звену с запаздыванием.

**2.5.2.** Даны выражения для входного и выходного сигналов объекта:  $u(t) = I(t)$ ,  $y(t) = k t I(t)$ . Определить передаточную функцию объекта.

**Решение.** Найдем изображения по Лапласу входного и выходного сигналов (таблица П.2. Приложения):  $u(p) = 1/p$ ;  $y(p) = k / p^2$ . Тогда передаточная функция равна  $W(p) = y(p)/u(p) = kp/p^2 = k/p$ . Эта передаточная функция соответствует идеальному интегрирующему звену.

**2.5.3.** Дана передаточная функция объекта, включающая форсирующее звено, интегрирующее звено, апериодическое звено второго порядка и звено запаздывания:  $W(p) = \frac{k(b_0 p + 1) \cdot e^{-\tau p}}{p \cdot (T_1 p^2 + T_2 p + 1)}$ . Получить динамическое и статическое уравнения.

**Решение.** Используя определение передаточной функции, имеем:  $W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{k(b_0 p + 1) \cdot e^{-\tau p}}{p \cdot (T_1 p^2 + T_2 p + 1)}$ . Раскроем полученное тождество:  $y(p) \cdot p \cdot (T_1 p^2 + T_2 p + 1) = u(p) \cdot k(b_0 p + 1) \cdot e^{-\tau p}$ , или, раскрывая скобки:  $T_1 p^3 y(p) + T_2 p^2 y(p) + p y(p) = k b_0 p u(p) e^{-\tau p} + k u(p) e^{-\tau p}$ . Применим к каждому слагаемому обратное преобразование Лапласа (таблица П.1. Приложения), получим динамическое уравнение:  $T_1 \cdot y'''(t) + T_2 \cdot y''(t) + y'(t) = k b_0 u'(t - \tau) + k u(t - \tau)$ . Поделив предыдущее уравнение на оператор Лапласа  $p$  и приравняв его к нулю, получаем статическое уравнение:  $y(\infty) = \infty$ .

## 2.6. Задачи для самостоятельной работы

**2.6.1.** Найти передаточную функцию объекта, дифференциальное уравнение которого имеет вид:

$$a) 2y''(t) + y'(t) + y(t) = u'(t - \tau) + 2u(t - \tau);$$

$$\text{б) } 3y''''(t) + y''(t) + 2y'(t) = 5u(t);$$

$$\text{в) } y'(t) + y(t) = u(t - \tau) + u(t);$$

$$\text{г) } 7y''''(t) + 2y'(t) + 4y(t) = 6u'(t - 9);$$

$$\text{д) } y''(t) + 3y(t) = u(t - 2) + 4u'(t).$$

**2.6.2.** Найти передаточную функцию объекта по выражениям для входного и выходного сигналов  $u(t)$  и  $y(t)$ :

$$\text{а) } u(t) = 1(t); \quad y(t) = (1 - e^{-t/T}) 1(t); \quad T = \text{const}$$

$$\text{б) } u(t) = 1(t); \quad y(t) = (-1 + e^{-t} + t) 1(t);$$

$$\text{в) } u(t) = 1(t); \quad y(t) = (-1 + 1/3e^{-t} + 2/3e^{-t/2}) 1(t);$$

$$\text{г) } u(t) = e^{-t} 1(t); \quad y(t) = (t e^{-t}) 1(t);$$

$$\text{д) } x(t) = e^{-t} 1(t); \quad y(t) = 1/2 (e^t - e^{-t}) 1(t);$$

$$\text{е) } u(t) = t 1(t); \quad y(t) = (-1 + e^t - t) 1(t).$$

**2.6.3.** Найти динамическое и статическое уравнения объекта, передаточная функция которого имеет вид:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } W(p) = \frac{3p^2 \cdot e^{-p}}{4p^2 + 2p + 1}; & \text{б) } W(p) = \frac{2p}{3p^2 + 7}; & \text{в) } W(p) = \frac{k \cdot e^{-\tau p}}{p^3 + T p + 1}; \\ \text{г) } W(p) = \frac{k(b_2 p^2 + b_1 p + b_0)}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + 1}; & \text{д) } W(p) = \frac{5p^2 \cdot e^{-2p} + 3p}{7p^3 + 4p^2 + 2}; & \text{е) } W(p) = 8 + \frac{2}{p}. \end{array}$$

## 2.7. Предварительные сведения о линеаризации

Выше рассмотрены уравнения линейного объекта, однако большинство реальных объектов управления являются нелинейными. В том случае, если нелинейность объекта проявляется в статических режимах и статические характеристики описываются аналитическими функциями, то при определенных условиях нелинейные характеристики объекта могут быть заменены приближенными линейными характеристиками, т.е. производится линеаризация нелинейных зависимостей. Применение линеаризации объектов позволяет в дальнейшем значительно упростить процедуру анализа систем автоматического управления.

Одним из наиболее распространенных способов линеаризации является разложение нелинейной функции  $Y=f(X)$  в ряд Тейлора в окрестности заданной точки  $(X_0, Y_0)$ , и переход к новой системе координат  $x, y$ , причем линеаризованная функция содержит лишь первые линейные члены ряда Тейлора. Поясним этот метод.

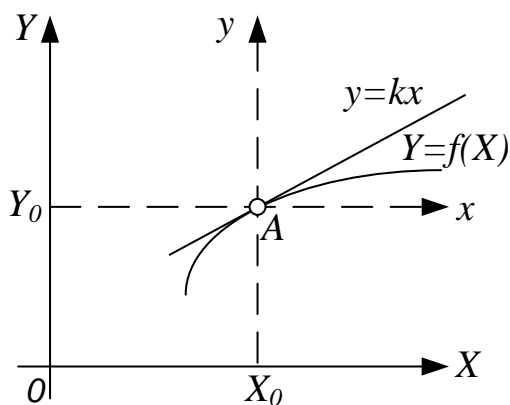


Рисунок 2.10 - Нелинейная функция

Пусть статическая характеристика объекта описывается некоторой нелинейной функцией  $Y=f(X)$  (рисунок 2.10). Предположим, что заданный режим в объекте, который необходимо регулировать, характеризуется точкой  $A$  с координатами  $(X_0, Y_0)$ . При нормальной работе системы регулирования отклонения координат не должны превышать некоторых допустимых значений, определяемых требованиями технологического регламента. Если в пределах этих мак-

симально возможных отклонений  $X$  и  $Y$  от  $X_0$  и  $Y_0$ ,  $f(X)$  мало отличается от линейной функции, то можно  $f(X)$  заменить ее линейным приближением  $f_{\Delta}(x)$ . Уравнение  $f_{\Delta}(x)$  находится из ряда Тейлора для  $f(X)$ :

$$f(X) = f(X_0) + \frac{f'(X_0)}{1!} (X - X_0) + \frac{f''(X_0)}{2!} (X - X_0)^2 + \dots \quad (2.42)$$

При условии малости разности  $(X-X_0)$  и ограниченности второй и высших производных от  $f(X)$ , в выражении (2.42) можно пренебречь всеми членами, кроме первых двух, т.е. можно записать:

$$f(X) \cong f(X_0) + f'(X_0)(X - X_0), \quad (2.43)$$

т.е.

$$Y - Y_0 = f'(X_0)(X - X_0). \quad (2.44)$$

Уравнение (2.44) определяет касательную к графику функции  $Y=f(X)$ . Переходя к новой системе координат  $x=X-X_0$  и  $y=Y-Y_0$ , получим линеаризованное уравнение объекта:

$$y = kx, \quad \text{где } k = f'(X_0) = \left. \frac{df(X)}{dX} \right|_{x_0}.$$

*Замечание.* При решении задач на линеаризацию необходимо:

- 1) Вычислить значение функции  $f(X)$  в точке  $X_0$ , т.е.  $f(X_0)=Y_0$ .
- 2) Определить производную функции  $f(X)$ , т.е.  $f'(X)$ .
- 3) Вычислить значение производной  $f'(X)$  в точке  $X_0$ , т.е.  $f'(X_0)$ .
- 4) Подставить значения  $f(X_0)$ ,  $f'(X_0)$  и  $X_0$  в формулу (2.43).
- 5) Перейти к новым переменным  $x = X-X_0$  и  $y = Y-Y_0$  и записать уравнение  $y = kx$ .

## 2.8. Примеры на линеаризацию

**2.8.1.** Линеаризовать нелинейную зависимость  $Y = X^2$  в точке  $X_0 = 2$ .

**Решение**

1) Вычислим значение функции  $Y = X^2$  в точке  $X_0=2$ :

$$Y_0 = f(X_0) = f(2) = 2^2 = 4.$$

2) Определим производную функции  $Y=X^2$ :

$$Y' = f'(X) = (X^2)' = 2x.$$

3) Вычислим значение производной в точке  $X_0=2$ :

$$f'(X_0) = 2 \cdot 2 = 4.$$

4) Значения  $X_0 = 2$ ,  $f(X_0) = 4$ ,  $f'(X_0) = 4$  подставим в формулу (2.43):

$$Y = f(X) \cong 4 + 4(X-2) = 4 + 4X - 8 = 4X - 4 = 4(X-1).$$

5) Перейдем к новым переменным  $x = X - X_0 = X - 2$  и  $y = Y - Y_0 = Y - 4$  и запишем уравнение  $y = kx = 4x$ , здесь  $k = f'(X_0) = 4$  – коэффициент передачи объекта.

Полученные уравнения  $Y = 4(X-1)$  или  $y=4x$  являются линеаризацией нелинейной зависимости  $Y = X^2$  в точке  $X_0 = 2$ .

**2.8.2.** Линеаризовать нелинейную зависимость  $Y = \frac{\sin X}{X}$ , в точке  $X_0 = \frac{\pi}{4}$ .

**Решение**

1) Вычислим значение функции  $Y = \frac{\sin X}{X}$ , в точке  $X_0 = \frac{\pi}{4}$ :

$$Y_0 = f(X_0) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}/2}{\pi/4} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \approx 0,9.$$

2) Определим производную функции  $Y = \frac{\sin X}{X}$ :

$$Y' = f'(X) = \left(\frac{\sin X}{X}\right)' = \frac{(\sin X)'X - (X)'\sin X}{X^2} = \frac{X \cdot \cos X - \sin X}{X^2}.$$

3) Вычислим значение производной в точке  $X_0 = \frac{\pi}{4}$ :

$$f'(X_0) = \frac{\frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4}}{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2} = \frac{\frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi^2}{16}} \approx -0,246.$$

4) Значения  $X_0 = \frac{\pi}{4}$ ,  $Y_0 = f(X_0) = 0,9$ ,  $f'(X_0) = -0,246$  подставим в формулу (2.43):

$$Y = f(X) \approx 0,9 - 0,246 \left(X - \frac{\pi}{4}\right) = -0,246 \cdot X + 1,093.$$



5) Перейдем к новым переменным  $x = X - X_0 = X - \frac{\pi}{4}$  и  $y = Y - Y_0 = Y - 0,9$  и запишем уравнение  $y = kx = -0,246x$ , здесь  $k = f'(X_0) = -0,246$  – коэффициент передачи объекта.

Полученные уравнения  $Y = -0,246 \cdot X + 1,093$  или  $y = -0,246x$ , являются линеаризацией нелинейной зависимости  $Y = \frac{\sin X}{X}$ , в точке  $X_0 = \frac{\pi}{4}$ .

## 2.9. Задачи для самостоятельной работы

**2.9.1.** Линеаризовать нелинейную зависимость  $Y = e^X \cdot X$  в точках  $X_0=0$  и  $X_0=1$ .

**2.9.2.** Линеаризовать нелинейную зависимость  $Y = \frac{1}{\sqrt{X}}$  в точках  $X_0=4$  и  $X_0=2$ .

**2.9.3.** Линеаризовать нелинейную зависимость  $Y = 3X^3 + 2X$  в точках  $X_0=1$  и  $X_0=2$ .

**2.9.4.** Линеаризовать нелинейную зависимость  $Y = X \cos X$  в точках  $X_0 = \frac{\pi}{4}$  и  $X_0 = \frac{\pi}{2}$ .

**2.9.5.** Линеаризовать нелинейную зависимость  $Y = \frac{\cos X}{X}$  в точках  $X_0 = 0$  и  $X_0 = \frac{\pi}{2}$ .

**2.9.6.** Линеаризовать нелинейную зависимость  $Y = \sin X + X^2$  в точках  $X_0 = 0$  и  $X_0 = \frac{\pi}{2}$ .

**2.9.7.** Линеаризовать нелинейную зависимость  $Y = \ln X$  в точках  $X_0 = e$  и  $X_0 = 1$ .

## 3. РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

### 3.1. Предварительные сведения

В предыдущей главе мы говорили о том, что динамическое уравнение (2.1) характеризует работу объекта в переходном режиме, при подаче на его вход некоторого управляющего воздействия. На вход объекта может подаваться *типовое* входное воздействие (единичное ступенчатое или единичное

импульсное воздействие), либо входное воздействие произвольного вида. Реакция объекта на типовое входное воздействие называется *временной характеристикой*. Существуют две временные характеристики: *переходная*  $h(t)$  – реакция объекта на единичное ступенчатое воздействие  $1(t)$ , и *импульсная переходная (весовая)*  $w(t)$  – реакция объекта на единичное импульсное воздействие  $\delta(t)$ .

Сведения о том, как объект будет реагировать на то или иное входное воздействие, можно получить, решив динамическое уравнение. В этом случае при известном входном (управляющем) воздействии  $u(t)$  находится закон изменения выходной (регулируемой) переменной объекта  $y(t)$ . Решение динамического уравнения проще всего получить, выполнив следующие этапы:

- 1) Исходное динамическое (дифференциальное) уравнение преобразуется по Лапласу (выражение (2.7));
- 2) Из операторной формы динамического уравнения определяется изображение выходной переменной  $y(p)$  в виде дроби;
- 3) Полученное выражение  $y(p)$  раскладывается на сумму простейших дробей;
- 4) По таблицам преобразования Лапласа (таблица П.2. Приложения) определяются оригиналы простейших дробей.

*Замечание.* При выполнении третьего этапа возможно получение простейшей дроби вида  $(Ap + B)/(p^2 + ap + b)$ , которой соответствует следующий оригинал

$$\frac{Ap + B}{p^2 + ap + b} \rightarrow e^{-\frac{a}{2}t} \cdot \left( A \cdot \cos t \sqrt{b - \frac{a^2}{4}} + \frac{B - Aa/2}{\sqrt{b - a^2/4}} \cdot \sin t \sqrt{b - \frac{a^2}{4}} \right) \cdot 1(t) \quad (3.1).$$

## 3.2. Примеры

**3.2.1.** Получить выражение переходной характеристики (переходную функцию) объекта, описываемого дифференциальным уравнением

$$\ddot{y}(t) + 4 \cdot \dot{y}(t) + 13 \cdot y(t) = 5 \cdot (\dot{u}(t) + u(t)). \quad (3.2)$$

*Решение.* Из условия задачи ясно, что на вход объекта подается единичное ступенчатое воздействие  $u(t) = 1(t)$ , изображение которого равно

$u(p) = 1/p$ . В задаче следует решить дифференциальное уравнение при этом входном воздействии.

1) Запишем уравнение (3.1) в операторной форме

$$p^2 \cdot y(p) + 4 \cdot p \cdot y(p) + 13 \cdot y(p) = 5 \cdot (p \cdot u(p) + u(p)).$$

2) Выразим изображение выходной переменной

$$y(p) = \frac{5 \cdot (p + 1) \cdot u(p)}{p^2 + 4 \cdot p + 13} = \frac{5 \cdot (p + 1)}{p \cdot (p^2 + 4 \cdot p + 13)}. \quad (3.3)$$

3) Разложим дробь (3.2) на простейшие дроби

$$h(p) = \frac{5 \cdot (p + 1)}{p \cdot (p^2 + 4 \cdot p + 13)} = \frac{C}{p} + \frac{A \cdot p + B}{p^2 + 4 \cdot p + 13}. \quad (3.4)$$

Знаменатель второй дроби в выражении (3.4) не имеет действительных корней, поэтому записанная дробь является простейшей.

Определим неизвестные коэффициенты  $A$ ,  $B$  и  $C$  методом неопределенных множителей. Для этого приведем правую часть выражения (3.4) к общему знаменателю и сгруппируем подобные члены в числителе, имеем:

$$\begin{aligned} h(p) &= \frac{5 \cdot p + 5}{p \cdot (p^2 + 4 \cdot p + 13)} = \frac{C \cdot (p^2 + 4 \cdot p + 13) + (A \cdot p + B) \cdot p}{p \cdot (p^2 + 4 \cdot p + 13)} = \\ &= \frac{(C + A) \cdot p^2 + (4 \cdot C + B) \cdot p + 13 \cdot C}{p \cdot (p^2 + 4 \cdot p + 13)}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Из равенства коэффициентов при соответствующих степенях  $p$  числителей левой и правой частей тождества (3.5) запишем систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} C + A = 0; \\ 4 \cdot C + B = 5; \\ 13 \cdot C = 5, \end{cases}$$

решение которой дает  $C = 5/13$ ;  $A = -5/13$ ;  $B = 45/13$ . Тогда выражение (3.4) принимает вид:

$$h(p) = \frac{5}{13 \cdot p} + \frac{45/13 - 5 \cdot p/13}{p^2 + 4 \cdot p + 13}.$$

4) По таблицам преобразования Лапласа (таблица П.2. Приложения) и формуле (3.1) определим оригинал выходной переменной, т.е. переходную характеристику объекта

$$h(t) = \frac{5}{13} \cdot 1(t) + e^{-2 \cdot t} \cdot \left( \frac{-5}{15} \cdot \cos(3 \cdot t) + \frac{55}{39} \cdot \sin(3 \cdot t) \right) \cdot 1(t).$$

**3.2.2.** Получить выражение импульсной переходной характеристики (весовую функцию) объекта, описываемого передаточной функцией

$$W(p) = \frac{p^2 + 3}{(p + 1)^3}.$$

**Решение.** На вход объекта подается единичное импульсное воздействие  $u(t) = \delta(t)$ , изображение которого равно  $u(p) = 1$ . Исходя из определения передаточной функции:  $W(p) = y(p)/u(p)$ , выразим изображение выходной переменной

$$y(p) = \frac{(p^2 + 3) \cdot u(p)}{(p + 1)^3} = \frac{p^2 + 3}{(p + 1)^3}. \quad (3.6)$$

Разложим дробь (3.6) на простейшие дроби

$$w(p) = \frac{p^2 + 3}{(p + 1)^3} = \frac{A}{p + 1} + \frac{B}{(p + 1)^2} + \frac{C}{(p + 1)^3}. \quad (3.7)$$

Приведем правую часть выражения (3.7) к общему знаменателю и сгруппируем подобные члены в числителе, имеем:

$$\frac{A}{p + 1} + \frac{B}{(p + 1)^2} + \frac{C}{(p + 1)^3} = \frac{A(p + 1)^2 + B(p + 1) + C}{(p + 1)^3} \quad (3.8).$$

Приравняв коэффициенты при соответствующих степенях  $p$  числителей выражений (3.6) и (3.8), запишем систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} A = 1; \\ 2 \cdot A + B = 0; \\ A + B + C = 3, \end{cases}$$

решение которой дает  $A = 1$ ;  $B = -2$ ;  $C = 4$ . Тогда выражение (3.7) принимает вид:

$$w(p) = \frac{p^2 + 3}{(p + 1)^3} = \frac{1}{p + 1} - \frac{2}{(p + 1)^2} + \frac{4}{(p + 1)^3}.$$

По таблицам преобразования Лапласа (таблица П.2. Приложения) определим оригинал выходной переменной, т.е. весовую функцию объекта

$$w(t) = (e^{-t} - 2t \cdot e^{-t} + 2t^2 \cdot e^{-t}) \cdot 1(t) = e^{-t} \cdot (1 - 2t + 2t^2) \cdot 1(t).$$

### 3.3. Задачи для самостоятельной работы

**3.3.1.** Получить выражение переходной функции звена

$$\text{а) } W(p) = \frac{3 \cdot (2 \cdot p + 1)}{5 \cdot p + 1}; \quad \text{б) } W(p) = \frac{3 \cdot p}{6 \cdot p + 1}.$$

**3.3.2.** Получить выражение импульсной переходной функции звена

$$а) W(p) = \frac{4 \cdot (8 \cdot p + 1)}{p \cdot (3 \cdot p + 1)}; \quad б) W(p) = \frac{3}{(2 \cdot p + 1) \cdot (5 \cdot p + 1)}.$$

**3.3.3.** Решить дифференциальные уравнения

$$а) 5 \ddot{y}(t) + 3 \dot{y}(t) = 2 \cdot 1(t); \quad б) 10 \ddot{y}(t) + 11 \dot{y}(t) + y(t) = 2 \cdot \delta(t);$$

$$в) 3 \ddot{y}(t) + 7 \dot{y}(t) = 2 \cdot e^{-t} \cdot 1(t); \quad г) 4 \dot{y}(t) + y(t) = 3 \cdot e^{-2t} \cdot 1(t);$$

$$д) \ddot{y}(t) + 2 \dot{y}(t) + y(t) = 4 \cdot 1(t); \quad е) \ddot{y}(t) + 2 \dot{y}(t) + 5 y(t) = 4 \cdot 1(t);$$

$$ж) \ddot{y}(t) + 2 \dot{y}(t) + 5 y(t) = 5t \cdot 1(t); \quad з) \ddot{y}(t) + y(t) = 4t \cdot 1(t);$$

$$и) \ddot{y}(t) + y(t) = \sin t \cdot 1(t); \quad к) \ddot{y}(t) + 3 \dot{y}(t) + 2 y(t) = \cos t \cdot 1(t).$$

**3.3.4.** Получить выражения переходной и импульсной переходной функций типовых динамических звеньев

$$а) \text{ Апериодического: } W(p) = k/(T \cdot p + 1);$$

$$б) \text{ Реального дифференцирующего: } W(p) = k \cdot p/(T \cdot p + 1);$$

$$в) \text{ Идеального интегрирующего: } W(p) = k/p;$$

$$г) \text{ Реального интегрирующего: } W(p) = k/p \cdot (T \cdot p + 1);$$

$$д) \text{ Реального форсирующего: } W(p) = k \cdot (T_1 \cdot p + 1)/(T_2 \cdot p + 1);$$

$$е) \text{ Колебательного: } W(p) = k/(T^2 \cdot p^2 + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot p + 1);$$

$$ж) \text{ Апериодического 2-го порядка: } W(p) = k/(T_1 \cdot p + 1) \cdot (T_2 \cdot p + 1).$$

## 4. ПОСТРОЕНИЕ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

### 4.1. Предварительные сведения

Частотные характеристики отображают преобразование динамическим звеном входного гармонического сигнала. При подаче на вход линейного динамического звена (объекта управления) гармонического сигнала  $u(t) = U_m \sin(\omega t)$ , на выходе звена появится гармонический сигнал  $y(t) = Y_m \sin(\omega t + \varphi)$  той же частоты  $\omega = 2\pi/T$ , но измененной амплитуды  $Y_m$  и смещенный по фазе относительно входного сигнала на угол  $\varphi$  (рисунок 4.1). Причем при различных частотах  $\omega$  входного гармонического сигнала, у выходного сигнала будут получаться различные значения амплитуды  $Y_m$  и фазового угла  $\varphi$ . Эти изменения амплитуды и фазы выходного сигнала описываются частотными характеристиками звена.

Существуют следующие частотные характеристики:

Амплитудная частотная характеристика (АЧХ)  $A(\omega)$  – это графическая зависимость отношения амплитуды  $Y_m$  выходного гармонического сигнала к амплитуде  $U_m$  входного сигнала от частоты последнего.

$$A(\omega) = \frac{Y_m}{U_m}. \quad (4.1)$$

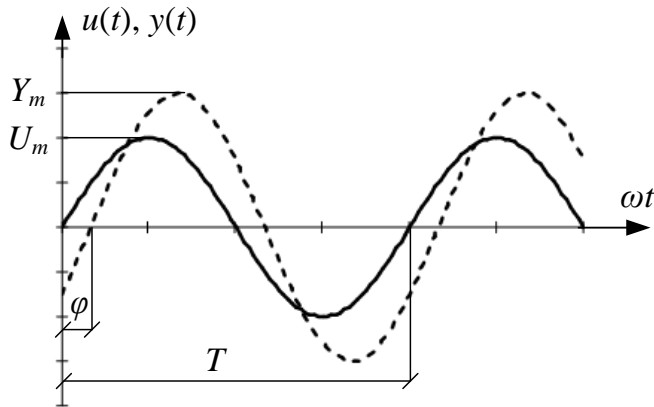


Рисунок 4.1 – Гармонические сигналы на входе и выходе звена

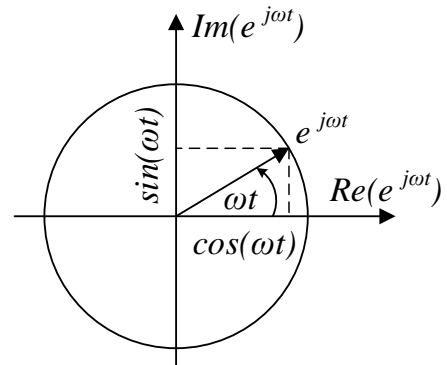


Рисунок 4.2 – Представление гармонического сигнала вращающимся вектором

Фазовая частотная характеристика (ФЧХ)  $\varphi(\omega)$  – это графическая зависимость фазового сдвига выходного гармонического сигнала относительно входного от частоты входного сигнала.

Амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФХ)  $W(j\omega)$  – это комплексная частотная характеристика, объединяющая в себе две предыдущие. При этом, АЧХ является модулем АФХ, а ФЧХ – аргументом АФХ (рисунок 4.3):

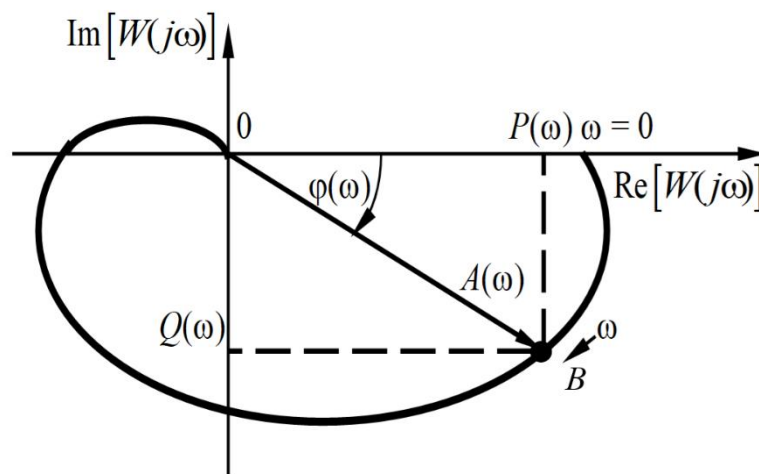


Рисунок 4.3 – Амплитудно-фазовая частотная характеристика

$$W(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}, \quad (4.2)$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)|, \quad (4.3)$$

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega), \quad (4.4)$$

Для получения соотношения (4.2) учтем известное разложение  $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \cdot \sin(\omega t)$  (рисунок 4.2) и представим входной гармонический сигнал  $u(t)$  в виде проекции вращающегося вектора  $U_m e^{j\omega t}$  на мнимую ось:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t) = U_m \cdot \text{Im}(e^{j\omega t}).$$

Соответственно, выходной гармонический сигнал запишется:

$$y(t) = Y_m \sin(\omega t + \varphi) = Y_m \cdot \text{Im}(e^{j(\omega t + \varphi)}) = Y_m \cdot e^{j\varphi} \cdot \text{Im}(e^{j\omega t}).$$

Найдем отношение выходного гармонического сигнала к входному:

$$\begin{aligned} \frac{Y_m \sin(\omega t + \varphi)}{U_m \sin(\omega t)} &= \frac{Y_m \cdot \text{Im}(e^{j(\omega t + \varphi)})}{U_m \cdot \text{Im}(e^{j\omega t})} = \frac{Y_m \cdot e^{j\varphi} \cdot \text{Im}(e^{j\omega t})}{U_m \cdot \text{Im}(e^{j\omega t})} = \\ &= \frac{Y_m}{U_m} e^{j\varphi} = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = W(j\omega). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Выражение (4.5), совпадающее с (4.2), не зависит от времени, является частотной функцией комплексной переменной  $j\omega$  и называется *комплексной передаточной функцией*. Её график представляет собой АФХ звена.

Поскольку передаточная функция звена представляет собой отношение изображений выходного и входного сигналов:  $W(p) = y(p)/u(p)$ , то из выражения (4.5) следует, что АФХ звена  $W(j\omega)$  можно получить из его передаточной функции (рисунок 4.4) путем замены оператора Лапласа  $p$  на переменную  $j\omega$ , т.е. выполнив подстановку:

$$p = j\omega. \quad (4.6)$$

График АФХ (рисунок 4.3) строится на комплексной плоскости при изменении частоты входного сигнала  $\omega$  от 0 до  $\infty$ . При некоторой фиксированной частоте входного сигнала АФХ представляет собой точку (т. В на рисунке 4.3), расстояние от которой до начала координат равно значению АЧХ на этой частоте  $A(\omega)$ , а угол отклонения вектора, соединяющего начало координат с этой точкой, равно значению ФЧХ на этой частоте  $\varphi(\omega)$ .

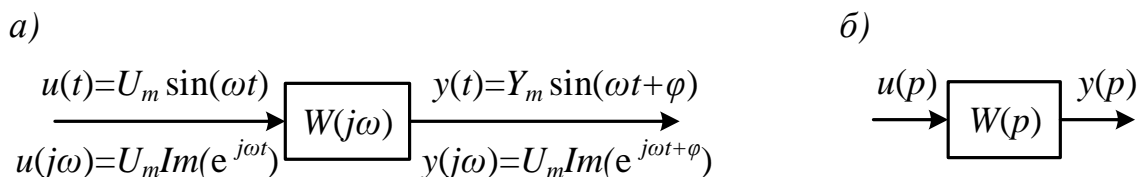


Рисунок 4.4 – Передаточная функция: а) комплексная, б) обыкновенная

Комплексную передаточную функцию  $W(j\omega)$  можно представить в алгебраической форме как сумму действительной и мнимой частей:

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega), \quad (4.7)$$

где  $P(\omega) = \text{Re}[W(j\omega)]$  и  $Q(\omega) = \text{Im}[W(j\omega)]$  – вещественная и мнимая частотные характеристики (ВЧХ и МЧХ).

Из прямоугольного треугольника, изображенного на рисунке 4.3, можно получить следующие формулы связи между частотными характеристиками:

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}, \quad (4.8)$$

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}. \quad (4.9)$$

Для сложных звеньев при выводе частотных характеристик удобно пользоваться не уравнением (4.8) и (4.9), а следующими формулами:

$$W(j\omega) = \frac{R_{\text{числ}}(\omega) + jQ_{\text{числ}}(\omega)}{R_{\text{знам}}(\omega) + jQ_{\text{знам}}(\omega)}, \quad (4.10)$$

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{R_{\text{числ}}^2(\omega) + Q_{\text{числ}}^2(\omega)}{R_{\text{знам}}^2(\omega) + Q_{\text{знам}}^2(\omega)}}, \quad (4.11)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q_{\text{числ}}(\omega)}{R_{\text{числ}}(\omega)} - \arctg \frac{Q_{\text{знам}}(\omega)}{R_{\text{знам}}(\omega)}. \quad (4.12)$$

## 4.2. Примеры

**4.2.1.** Получить выражение и построить графики частотных характеристик апериодического звена с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1}. \quad (4.13)$$

**Решение.** В формуле (4.10) выполним подстановку (4.6)  $p = j\omega$ , получим комплексную передаточную функцию, т.е. выражение для АФХ:

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 + jT\omega}.$$

Для удобства построения АФХ необходимо выделить действительную и мнимую части, для этого домножим числитель и знаменатель АФХ на выражение, комплексно сопряженное со знаменателем, т.е. на  $(1 - jT\omega)$ , получим:

$$W(j\omega) = \frac{k(1 - jT\omega)}{(1 - jT\omega)(1 + jT\omega)} = \frac{k - jkT\omega}{1 - (jT\omega)^2} =$$



$$= \frac{k}{1 + T^2\omega^2} + j \frac{-kT\omega}{1 + T^2\omega^2} = P(\omega) + jQ(\omega), \quad (4.14)$$

здесь  $P(\omega) = \frac{k}{1+T^2\omega^2}$  – действительная часть (ВЧХ),  $Q(\omega) = \frac{-kT\omega}{1+T^2\omega^2}$  – мнимая часть (МЧХ).

Найдем АЧХ апериодического звена, используя формулу (4.8):

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \sqrt{\frac{k^2}{(1 + T^2\omega^2)^2} + \frac{k^2T^2\omega^2}{(1 + T^2\omega^2)^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{k^2(1 + T^2\omega^2)}{(1 + T^2\omega^2)^2}} = \frac{k}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

ФЧХ апериодического звена найдем по формуле (4.9):

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \arctg \left( \frac{-kT\omega}{1 + T^2\omega^2} \cdot \frac{1 + T^2\omega^2}{k} \right) = \\ &= -\arctg(T\omega). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Перед построением графиков АЧХ, ФЧХ и АФХ по формулам (4.15), (4.16) и (4.14) вычислим их значения в крайних точках ( $\omega = 0, \omega = \infty$ ) и на частоте сопряжения  $\omega_c = 1/T$ , данные занесем в таблицу 4.1.

Таблица 4.1 – Значения частотных характеристик апериодического звена

$\omega$	0	1/T	$\infty$
$A(\omega)$	k	$\frac{k}{\sqrt{2}}$	0
$\varphi(\omega)$	0	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$
$P(j\omega)$	k	$\frac{k}{2}$	0
$Q(\omega)$	0	$-\frac{k}{2}$	0

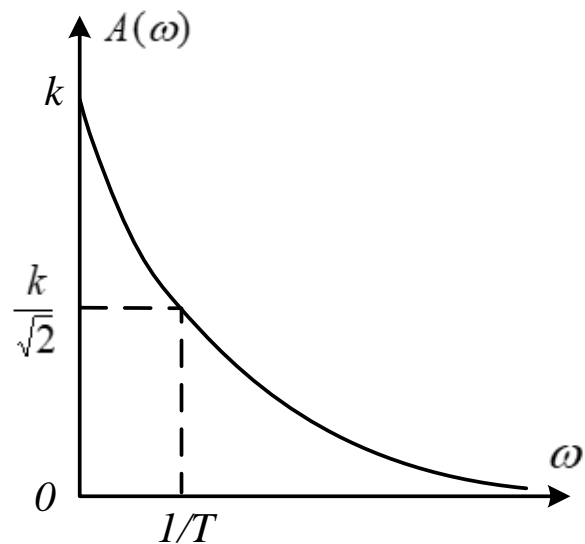


Рисунок 4.5 – График АЧХ апериодического звена

Используя данные таблицы 4.1, строим частотные характеристики апериодического звена, соединяя плавной кривой линией нанесенные на координатную декартовую плоскость точки.

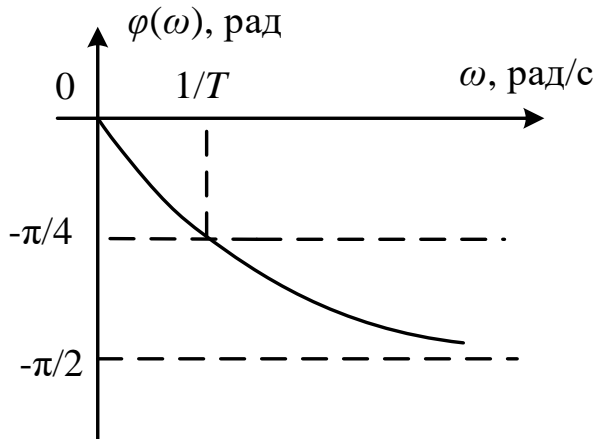


Рисунок 4.6 – ФЧХ апериодического звена

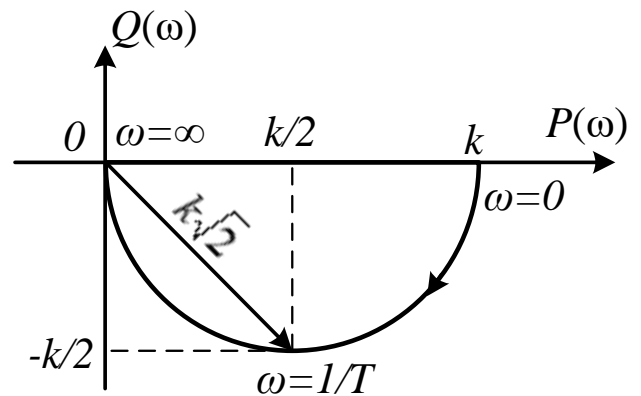


Рисунок 4.7 – АФХ апериодического звена

Из графика АЧХ (рисунок 4.5) видно, что апериодическое звено пропускает входные гармонические сигналы низкой частоты, усиливая их амплитуду примерно в  $k$ -раз. Входные гармонические сигналы высокой частоты апериодическим звеном гасятся (срезаются), при этом амплитуда выходного сигнала стремится к 0.

Из графика ФЧХ (рисунок 4.6) видно, что апериодическое звено незначительно смещает фазу выходного сигнала низкой частоты. Фаза сигнала высокой частоты отстает от входного на угол равный  $-\pi/2$ .

График АФХ (рисунок 4.7) объединяет два предыдущих графика. Вектор, проведенный из начала координат к любой точке графика АФХ, имеет длину, равную значению АЧХ на соответствующей частоте, а угол смещения вектора относительно оси абсцисс – значению ФЧХ на этой частоте. Поэтому для построения графика АФХ можно не вычислять значения МЧХ и ВЧХ, а строить график в полярной системе координат. Для каждой частоты из начала координат откладывается вектор, смещенный относительно оси абсцисс на угол, равный значению ФЧХ на этой частоте, длина его равна значению на АЧХ этой частоте. Соединяя конца всех построенных векторов, получаем график АФХ.

**4.2.2.** Получить выражение и построить графики частотных характеристик реального форсирующего звена с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{k \cdot (T_1 \cdot p + 1)}{T_2 \cdot p + 1} \quad (T_1 < T_2). \quad (4.17)$$

**Решение.** В формуле (4.17) выполним подстановку (4.6)  $p = j\omega$ , получим комплексную передаточную функцию, т.е. выражение для АФХ:

$$W(j\omega) = \frac{k \cdot (1 + jT_1\omega)}{1 + jT_2\omega} = \frac{k + jkT_1\omega}{1 + jT_2\omega}. \quad (4.18)$$

Поскольку данное звено можно отнести к сложным, воспользуемся формулами (4.10) – (4.12) для вывода частотных характеристик. Сравнивая выражения АФХ (4.10) и (4.18), выпишем действительную и мнимую части для числителя и знаменателя отдельно:

$$R_{\text{числ}}(\omega) = k, \quad Q_{\text{числ}}(\omega) = kT_1\omega, \quad R_{\text{знам}}(\omega) = 1, \quad Q_{\text{знам}}(\omega) = T_2\omega.$$

*Замечание:* Обратите внимание, что мнимая единица  $j$  не входит в состав мнимой части частотных характеристик звена.

Воспользуемся формулами (4.11) и (4.12) для нахождения АЧХ и ФЧХ:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \sqrt{\frac{R_{\text{числ}}^2(\omega) + Q_{\text{числ}}^2(\omega)}{R_{\text{знам}}^2(\omega) + Q_{\text{знам}}^2(\omega)}} = \sqrt{\frac{k^2 + (kT_1\omega)^2}{1^2 + (T_2\omega)^2}} = \\ &= k \cdot \sqrt{\frac{1 + (T_1\omega)^2}{1 + (T_2\omega)^2}}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \arctg \frac{Q_{\text{числ}}(\omega)}{R_{\text{числ}}(\omega)} - \arctg \frac{Q_{\text{знам}}(\omega)}{R_{\text{знам}}(\omega)} = \arctg \frac{kT_1\omega}{k} - \arctg \frac{T_2\omega}{1} = \\ &= \arctg(T_1\omega) - \arctg(T_2\omega). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Вычислим значения АЧХ и ФЧХ в крайних точках ( $\omega = 0, \omega = \infty$ ) и на частотах сопряжений  $\omega_{c1} = 1/T_1$  и  $\omega_{c2} = 1/T_2$ , данные занесем в таблицу 4.2.

Таблица 4.2 – Значения частотных характеристик реального форсирующего звена

$\omega$	0	$1/T_2$	$1/T_1$	$\infty$
$A(\omega)$	$k$	$\frac{\sqrt{2}kT_1}{T_1^2 + T_2^2}$	$\frac{T_1^2 + T_2^2}{\sqrt{2}kT_2}$	$\frac{kT_1}{T_2}$
$\varphi(\omega)$	0	$\arctg \frac{T_1}{T_2} - \pi/4$	$\pi/4 - \arctg \frac{T_2}{T_1}$	$-\frac{\pi}{2}$

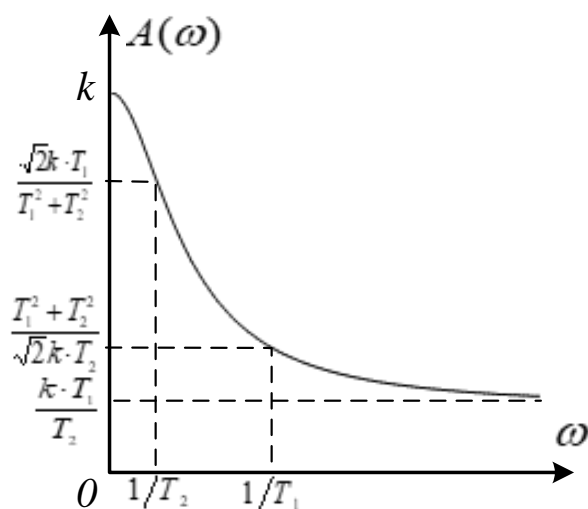


Рисунок 4.8 – График АЧХ реального форсирующего звена

Используя данные таблицы 4.2, строим АЧХ и ФЧХ реального форсирующего звена (рисунки 4.8 и 4.9), соединяя плавной кривой линией нанесенные на координатную декартовую плоскость точки.

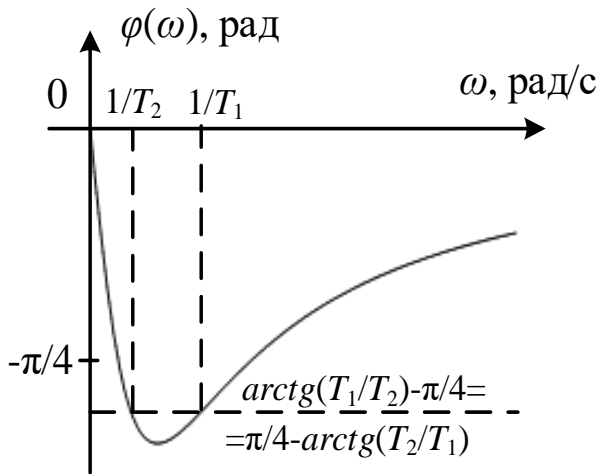


Рисунок 4.9 – ФЧХ реального форсирующего звена

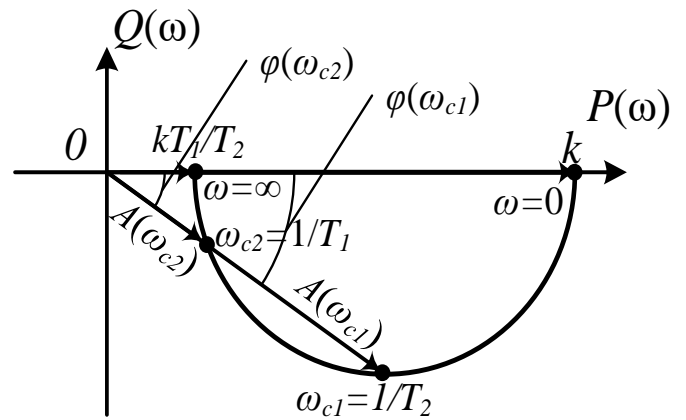


Рисунок 4.10 – АФХ реального форсирующего звена

На рисунке 4.10 изображен график АФХ реального форсирующего звена. При его построении для каждой частоты (таблица 4.2) из начала координат откладывался вектор, смещенный относительно оси абсцисс на угол, равный значению ФЧХ на этой частоте, длина его равна значению АЧХ на этой частоте. Из тригонометрической формулы  $\arctg(\alpha) + \operatorname{arccotg}(\alpha) = \pi/2$  следует, что  $\arctg(T_1/T_2) - \pi/4 = \pi/4 - \arctg(T_2/T_1)$ , поэтому значения ФЧХ на обеих частотах сопряжений совпадают.

### 4.3. Задачи для самостоятельной работы

**4.3.1.** Получить выражения и построить (качественно) частотные характеристики типовых динамических звеньев:

- а) чистого запаздывания:  $W(p) = k \cdot e^{-\tau p}$ ;
- б) реального дифференцирующего:  $W(p) = k \cdot p / (T \cdot p + 1)$ ;
- в) идеального интегрирующего:  $W(p) = k / p$ ;
- г) реального интегрирующего:  $W(p) = k / p \cdot (T \cdot p + 1)$ ;
- д) реального форсирующего:  $W(p) = k(T_1 p + 1) / (T_2 p + 1)$  при  $T_1 > T_2$ ;
- е) колебательного:  $W(p) = k / (T^2 \cdot p^2 + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot p + 1)$ ;
- ж) аperiodического 2-го порядка:  $W(p) = k / (T_1 \cdot p + 1) \cdot (T_2 \cdot p + 1)$ .

## 5. ПОСТРОЕНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

### 5.1. Предварительные сведения

В практических расчетах удобно частотные характеристики изображать в логарифмическом масштабе, это позволяет существенно сократить объем вычислений при их построении.

Мощность усиления или ослабления сигнала измеряют в белых (Б). Бел выражается десятичным логарифмом отношения мощности сигнала на выходе звена  $P_{\text{ВЫХ}}$  к мощности сигнала на входе  $P_{\text{ВХ}}$ . Так как мощность сигнала пропорциональна квадрату его амплитуды, получим:

$$\lg \frac{P_{\text{ВЫХ}}}{P_{\text{ВХ}}} = \lg \left( \frac{Y_m}{U_m} \right)^2 = 2 \cdot \lg \frac{Y_m}{U_m} = 2 \cdot \lg A(\omega), \text{ Б.} \quad (5.1)$$

В технике используют единицу в 10 раз меньшую, чем бел, т.е. децибел (дБ):

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega), \text{ дБ.} \quad (5.2)$$

Десятичный логарифм амплитудной частотной характеристики, выраженный в децибелах (формула (5.2)), называется *логарифмической амплитудной частотной функцией*, а её графическая зависимость от десятичного логарифма частоты – *логарифмической амплитудной частотной характеристикой (ЛАХ)*.

*Логарифмической фазовой частотной характеристикой (ЛФХ)* называют графическую зависимость фазовой частотной функции  $\varphi(\omega)$  от десятичного логарифма частоты  $\lg(\omega)$ .

При построении ЛАХ и ЛФХ по оси абсцисс откладывается не частота  $\omega$ , а её десятичный логарифм, измеряемый в *декадах*. Каждое изменение логарифма частоты на 1 декаду соответствует изменению самой частоты в 10 раз. Начало координат соответствует частоте  $\omega = 1$ , так как  $\lg(1) = 0$ , бесконечно удаленная влево точка на оси абсцисс соответствует частоте  $\omega = 0$ , так как  $\lg(0) = -\infty$ . Графики логарифмических частотных характеристик, по сравнению с графиками обычных частотных характеристик, за счет логарифмического масштаба оси абсцисс оказываются растянутыми в области низких частот и сжатыми в области высоких.

Оси ординат ЛФХ и обычной ФЧХ совпадают, а у ЛАХ и АЧХ отличаются. В соответствии с формулой (5.2), ось ординат ЛАХ имеет логарифмический масштаб, на ней удобно откладывать значения, кратные 20 дБ.

Точка пересечения ЛАХ с осью абсцисс называется *частотой среза*  $\omega_{\text{ср}}$ . Если ЛАХ выше оси абсцисс, то объект усиливает входной сигнал ( $L(\omega) = 20 \lg A(\omega) > 0 \rightarrow A(\omega) = Y_m/U_m > 1 \rightarrow Y_m > U_m$ ), если ниже – ослабляет (срезает входной сигнал).

## 5.2. Примеры

**5.2.1.** Получить выражение и построить графики логарифмических частотных характеристик колебательного звена с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}, \quad (5.3)$$

$\xi=0.1$  – коэффициент демпфирования (гашения колебаний) звена.

**Решение.** Выполним подстановку  $p = j\omega$ , получим АФХ колебательного звена:

$$W(j\omega) = \frac{k}{T^2 j^2 \omega^2 + 2\xi T j\omega + 1} = \frac{k}{(1 - T^2 \omega^2) + j2\xi T \omega}. \quad (5.4)$$

Согласно формуле (4.11) АЧХ колебательного звена равна

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{k^2 + 0^2}{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\xi T \omega)^2}} = \frac{k}{\sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\xi T \omega)^2}} \quad (5.5)$$

Подставим выражение АЧХ (5.5) в формулу (5.2):

$$\begin{aligned} L(\omega) &= \frac{k}{\sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\xi T \omega)^2}} = \\ &= 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\xi T \omega)^2}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

По формуле (5.6) перебирая значения частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$ , можно построить точный график ЛАХ колебательного звена. Однако на практике для простоты строят не точные, а приблизительные графики ЛАХ, состоящие из прямолинейных участков, соединенных между собой на *частотах сопряжения*  $\omega_{ci} = 1/T_i$  ( $T_i$  –  $i$ -тая постоянная времени объекта). Наклон каждого прямолинейного участка кратен 20 дБ/дек. Такие ЛАХ называют *асимптотическими*.

Колебательное звено (5.3) имеет только одну постоянную времени  $T$ , частота сопряжения  $\omega_c = 1/T$  делит ось частот на два диапазона: диапазон низких частот (НЧ), находящийся левее частоты сопряжения и диапазон высоких частот (ВЧ), находящийся правее частоты сопряжения. Для построения асимптотической ЛАХ примем следующие допущения:

1) В диапазоне НЧ выполняется условие:  $\omega \ll \omega_c = 1/T \Rightarrow \omega T \ll 1$ , тогда  $L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{1 - 0 + 0} = 20 \lg k$ . (5.7)

2) В диапазоне ВЧ выполняется условие:  $\omega \gg \omega_c = 1/T \Rightarrow \omega T \gg 1$ , тогда  $L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{(0 - T^2 \omega^2)^2 + 0} = 20 \lg k - 40 \lg(T\omega)$ . (5.8)

График асимптотической ЛАХ колебательного звена, построенный по уравнениям (5.7) и (5.8), показан на рисунке 5.1 жирной ломаной линией.

В диапазоне НЧ это горизонтальная прямая, имеющая наклон, равный 0 дБ/дек и проходящая через ординату, равную  $20 \lg k$ , а в диапазоне ВЧ – прямая с наклоном, равным -20 дБ/дек. Построение асимптотической ЛАХ практически не потребовало вычислений, точная ЛАХ, построенная по формуле (5.6) путем вычисления значений  $L(\omega)$  для каждой частоты, показана на рисунке 5.1 тонкой линией.

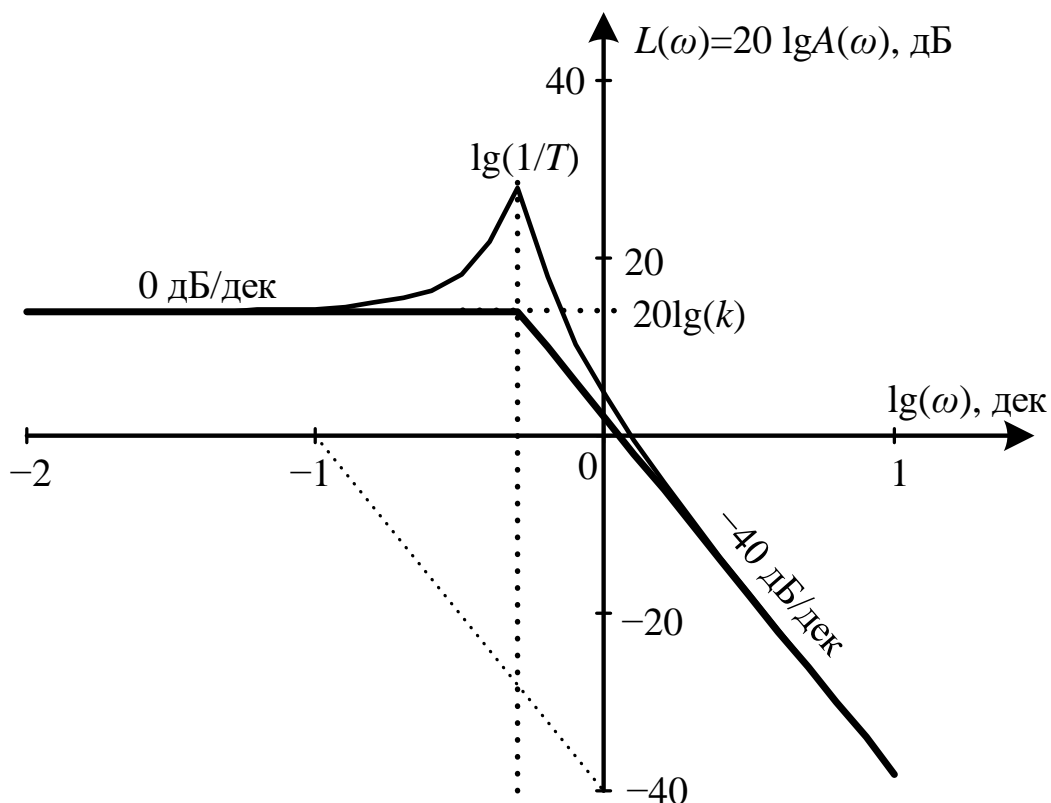


Рисунок 5.1 – ЛАХ колебательного звена (асимптотическая и точная)

Между асимптотической и точной ЛАХ, как видно из этого рисунка, есть различие в окрестности частоты сопряжения  $\lg(\omega_c) = \lg 1/T$ , которое тем больше, чем меньше коэффициент демпфирования ( $0 < \xi < 1$ ). Различие в ЛАХ вызвано резонансным всплеском при малых значениях  $\xi$ , однако при значении  $\xi$  близком к 0,6 различие не существенно и не превышает 3 дБ. Величину резонансного всплеска  $\delta L$  на частоте сопряжения  $\omega_c = 1/T$  легко вычислить, подставив её значение в формулу (5.6):

$$\delta L = L(\omega_c) - 20 \lg k = -20 \lg(2\xi) = 14 \text{ дБ.}$$

Для построения точной ЛФХ сначала определяют выражение для ФЧХ, воспользовавшись формулами (4.12) и (5.4):

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{0}{k} - \arctg \frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2} = -\arctg \frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2}, \quad (5.9)$$

а затем, вычисляя значения  $\varphi(\omega)$  при разных частотах  $\omega = 0, \dots, 1/T, \dots, \infty$  строят график ЛФХ (рисунок 5.2), откладывая по оси абсцисс значения  $\lg(\omega)$ , а по оси ординат – значения  $\varphi(\omega)$ .

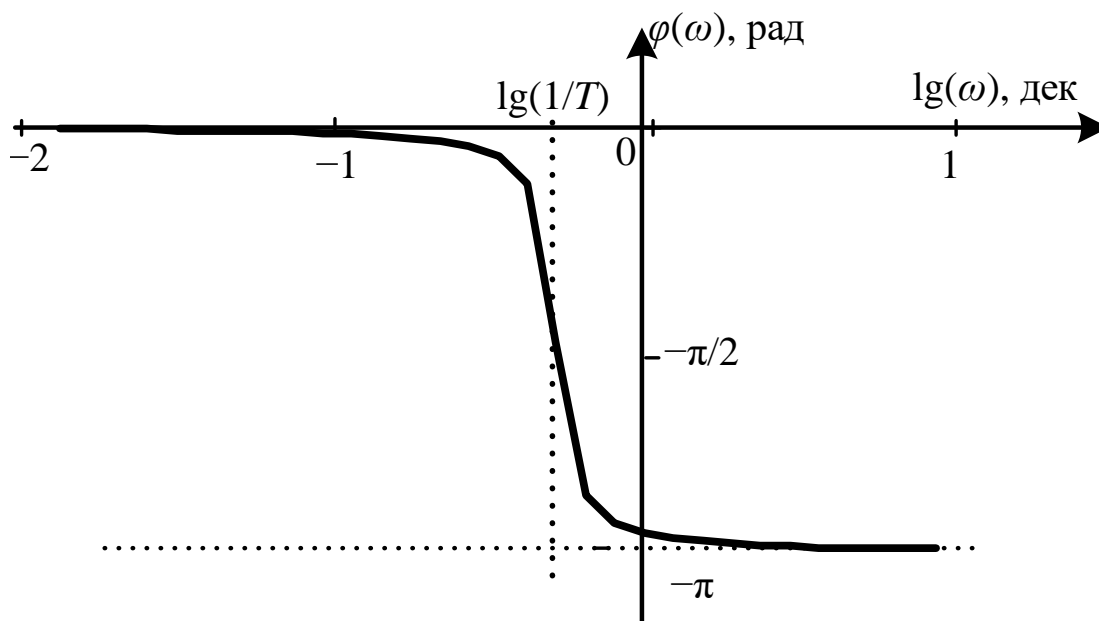


Рисунок 5.2 – ЛФХ колебательного звена

Примерный вид ЛФХ можно получить без вычислений, если учесть простое **правило связи ЛФХ с ЛАХ**: *каждому наклону ЛАХ на  $\pm 20$  дБ/дек соответствует смещение фазы на  $\pm 90^\circ = \pm \pi/2$  рад.*



Поскольку в диапазоне НЧ наклон ЛАХ составляет 0 дБ/дек, то значения ЛФХ в этом диапазоне близки к 0 рад. В диапазоне ВЧ наклон ЛАХ составляет -40 дБ/дек, следовательно значения ЛФХ здесь близки к - $\pi$  рад. На частотах, близких к частоте сопряжения, происходит переход значений ЛФХ от 0 рад к - $\pi$  рад, причем чем меньше величина коэффициента демпфирования  $\xi$ , тем быстрее происходит этот переход (круче наклон ЛФХ). На частоте сопряжения значение ЛФХ равно  $-\pi/2$  рад.

Выходной гармонический сигнал колебательного звена как корректирующего устройства в диапазоне НЧ, при  $\omega \ll 1/T$ , совпадает с входным гармоническим сигналом фазе, а по амплитуде усиливается в  $k$  раз. В диапазоне ВЧ, при  $\omega \gg 1/T$ , происходит постоянное уменьшение амплитуды выходного гармонического сигнала в 100 раз (-40 дБ) при увеличении в 10 раз (на одну декаду) частоты входного гармонического сигнала, а фаза при таком увеличении частоты смещается на 180 угловых градусов ( $\pi$  радиан).

**5.2.2.** Получить выражение и построить графики логарифмических частотных характеристик сложного звена с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{k \cdot (\tau \cdot p + 1)}{(T_1 \cdot p + 1) \cdot (T_2 \cdot p + 1)}, \quad (5.10)$$

где  $k = 1$ ,  $\tau = 0,1$  с,  $T_1 = 0,016$  с,  $T_2 = 1,284$  с.

**Решение.** Для построения частотных характеристик звена рассмотрим комплексную передаточную функцию, получаемую из выражения (5.10) заменой  $p$  на  $j \cdot \omega$ .

$$W(j \cdot \omega) = \frac{k \cdot (1 + j \cdot \tau \cdot \omega)}{(1 + j \cdot T_1 \cdot \omega) \cdot (1 + j \cdot T_2 \cdot \omega)}. \quad (5.11)$$

АЧХ найдем из выражения (4.11):

$$A(\omega) = \frac{k \cdot \sqrt{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}}{\sqrt{(1 + T_1^2 \cdot \omega^2) \cdot (1 + T_2^2 \cdot \omega^2)}}. \quad (5.12)$$

ФЧХ определим из выражения (4.12):

$$\varphi(\omega) = \arctg(\omega \cdot \tau) - \arctg(T_1 \cdot \omega) - \arctg(T_2 \cdot \omega). \quad (5.13)$$

Получим выражения для построения асимптотической ЛАХ в различных диапазонах частот. Выражение ЛАХ, с учетом формулы (5.12), имеет вид:

$$L(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg(\sqrt{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}) - 20 \lg \sqrt{(1 + T_1^2 \cdot \omega^2) \cdot (1 + T_2^2 \cdot \omega^2)}. \quad (5.14)$$

В диапазоне низких частот (НЧ), при  $0 < \omega \ll 1/T_2 = 0,78$  рад/с, поскольку  $\omega T_2 \ll 1$ ,  $\omega \tau \ll 1$  и  $\omega T_1 \ll 1$ , то  $L(\omega) = 20 \lg k = 0$ .

В первом диапазоне средних частот (СЧ1), при  $1/T_2 = 0,78 \ll \omega \ll 1/\tau = 10$  рад/с, поскольку  $\omega T_2 \gg 1$ ,  $\omega \tau \ll 1$  и  $\omega T_1 \ll 1$ , то  $L(\omega) = -20 \cdot \lg(T_2 \cdot \omega)$ .

Во втором диапазоне средних частот (СЧ2), при  $1/\tau = 10 \ll \omega \ll 1/T_1 = 62,5$  рад/с, поскольку  $\omega T_2 \gg 1$ ,  $\omega \tau \gg 1$  и  $\omega T_1 \ll 1$ , то  $L(\omega) = -20 \cdot \lg(T_2 \cdot \omega) + 20 \cdot \lg(\tau \cdot \omega) = 20 \cdot \lg(\tau/T_2) = -22,2$  дБ.

В диапазоне высоких частот (ВЧ), при  $1/T_1 = 62,5 \ll \omega$ , поскольку  $\omega T_2 \gg 1$ ,  $\omega \tau \gg 1$  и  $\omega T_1 \gg 1$ , то

$$L(\omega) = -20 \cdot \lg(T_2 \cdot \omega) + 20 \cdot \lg(\tau \cdot \omega) - 20 \cdot \lg(T_1 \cdot \omega) = -22,2 - 20 \cdot \lg(T_1 \cdot \omega).$$

Точная ЛАХ звена строится по выражению (5.14) при изменении частоты  $\omega$  в диапазоне от 0 до  $\infty$ . Подставляя в формулу (5.14) численные значения постоянных времени звена, данные вычисленных значений  $L(\omega)$  заносим в таблицу 5.1.

Таблица 5.1 – Значения логарифмических частотных характеристик звена

$\omega$ , рад/с	0	0,5	$1/T_2$ 0,78	1,5	2	3	4	6	8	$1/\tau =$ 10	20	30	40	$1/T_1$ 62,5	100	$\infty$
$\lg \omega$ , дек	$-\infty$	-0,3	-0,11	0,18	0,3	0,48	0,6	0,78	0,9	1	1,3	1,48	1,6	1,8	2	$\infty$
$L(\omega)$ , дБ	0	-1,49	-2,99	-6,64	-8,64	-11,6	-13,7	-16,5	-18,2	-19,3	-21,6	-22,6	-23,4	-25,1	-27,6	$\infty$
$\varphi(\omega)$ , рад	0	-0,53	-0,72	-0,97	-1,03	-1,07	-1,06	-1	-0,93	-0,87	-0,73	-0,74	-0,8	-0,93	-1,1	-1,57

На рисунке 5.3 показаны графики точной и асимптотической ЛАХ звена, они близки друг к другу. Асимптотическая ЛАХ состоит из четырех прямолинейных участков, сопряженных между собой в трех соответствующих частотах сопряжений (показаны пунктиром).

Логарифмическая фазовая частотная характеристика (ЛФХ) строится по выражению (5.13) в логарифмическом масштабе по оси абсцисс. Значения ЛФХ сведены в таблице 5.1, а график показан на рисунке 5.4.

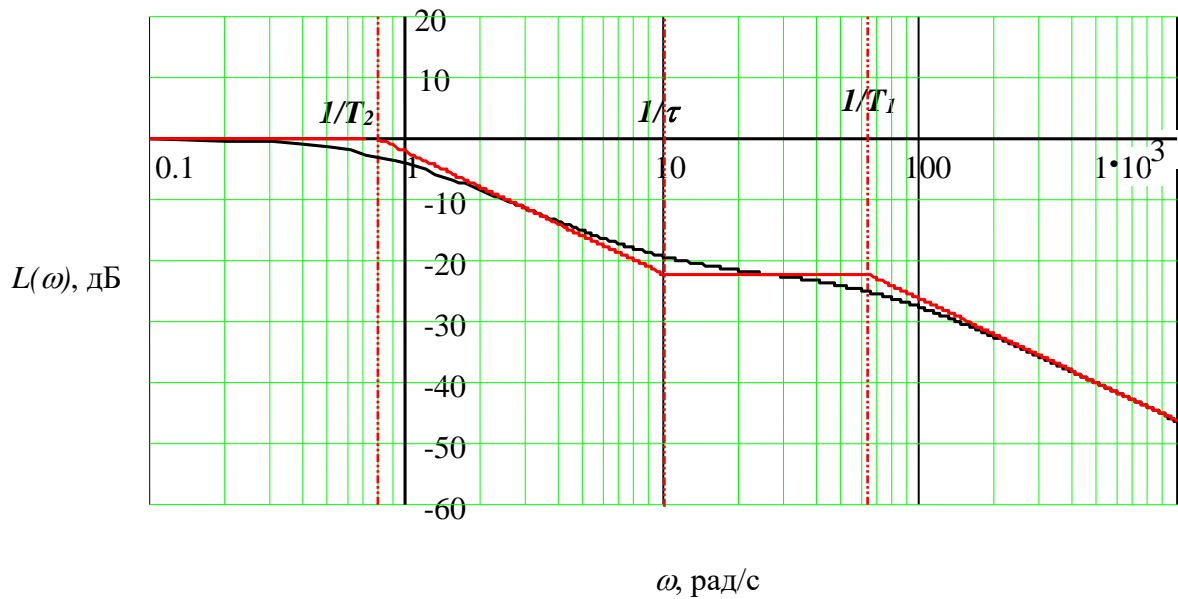


Рисунок 5.3 – Логарифмическая амплитудная частотная характеристика звена

Графики логарифмических характеристик можно строить, откладывая частоту в рад/с, при логарифмической сетке (рисунок 5.3), или в декадах, при равномерной сетке (рисунок 5.4).

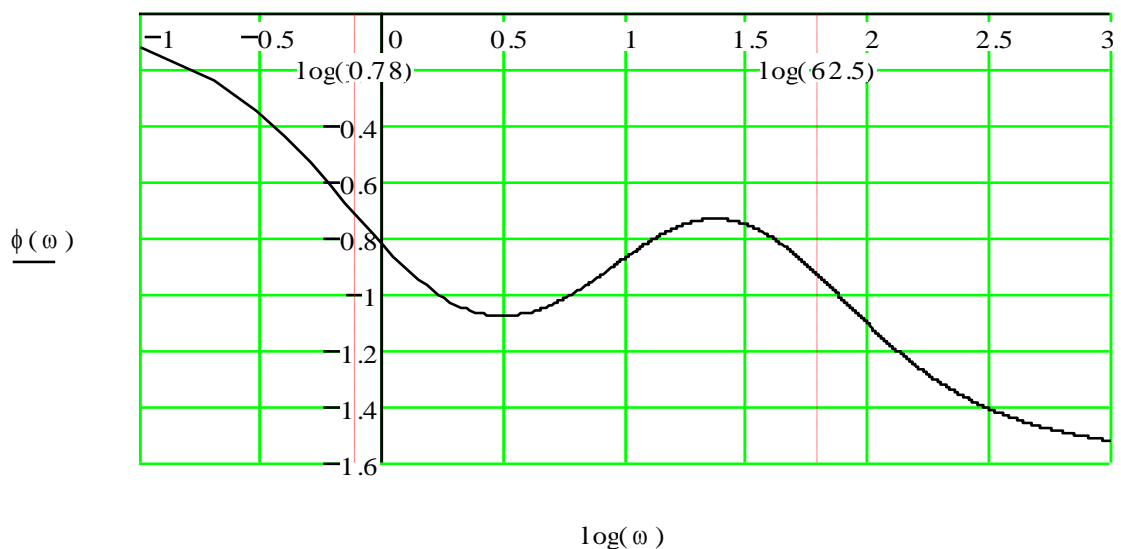


Рисунок 5.4 – Логарифмическая фазовая частотная характеристика звена

Выходной гармонический сигнал данного звена как корректирующего устройства совпадает с входным гармоническим сигналом по амплитуде и фазе в диапазоне низких частот, при  $\omega \ll 1/T_2 = 0,78$  рад/с. В диапазоне средних частот, при  $0,1 < \omega < 1/T_1 = 62,5$  рад/с, амплитуда выходного сигнала уменьшается примерно на 20 дБ за 2 декады, а фаза смещается при увеличении

частоты на 45 - 60 угловых градусов. В диапазоне высоких частот, при  $\omega \gg 1/T_1 = 62,5$  рад/с, происходит постоянное уменьшение амплитуды выходного гармонического сигнала в 10 раз (-20 дБ) при увеличении в 10 раз (на одну декаду) частоты входного гармонического сигнала.

### 5.3. Задачи для самостоятельной работы

**5.3.1.** Получить выражения и построить логарифмические частотные характеристики (асимптотическую ЛАХ и приближенную ЛФХ) типовых динамических звеньев:

- а) чистого запаздывания:  $W(p) = k \cdot e^{-\tau \cdot p}$ ;
- б) реального дифференцирующего:  $W(p) = k \cdot p / (T \cdot p + 1)$ ;
- в) идеального интегрирующего:  $W(p) = k / p$ ;
- г) реального интегрирующего:  $W(p) = k / p \cdot (T \cdot p + 1)$ ;
- д) реального форсирующего:  $W(p) = k(T_1 p + 1) / (T_2 p + 1)$  при  $T_1 > T_2$ ;
- д) реального форсирующего:  $W(p) = k(T_1 p + 1) / (T_2 p + 1)$  при  $T_1 < T_2$ ;
- ж) апериодического 2-го порядка:  $W(p) = k / (T_1 \cdot p + 1) \cdot (T_2 \cdot p + 1)$ .

### 5.4. Построение логарифмических характеристик сложных звеньев

Построение ЛЧХ может быть выполнено практически без вычислений непосредственно по передаточной функции системы по следующим формальным правилам.

1. Передаточную функцию сложного звена приводят к нормальному виду, характеризующему единичными свободными коэффициентами полиномов числителя и знаменателя.

2. Передаточную функцию сложного звена представляют в виде произведения передаточных функций простых звеньев, для этого полиномы числителя и знаменателя раскладывают на простые множители, находя корни полиномов и значения постоянных времени звеньев  $T_i$ .

3. Определяют частоты сопряжений простых звеньев  $\omega_{ci} = 1/T_i$ , нумеруют эти частоты в порядке их возрастания и откладывают значения десятичных логарифмов этих частот на оси абсцисс.

4. Проводят начальный участок асимптотической ЛАХ с наклоном, равным  $\pm 20 \cdot r$  дБ/дек (положительное число  $r$  соответствует числу идеальных

дифференцирующих звеньев, содержащихся в передаточной функции, а отрицательное  $r$  – числу идеальных интегрирующих звеньев, при  $r = 0$ , начальный участок ЛАХ горизонтальный). Начальный участок ЛАХ (или его продолжение) должен пересекать ось ординат в точке  $20 \lg k$  и заканчиваться на первой сопрягающей частоте  $\omega_{c1}$ .

5. На каждой сопрягающей частоте  $\omega_{ci}$  изменяется наклон асимптотической ЛАХ на  $\pm 20 \cdot d$  дБ/дек (положительное число  $d$  соответствует степени постоянной времени  $T_i^d$  звена, находящегося в числителе передаточной функции, а отрицательное  $d$  – степени постоянной времени  $T_i^d$  звена, находящегося в знаменателе сложной передаточной функции).

6. Приближенную ЛФХ строят либо суммируя ЛФХ всех простых звеньев, входящих в состав сложного звена, либо используя уже рассмотренное выше правило связи ЛФХ с ЛАХ.

## 5.5. Примеры

### 5.5.1. Построить ЛЧХ сложного звена с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{0,5 \cdot (30p + 3)}{p(162,5p + 2,5)(0,98p^2 + 0,84p + 2)}. \quad (5.15)$$

#### Решение

1. Для приведения передаточной функции (5.15) к нормальному виду, вынесем за скобки в числителе число 3, а в знаменателе – 2,5 и 2:

$$W(p) = \frac{0,5 \cdot 3 \cdot (10p + 1)}{2,5 \cdot 2 \cdot p(65p + 1)(0,49p^2 + 0,42p + 1)}.$$

2. Определим дискриминант квадратного полинома в знаменателе с целью разложения его на множители:  $D = 0,42^2 - 4 \cdot 0,49 = -1,78 < 0$ . Дискриминант отрицательный, следовательно, полином нельзя разложить на действительные множители, звено является колебательным.

3. Окончательно представим передаточную функцию (5.15) в виде (5.16), расположив постоянные времени  $T_i$  в порядке убывания их значений:

$$W(p) = \frac{k \cdot (T_2 \cdot p + 1)}{p \cdot (T_1 \cdot p + 1)(T_3^2 \cdot p^2 + 2 \cdot \xi \cdot T_3 \cdot p + 1)}, \quad (5.16)$$

$$k = 0,3; T_1 = 65; T_2 = 10; T_3 = 0,7; \xi = 0,3.$$

Частоты сопряжений будут равны:

$$\omega_{c1} = 1/T_1 = 0,0154 \text{ рад}, \quad \lg \omega_{c1} = -1,813 \text{ дек};$$

$$\omega_{c2} = 1/T_2 = 0,1 \text{ рад}, \quad \lg \omega_{c2} = -1 \text{ дек};$$

$$\omega_{c3} = 1/T_3 = 1,428 \text{ рад}, \quad \lg \omega_{c3} = 0,155 \text{ дек}.$$

Значения десятичных логарифмов этих частот показаны вертикальными пунктирными линиями на рисунках 5.5 и 5.6.

4. Передаточная функция (5.16) содержит идеальное интегрирующее звено 1-го порядка, следовательно, начальный участок ЛАХ будет иметь наклон, равный  $-20$  дБ/дек, продолжение начального участка будет пересекать ось ординат в точке  $20 \lg k = 20 \lg 0,3 = -10,458$  дБ. Начальный участок ЛАХ продолжается до первой сопрягающей частоты и показан на рисунке 5.5 сплошной жирной прямой, его продолжение показано пунктиром.

5. На первой сопрягающей частоте ЛАХ изломится на  $-20$  дБ/дек, так как звено первого порядка с постоянной времени  $T_1$  находится в знаменателе (суммарный наклон равен  $-40$  дБ/дек). На второй сопрягающей частоте ЛАХ изломится на  $+20$  дБ/дек, так как звено первого порядка с постоянной времени  $T_2$  находится в числителе (суммарный наклон станет равен  $-20$  дБ/дек). На третьей сопрягающей частоте ЛАХ изломится на  $-40$  дБ/дек, так как звено второго порядка с постоянной времени  $T_3$  находится в знаменателе (суммарный наклон будет равен  $-60$  дБ/дек). Тонкой линией показана точная ЛАХ, величина резонансного всплеска равна  $\delta L = -20 \lg(2\xi) = -20 \lg(2 \cdot 0,3) = 4,44$  дБ.

6. ЛФХ звена изображена на рисунке 5.6. Кривая построена по виду ЛАХ и имеет экстремумы в середине частотных диапазонов.

**5.5.2.** По заданной на рисунке 5.5 асимптотической ЛАХ сложного звена восстановить его передаточную функцию.

**Решение.** Наклон начального участка ЛАХ, равный  $-20$  дБ/дек, указывает на присутствие в передаточной функции идеального интегрирующего звена 1-го порядка.

Продолжение начального участка ЛАХ пересекает ось ординат в точке, равной  $-10,458$  дБ, следовательно, коэффициент передачи звена будет равен:

$$k = 10^{\frac{-10,458}{20}} = 0,3.$$

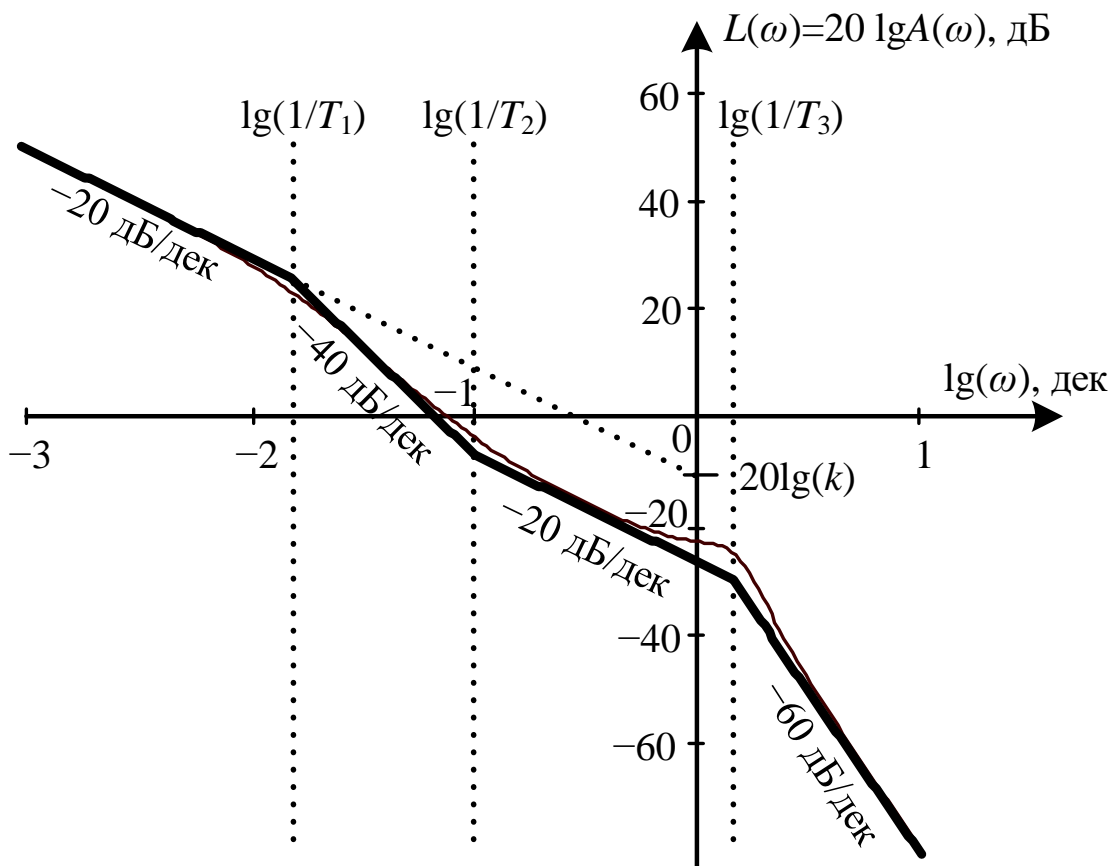


Рисунок 5.5 – ЛАХ сложного звена (асимптотическая и точная)

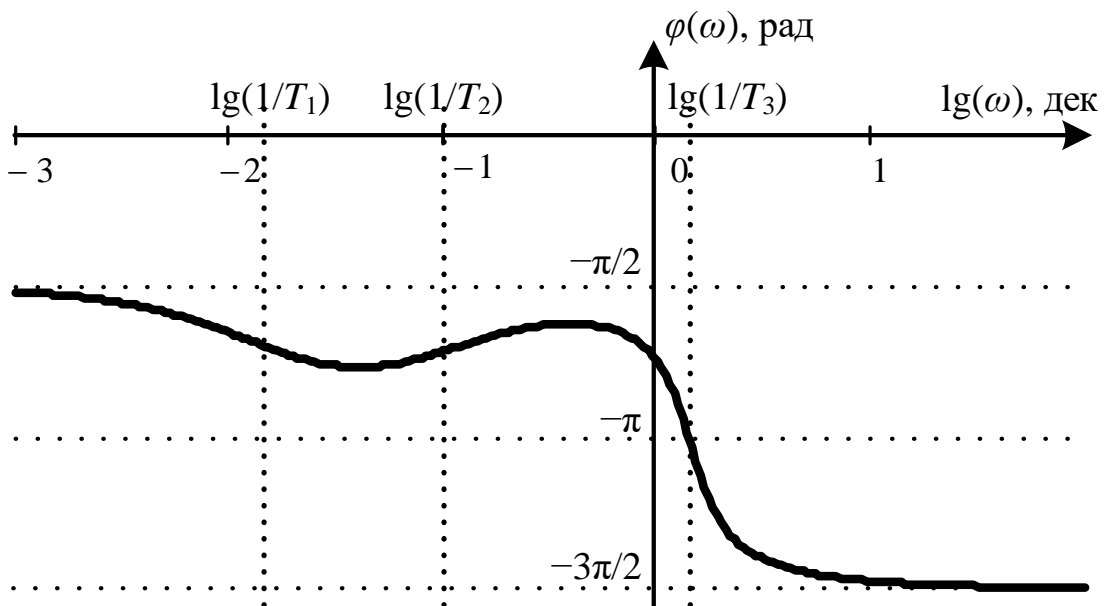


Рисунок 5.6 – ЛФХ сложного звена

После первой по величине частоты сопряжения  $\lg \omega_{c1} = -1,813$  дек, наклон ЛАХ изменился на  $-20$  дБ/дек. Такой наклон имеет ЛАХ апериодического звена, его постоянная времени будет равна  $T_1 = 1/10^{-1,813} = 65$  с.

Анализируя изменение наклонов асимптот ЛАХ, можно заключить, что помимо упомянутых типовых звеньев, в систему включены форсирующее звено с постоянной времени, равной  $T_2 = 1/10^{-1} = 10$  с, и колебательное звено с постоянной времени, равной  $T_3 = 1/10^{0,155} = 0,7$  с. По всплеску ЛАХ, равному 4,44 дБ, на частоте сопряжения колебательного звена определим коэффициент демпфирования:  $\xi = 0,5 \cdot 10^{-4,44/20} = 0,3$ .

Окончательный ответ:

$$W(p) = \frac{0,3 \cdot (10 \cdot p + 1)}{p \cdot (65 \cdot p + 1)(0,7^2 \cdot p^2 + 2 \cdot 0,3 \cdot 0,7 \cdot p + 1)}$$

## 5.6. Задачи для самостоятельной работы

5.6.1. Построить асимптотическую ЛАХ и приближенную ЛФХ звеньев:

$$а) W(p) = \frac{100(p+1)^2(0,01p+1)}{p^3 \cdot (100p^2+5p+1)(0,1p+1)}$$

$$б) W(p) = \frac{0,1(10p+1)^2(0,1p+1)}{p \cdot (100p^2+101p+1)(0,01p+1)^2}$$

$$в) W(p) = \frac{350(5p+2)(0,014p+0,25)}{p^2 \cdot (0,0625p^2+0,045p+1)(0,016p+5)}$$

$$г) W(p) = \frac{0,012 \cdot p^3 \cdot (4p^2+2p+1)}{(65p+0,8)(4p^2+40,4p+4)(0,1p+7)^2}$$

$$д) W(p) = \frac{2,5 \cdot p \cdot (2,25p^2+p+1)}{(0,2p+1)(0,01p^2+0,1p+0,25)(8p+1)}$$

$$е) W(p) = \frac{250 \cdot p \cdot (0,4p^2+p+1)}{(2,5p+0,5)(100p^2+40p+4)(0,16p+1)}$$

Измените оси координат построенных ЛАХ, сместив их на 20 дБ вверх и на 1 декаду вправо. Определите передаточную функцию по полученной ЛАХ.

## Библиографический список

Большая Советская Энциклопедия. В 30 томах (комплект из 31 книги). - М.: Советская Энциклопедия, 1970.



## ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица П.1. Основные свойства преобразования Лапласа

Свойство	Оригинал	Изображение
1. Линейность	$ax(t)$ $x_1(t) \pm x_2(t)$	$aX(p)$ $x_1(p) \pm x_2(p)$
2. Дифференцирование	$d^n x(t) / dt^n$	$X(p) \cdot p^n$
3. Интегрирование	$\int_0^t n \text{ раз} \int_0^t x(\vartheta) d\vartheta^n$	$X(p) / p^n$
4. Запоздывание	$x(t - \tau)$	$X(p) \cdot e^{-\tau \cdot p}$
5. Теоремы о начальном и конечном значениях	$\lim_{t \rightarrow 0} x(t)$ $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$	$\lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot X(p)$ $\lim_{p \rightarrow 0} p \cdot X(p)$

Таблица П.2. Изображения по Лапласу некоторых функций времени

Функция	Оригинал	Изображение
1. Дельта-функция	$\delta(t)$	1
2. Ступенчатая	$1(t)$	$1/p$
3. Степенная	$t^n \cdot 1(t)$	$n! / p^{n+1}$
4. Экспонента	$e^{-\alpha \cdot t} \cdot 1(t)$	$1/(p + \alpha)$
5. Синусоида	$\sin(\omega t) \cdot 1(t)$	$\omega / (p^2 + \omega^2)$
6. Косинусоида	$\cos(\omega t) \cdot 1(t)$	$p / (p^2 + \omega^2)$
7. Другие функции	$t^n \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot 1(t)$	$n! / (p + \alpha)^{n+1}$
	$e^{-\alpha \cdot t} \sin(\omega t) 1(t)$	$\frac{\omega}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$
	$e^{-\alpha \cdot t} \cos(\omega t) 1(t)$	$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$

**Николай Семенович Благодарный**

# **ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

## **Анализ систем автоматического управления в примерах и задачах (1 часть)**

**Практикум**

Редактор и корректор В.А. Басова  
Техн. редактор Л.Я. Титова

Темплан 2020 г., поз. № 116

---

Подп. к печати 24.12.2020      Формат 60x84/16      Бумага тип. № 1.  
Печать офсетная.      Объем 4,0 уч.-изд. л.      Тираж 70 экз.      Изд. 116  
Цена «С». Заказ

---

Ризограф Высшей школы технологии и энергетики СПбГУПТД, 198095,  
СПб., ул. Ивана Черных, 4.