ISSN 0869-8325

ТОМ 17
Выпуск 4

ОБОЗРЕНИЕ ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

В выпуске:

Секция **«Математические методы экологии»**

16 – 23 X • 2010

Одиннадцатый Всероссийский симпозиум
по прикладной и промышленной математике
(Осенняя открытая сессия)

Региональный Макросимпозиум
«Насущные задачи прикладной математики на Кубани»
Научные доклады. Часть I

Редакция журнала «ОПиПМ» • МОСКВА
2010

ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 17 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2010

КИРИЛЛОВ А. Н.

МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ В МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССА БИОЛОГИЧЕСКОЙ ОЧИСТКИ СТОЧНЫХ ВОД

1. Введение

Задача стабилизации процесса очистки сточных вод от промышленных сбросов играет важную роль в проблеме охраны окружающей среды. В 1987 году была создана так называемая *модель* № 1 очистки с помощью активного ила [1], которая стимулировала использование математического моделирования в практике инженерных расчетов [2]–[4]. Сложность процесса очистки сточных вод связана с различными аспектами биологического, физико-химического, технологического характера. Так, например, широкий спектр примесей в стоках, количество и состав которых не стационарны и трудно прогнозируемы, оказывает негативное влияние на возможности использования наиболее универсального метода очистки сточных вод, которым является в настоящее время метод очистки с помощью активного ила. Сточные воды представляют собой многокомпонентный субстрат-загрязнитель, в то время как активный ил состоит из многочисленных групп микроорганизмов.

В работах [5], [6] показано, что при небольшом времени оборота биомассы в микрофлоре активного ила преобладают быстрорастущие виды, приспособленные к потреблению легкоокисляемых соединений. При этом медленнорастущие группы, специализирующиеся на потреблении трудноусвояемых соединений, вытесняются из реактора, в результате чего эти соединения попадают в стоки, не разлагаясь. Наоборот, если время оборота биомассы достаточно велико, то в очистной системе закрепляются медленнорастущие группы. При этом увеличивается разнообразие закрепившихся видов и идет процесс глубокой очистки. Отметим, что необоснованное увеличение времени пребывания биомассы в аэротенке уменьшает эффективность процесса очистки. Возникает проблема построения модели, учитывающей непостоянство видового состава сообщества микроорганизмов активного ила. В данной работе представлен подход, анонсированный в [7], к решению этой проблемы на основе предложенного автором метода динамической декомпозиции, суть которого состоит в возможности изменения размерности и структуры системы в процессе ее функционирования. В результате получается последовательность относительно простых моделей, сменяющих друг друга в зависимости от условий протекания процесса. Для каждой модели решается задача управления процессом очистки на основе алгоритма T-стабилизации [8]. Отметим, что метод динамической декомпозиции для линейных систем рассмотрен в [9]. Предлагаемый подход позволяет повысить эффективность процесса биоочистки [10].

2. Метод динамической декомпозиции

Суть метода состоит в построении модели системы с переменной структурой и размерностью. Рассмотрим сложную систему S, в состав которой могут входить подсистемы $S_1, \ldots, S_n$. Динамика подсистемы S_i задается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{X}_i = f_i(X_i), \tag{1}$$

где $X_i \in \mathbf{R}^{\bar{i}}$, $\bar{i}$ — размерность фазового пространства подсистемы S_i, $X_i^T = (x_{i1}, \ldots, x_{i\bar{i}})$, $x_{ij} \in \mathbf{R}$, $j = 1, 2, \ldots, \bar{i}$, вектор-функции f_i: $\mathbf{R}^{\bar{i}} \to \mathbf{R}^{\bar{i}}$ удовлетворяют условиям существования и единственности решений системы (1).

Введем такой вектор $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))^T$, что $\gamma_i(t) = 1$, если в момент времени t подсистема S_i входит в состав S; $\gamma_i(t) = 0$, если в момент времени t подсистема S_i не входит в состав S. Здесь X^T — транспонированный вектор X.

Определение. Вектор $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))^T$ называется *вектором внешней структуры* системы S в момент времени t.

Динамика системы S задается системами обыкновенных дифференциальных уравнений, правые части которых зависят от структуры γ. Так, если в состав S входят подсистемы $S_{k_1}, \ldots, S_{k_m}$, т.е. $S = S(k_1, \ldots, k_m)$, то S задается системой уравнений вида

$$\dot{X}_{k_i} = f^{k_i}_{k_1,\ldots,k_m}(X_{k_1}, \ldots, X_{k_i}, \ldots, X_{k_m}), \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{2}$$

где $f^{k_i}_{k_1,\ldots,k_m}$: $R^{\bar{k}_1+\cdots+\bar{k}_m} \to \mathbf{R}^{\bar{k}_i}$, причем правые части обеспечивают существование и единственность решения системы (2). Будем считать, что набор $(k_1, \ldots, k_m)$ неупорядочен, хотя при необходимости это можно сделать. Можно положить, что k_m — номер последней по времени подсистемы, подключившейся к S. Таким образом, при подключении к системе $S(k_1, \ldots, k_m)$ подсистемы S_l получаем систему $S(k_1, \ldots, k_m, l) = S(k_1, \ldots, k_m, k_{m+1})$, где $k_{m+1} = l$, а при отключении от $S(k_1, \ldots, k_m)$ подсистемы S_{k_i} получаем систему $S(k_1, \ldots, \widehat{k}_r, \ldots, k_{m+1})$, где символ $\widehat{k}_r$ означает отсутствие номера k_r в наборе $(k_1, \ldots, k_{m+1})$.

Используя вектор внешней структуры, можно задать динамику S проще, а именно, набору $(k_1, \ldots, k_m)$ поставим во взаимно однозначное соответствие вектор структуры $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)^T$, где $\gamma_{k_i} = 1, r=1, \ldots, m$, $\gamma_{k_i} = 0$, $l \not\in \{1, \ldots, m\}$. Блочному вектору $(X_{k_1}, \ldots, X_{k_i}, \ldots, X_{k_m})$ можно сопоставить блочный вектор $X(\gamma) = (\gamma_1 X_1, \ldots, \gamma_n X_n)^T$, у которого на местах с номерами $k_1, \ldots, k_m$ находятся нулевые векторы соответствующих размерностей, причем $X(\gamma(t)) = (\gamma_1(t) X_1(t), \ldots, \gamma_n(t) X_n(t))^T$. Далее полагаем, что в момент времени t: $f^{k_i}_{k_1,\ldots,k_m}(X_{k_1}, \ldots, X_{k_i}, \ldots, X_{k_m}) = f^{k_i}_{\gamma(t)}(\gamma_1(t) X_1, \ldots, \gamma_n(t) X_n)$. Тогда система (2) примет вид

$$\gamma_i(t)\,\dot{X}_i = \gamma_i(t)\, f^i_{\gamma(t)}(\gamma_1(t) X_1, \ldots, \gamma_n(t) X_n), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

или

$$\dot{X}(\gamma(t)) = f_{\gamma(t)}(\gamma(t)) X(\gamma(t)), \tag{3}$$

где $\dot{X}(\gamma(t)) = (\gamma_1(t) \dot{X}_1(t), \ldots, \gamma_n(t) \dot{X}_n(t))^T$, $f_{\gamma(t)}(\gamma(t)) = (\gamma_1(t) f^1_{\gamma(t)}, \ldots, \gamma_n(t) f^n_{\gamma(t)})^T$.

З а м е ч а н и е. Если ввести матрицу $\Gamma(t) = \{\gamma_{ij}(t)\}, i, j=1, 2, \ldots, n$, $\gamma_{ii} = \gamma_i$, $\gamma_{ij} = 0$, $i \neq j$, то систему (4) можно записать в виде

$$\Gamma(t)\,\dot{X} = \Gamma(t)\, f_{\gamma(t)}(\Gamma(t)\, X),$$

где $X^T = (X_1, \ldots, X_n)$, $f_{\gamma(t)} = (f^1_{\gamma(t)}, \ldots, f^n_{\gamma(t)})^T$.

Заметим также, что система (1) примет вид $\dot{X}_i = f^i_{\gamma(t)}(X_i)$, где $\gamma(t) = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, причем 1 находится на i-м месте, а остальные компоненты вектора $\gamma(t)$ равны 0. Размерность $N(t)$ системы S в момент времени t равна скалярному произведению

$$N(t) = \gamma^T(t)\, \nu, \tag{4}$$

где вектор $\nu \in \mathbf{R}^n$ имеет компоненты, равные 1.

Для определения условий изменения внешней структуры рассмотрим систему уравнений

$$\dot{y}_i = g^i_{\gamma(t)}(\gamma_1(t) X_1, \ldots, \gamma_n(t) X_n), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

или

$$\dot{y} = g_{\gamma(t)}(X(\gamma(t))), \tag{5}$$

где $g^i_{k_1,\ldots,k_m} = g^i_{\gamma(t)}$: $\mathbf{R}^{\overline{k}_1 + \cdots + \overline{k}_m} \to \mathbf{R}$, причем вектор $\gamma(t)$ в момент времени t имеет компоненты, равные $\gamma_{k_i} = 1$, $r = 1, 2, \ldots, m$, $\gamma_{k_i} = 0$, $l \notin \{1, \ldots, m\}$, $g_{\gamma(t)} = (g^1_{\gamma(t)}, \ldots, g^n_{\gamma(t)})^T$. Пусть $y = (y_1, \ldots, y_n)^T \in \mathbf{R}^n$.

Далее рассмотрим гиперповерхности $\Psi_i(y, X(\gamma)) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, переменного фазового пространства системы (3), (5). Будем полагать, что при $\Psi_i(y, X(\gamma)) < 0$ подсистема S_i не входит в состав S, а при $\Psi_i(y, X(\gamma)) > 0$, наоборот, входит.

Подключение подсистемы S_i. Пусть фазовая траектория системы (3),(5) в момент времени t_i^+ попадает на поверхность $\Psi_i(y, X(\gamma)) = 0$

(т.е. $\Psi_i(y(t_i^+), X(\gamma(t_i^+))) = 0$) из области $\Psi_i(y, X(\gamma)) < 0$. Момент времени t_i^+ назовем *начальным моментом времени подключения* подсистемы S_i.

Далее возможно переходное развитие системы по одному из сценариев: разрывное или непрерывное подключение.

Разрывное подключение. В момент времени $t_i^+ + \delta_i^+(X(\gamma(t_i^+))) = \widetilde{t}_i^+$ происходит подключение подсистемы S_i к S, которая временно прекращает функционировать на промежутке времени $[t_i^+, \widetilde{t}_i^+]$, где величина $\delta_i^+(X(\gamma(t_i^+)))$ — заданная постоянная, $\delta_i^+(X(\gamma(t_i^+))) \geqslant 0$. Очевидно, если $\delta_i^+(X(\gamma(t_i^+))) = 0$, то S при подключении S_i не прекращает функционировать. Введем переходное отображение φ_i^+, действующее следующим образом:

$$\varphi_i^+ \colon (X(\gamma(t_i^+)), y(t_i^+), t_i^+) \to (\widetilde{X}(\gamma(\widetilde{t}_i^+)), \widetilde{y}^+, \widetilde{t}_i^+),$$

где $\Psi_i(\widetilde{y}^+, \widetilde{X}(\gamma(\widetilde{t}_i^+))) > 0$, т.е. φ_i^+ переводит вектор $(X(\gamma(t_i^+)), y(t_i^+), t_i^+)$ в вектор $(\widetilde{X}(\gamma(\widetilde{t}_i^+)), \widetilde{y}^+, \widetilde{t}_i^+)$. Время $\delta_i^+(X(\gamma(t_i^+)))$ расходуется на процесс подключения S_i. В течение этого времени система S «простаивает» (если $\delta_i^+(X(\gamma(t_i^+))) > 0$), т.е. уравнения (3), (5) не действуют. Таким образом, после подключения S_i система S начинает функционировать в момент времени $\widetilde{t}_i^+$ из начального состояния $(\widetilde{X}(\gamma(\widetilde{t}_i^+)), \widetilde{y}^+)$.

Непрерывное подключение. В момент времени t_i^+ прекращает функционировать на промежутке времени $[t_i^+, \widetilde{t}_i^+]$ система (3), а система (5) функционирует. Введем непрерывный переходный оператор $\widetilde{\varphi}_i^+$, действующий следующим образом: $\widetilde{\varphi}_i^+ \colon \mathbf{X}(\gamma(t_i^+)) \to \widetilde{X}^+$, где $\widetilde{X}^+$ — заданная непрерывная функция, $\widetilde{\mathbf{X}}^+ \colon [t_i^+, \widetilde{t}_i^+] \to \mathbf{R}^{N(t)}$, $\delta_i^+(X(\gamma(t_i^+)))$ — величина временного промежутка подключения подсистемы S_i, $\delta_i^+(X(\gamma(t_i^+))) \geqslant 0$, $\widetilde{X}^+(\gamma(t_i^+)) = X(\gamma(t_i^+))$. Как уже отмечалось, на промежутке $[t_i^+, \widetilde{t}_i^+]$ система (3) не действует, а динамика переменной $y(t)$, будем полагать, задается, как и ранее, системой (5), в правые части которой вместо $X(\gamma(t))$ подставлена функция $\widetilde{X}^+(\gamma(t))$:

$$\dot{y} = g_{\gamma(t)}(\widetilde{X}^+(\gamma(t))).$$

Далее, если $\Psi_i(y(\widetilde{t}_i^+), X(\gamma(\widetilde{t}_i^+))) > 0$, то в момент времени $t = \widetilde{t}_i^+$ происходит подключение подсистемы S_i, и динамика S задается уравнениями (3), (5) с начальными данными $X(\gamma(\widetilde{t}_i^+)) = \widetilde{X}^+(\gamma(\widetilde{t}_i^+))$. Если $\Psi_i(y(\widetilde{t}_i^+), \widetilde{X}^+(\gamma(\widetilde{t}_i^+))) < 0$, то подключения S_i не происходит. Можно сказать, что в этом случае произошла «ложная тревога». Случай $\Psi_i(y(\widetilde{t}_i^+), \widetilde{X}^+(\gamma(\widetilde{t}_i^+))) = 0$ рассмотрим подробнее ниже.

Итак, пусть $\Psi_i(y(\widetilde{t}_i^+), \widetilde{X}^+(\gamma(\widetilde{t}_i^+))) = 0$. Если при этом выполнено $\Psi_i(y(t), \widetilde{X}^+(\gamma(t)) = 0$ при $t \in [\widetilde{t}_i^+ - \delta, \widetilde{t}_i^+)$, где δ — достаточно малая положительная постоянная,то при $\Psi_i(y(\widetilde{t}_i^+), \widetilde{X}^+(\gamma(\widetilde{t}_i^+))) = 0$ (т.е. фазовая траектория при $t = \widetilde{t}_i^+$ касается поверхности $\Psi_i(y, \widetilde{X}^+(\gamma)) = 0$) происходит подключение подсистемы S_i, а при $\Psi_i(y(\widetilde{t}_i^+), \widetilde{X}^+(\gamma(\widetilde{t}_i^+))) < 0$ S_i не подключается. Если $\Psi_i(y(t), \widetilde{X}^+(\gamma(t))) < 0$ при $t \in [\widetilde{t}_i^+ - \delta, \widetilde{t}_i^+)$, то при $\Psi_i(y(\widetilde{t}_i^+), \widetilde{X}^+(\gamma(\widetilde{t}_i^+))) > 0$ происходит подключение S_i, а при $\Psi_i(y(\widetilde{t}_i^+), \widetilde{X}^+(\gamma(\widetilde{t}_i^+))) = 0$ подсистема S_i не подключается.

Отключение подсистемы S_i. Пусть фазовая траектория системы (3), (5) в момент времени t_i^- попадает на поверхность $\Psi_i(y, X(\gamma)) = 0$ (т.е. $\Psi_i(y(\widetilde{t}_i^+), X(\gamma(\widetilde{t}_i^+))) = 0$) из области $\Psi_i(y, X(\gamma)) > 0$. Момент времени t_i^- назовем *начальным моментом времени отключения* подсистемы S_i.

Далее возможно переходное развитие системы по одному из сценариев: разрывное или непрерывное отключение.

Разрывное отключение. В момент времени $t_i^- + \delta_i^-(X(\gamma(t_i^-))) = \widetilde{t}_i^-$ происходит отключение подсистемы S_i от S, которая прекращает функционировать на промежутке времени $[t_i^-, \widetilde{t}_i^-]$, где $\delta_i^-(X(\gamma(t_i^-)))$ — заданная постоянная, $\delta_i^-(X(\gamma(t_i^-))) \geqslant 0$. Введем переходное отображение φ_i^-, действующее следующим образом:

$$\varphi_i^-\colon\ (X(\gamma(t_i^-)), y(t_i^-), t_i^-) \to (\widetilde{X}^-(\gamma(\widetilde{t}_i^-)), \widetilde{y}^-(\widetilde{t}_i^-), \widetilde{t}_i^-),$$

где $\Psi_i(\widetilde{y}^-, \widetilde{X}^-(\gamma(\widetilde{t}_i^-))) < 0$, т.е. разрывное отображение φ_i^- переводит вектор $(X(\gamma(t_i^-)), y(t_i^-), t_i^-)$ в вектор $(\widetilde{X}^-(\gamma(\widetilde{t}_i^-)), \widetilde{y}^-(\widetilde{t}_i^-), \widetilde{t}_i^-)$. Время $\delta_i^-(X(\gamma(t_i^-)))$ расходуется на процесс отключения S_i. В течение этого времени система S «простаивает», т.е. уравнения (3), (5) не действуют. Таким образом, после отключения S_i система S начинает функционировать только в момент времени $\widetilde{t}_i^-$ из начального состояния $(\widetilde{X}^-(\gamma(\widetilde{t}_i^-)), \widetilde{y}^-)$.

Непрерывное отключение. В момент времени t_i^- прекращает функционировать на промежутке времени $[t_i^-, \widetilde{t}_i^-]$ система (3), а система (5) функционирует. Введем непрерывный переходный оператор $\widetilde{\varphi}_i^-$, действующий следующим образом: $\widetilde{\varphi}_i^-\colon X(\gamma(t_i^-)) \to \widetilde{X}^-$, где $\widetilde{X}^-$ — заданная непрерывная функция, $\widetilde{X}^-\colon [t_i^-, t_i^- + \delta_i^-(X(\gamma(t_i^-)))] \to \mathbf{R}^{N(t)}$, $\delta_i^-(X(\gamma(t_i^-)))$ — величина временного промежутка отключения подсистемы S_i, $\delta_i^-(X(\gamma(t_i^-))) \geqslant 0$, $\widetilde{X}^-(\gamma(t_i^-)) = X(\gamma(t_i^-))$. На промежутке $[t_i^-, \widetilde{t}_i^-]$ система (3) не действует, а динамика переменной $y(t)$, будем полагать, задается системой (5), в правые части которой вместо $X(\gamma(t))$ подставлена функция $\widetilde{X}^-(t)$:

$$\dot{y} = g_{\gamma(t)}(\widetilde{X}^-(\gamma(t))).$$

Далее, если $\Psi_i(y(\widetilde{t}_i^-), \widetilde{X}^-(\gamma(\widetilde{t}_i^-))) < 0$, то в момент времени $t = \widetilde{t}_i^-$ происходит отключение подсистемы S_i, и динамика S задается уравнениями (3), (5) с начальными данными $\widetilde{X}^-(\gamma(t_i^-)) = X(\gamma(t_i^-)), y(\widetilde{t}_i^-)$. Если $\Psi_i(y(\widetilde{t}_i^-), \widetilde{X}^-(\gamma(\widetilde{t}_i^-))) > 0$, то отключения S_i не происходит. Можно, как и при подключении, сказать, что в этом случае произошла «ложная тревога».

Пусть $\Psi_i(y(\widetilde{t}_i^-), \widetilde{X}^-(\gamma(\widetilde{t}_i^-))) = 0$. Если при этом $\Psi_i(y(t), \widetilde{X}^-(\gamma(t))) < 0$ при $t \in [\widetilde{t}_i^- - \delta, \widetilde{t}_i^-)$, где δ — достаточно малая положительная постоянная, то при $\Psi_i(y(\widetilde{t}_i^-), \widetilde{X}^-(\gamma(\widetilde{t}_i^-))) = 0$ (т.е. фазовая траектория при $t = \widetilde{t}_i^-$ касается поверхности $\Psi_i(y, X(\gamma)) = 0$) происходит отключение подсистемы S_i, а при $\Psi_i(y(t), \widetilde{X}^-(\gamma(t))) > 0$ система S_i не отключается. Если $\Psi_i(y(t), \widetilde{X}^-(\gamma(t))) > 0$ при $t \in [\widetilde{t}_i^- - \delta, \widetilde{t}_i^-)$, то при $\Psi_i(y(t), \widetilde{X}^-(\gamma(t))) < 0$ происходит отключение S_i, а при $\Psi_i(y(t), \widetilde{X}^-(\gamma(t))) = 0$ подсистема S_i не отключается.

З а м е ч а н и е. Если фазовая траектория системы (3), (5) в момент времени $\widetilde{t}$ попадает сразу на две или более поверхностей $\Psi_i(y, X(\gamma)) = 0$, $i = i_1, \ldots, i_k$, то начинаются процессы подключения или отключения одновременно нескольких подсистем по указанной выше схеме.

3. Внешняя структурная траектория

Предложенная модель системы с переменной размерностью и структурой позволяет естественным образом ввести понятие *структурной траектории.*

Пусть I^n — n-мерный единичный куб, $I^n \in \mathbf{R}^n$, т.е.

$$I^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n)^T\colon\ x_i \in [0,1],\ i = i_1, \ldots, i_n\},$$

Тогда вершины куба I^n — это точки $y^{(j)} = (y_1^j, \ldots, y_n^j)^T$, где $y_i^j \in \{0,1\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, 2^n$. Пусть $\widehat{I}^n$ — множество всех вершин куба I^n, $\widehat{I}^n = \{y^{(j)},\ j = 1, 2, \ldots, 2^n\}$. Построенная модель индуцирует отображение F вершин n-мерного куба I^n на себя, $F\colon \widehat{I}^n \to \widehat{I}^n$. Действительно, вектор внешней структуры γ, компоненты которого равны 0 или 1, можно интерпретировать как вершину куба I^n. При изменении времени t изменяется внешняя структура $\gamma(t)$, что приводит к отображению F.

Уточним сказанное. Пусть в начальный момент времени $t = t_0$ система S имеет размерность $N(t_0) = \gamma^T(t_0)\,\nu$ (см. (4)), а ее динамика задается уравнениями (3), (5). При этом имеем вектор начальной внешней структуры $\gamma_0 = \gamma(t_0)$. Пусть $X(\gamma_0) = X(\gamma(t_0))$, $y_0 = y(t_0)$. Тогда получаем, что поведение вектора $\gamma(t)$ зависит от начальных данных $X(\gamma_0), y_0$.

О п р е д е л е н и е. Вектор-функцию $\gamma(t, t_0, X(\gamma_0), y_0)$ будем называть ***внешней структурной траекторией***. При этом $\gamma(t_0, t_0, X(\gamma_0), y_0) = \gamma_0$.

Таким образом, компоненты вектор-функции $\gamma(t, t_0, X(\gamma_0), y_0)$ принимают значения, равные 0 или 1, т.е. можно считать, что множество значений этой функции — это множество вершин $\widehat{I}^n$ единичного куба I^n.

Таким образом, получаем однопараметрическое семейство отображений (операторов) $F(t, X(\gamma), y)\colon\ \widehat{I}^n \to \widehat{I}^n$, действующих следующим образом:

$$F(0, X(\gamma), y) = \gamma, \quad F(t_1 + t_2, X(\gamma), y) = F(t_1, F(t_2, X(\gamma), y)).$$

По сути, $F(t, X(\gamma), y) = \gamma(t, t, X(\gamma), y)$. Оператор F для каждой начальной точки $z(\gamma) = (X(\gamma), y) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^n$ порождает последовательность вида $\{\gamma^{(i_k)}(z(\gamma)), \tau_k(z(\gamma))\}$, $k = 1, 2, \ldots$, где $\gamma^{(i_k)}(z(\gamma)) \in \widehat{I}^n, \tau_k(z(\gamma))$ — промежутки времени, на которых значение $\gamma(t)$, соответствующее вершине $\gamma^{(i_k)}(z(\gamma))$, постоянно.

Переходные области. Пусть Ω_{ij} — область фазового пространства системы S, т. е. системы (4), (5) при условии, что вектор структуры γ совпадает с вершиной $\gamma^{(i)}$ куба $\widehat{I}^n$, такая, что если начальная точка $z(\gamma_0) = (X(\gamma_0), y_0)$ фазовой траектории системы (4), (5) при некотором $t = t_0$ принадлежит Ω_{ij}, то найдется момент времени $t = t_{ij} > t_0$, при котором $\gamma(t_{ij}, t_0, X(\gamma_0), y_0) = \gamma^{(j)}$ и при этом $\gamma(t, t_0, X(\gamma_0), y_0) = \gamma^{(i)}$, если $t \in [t_0, t_{ij})$.

Будем говорить, что в момент t времени система S находится в состоянии $\gamma^{(i)}$, если $\gamma(t) = \gamma^{(i)}$. При этом пишем, что $S = S(\gamma^{(i)})$. Упорядочим состояния $\gamma^{(i)}$. Пусть в некоторый момент времени t_i система имеет состояние $\gamma^{(i)}$, а в момент времени t_j — состояние $\gamma^{(j)}$. При этом $t_i > t_j$.

Определение. Будем говорить, что состояние $\gamma^{(j)}$ следует за состоянием $\gamma^{(i)}$, или $\gamma^{(i)}$ предшествует $\gamma^{(j)}$, и обозначать это так: $\gamma^{(i)} \lhd \gamma^{(j)}$, если найдется такой момент времени $t_{ij} \in (t_i, t_j)$, что при $t \in [t_i, t_{ij})$ система находится в состоянии $\gamma^{(i)}$, а при $t \in (t_{ij}, t_j]$ — в состоянии $\gamma^{(j)}$.

Таким образом, если и только если начальная точка траектории принадлежит области Ω_{ij}, то за состоянием $\gamma^{(i)}$ следует состояние $\gamma^{(j)}$. Будем при этом также говорить, что система за один шаг переходит из состояния $\gamma^{(i)}$ в состояние $\gamma^{(j)}$.

Система S порождает последовательности состояний $\{y^{(i_k)}\}$, $k = 1, 2, \ldots$, где $\gamma^{(i_k)} \lhd \gamma^{(i_{k+1})}$, которые последовательно проходит внешняя структурная траектория $\gamma(t, t_0, X(\gamma_0), y_0)$. Тем самым появляется возможность ввести понятия устойчивости и грубости структур, что важно для практического применения метода динамической декомпозиции.

4. Модель процесса биоочистки

Применим разработанный выше подход к проблеме моделирования процесса биологической очистки сточных вод с учетом изменения состава биомассы. Пусть система очистки состоит из аэротенка, отстойника и звена рециркуляции. Полагаем, что i-й вид микроорганизмов окисляет i-й компонент загрязнителя. Будем считать, что с уменьшением номера i субстрат становится более трудноокисляемым. При этом скорость очистки описывается функцией Моно. В качестве базовой используется модель [11]–13], задающая динамику подсистемы S_i

$$\dot{x}_i = ua_{1i} + \frac{\mu_i s_i x_i}{k_i + s_i} - (b+u)x_i, \quad \dot{s}_i = ba_{2i} - \frac{\mu_i s_i x_i}{Y_i(k_i + s_i)} - (b+u)s_i, \quad (6)$$

где s_i — концентрация i-го вида субстрата загрязнителя; x_i — концентрация i-го вида микроорганизмов; Y_i — коэффициент утилизации i-го вида субстрата-загрязнителя в биомассу микроорганизмов; k_i — константа полунасыщения; b, a_{2i} — скорость и концентрация, соответственно, i-го вида субстрата на входе; u, a_{1i} — скорость и концентрация, соответственно, i-го вида микроорганизмов в возвратном потоке; μ_i — максимальная удельная скорость роста микроорганизмов i-го вида.

Управление процессом биоочистки осуществляется за счет изменения скорости u рециркулирующего потока. Пусть $u_i > 0$ — постоянные, удовлетворяющие условию $u_i < u_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Будем считать, что для закрепления микроорганизмов i-го вида в аэротенке требуется, чтобы скорость рециркулирующего потока удовлетворяла неравенству $u \leqslant u_i$. Это значит, что с увеличением номера i уменьшается необходимость в присутствии медленно растущих микроорганизмов в аэротенке, что вызывается уменьшением количества трудноусвояемых видов субстрата. Иначе говоря, чем меньше i, тем труднее окисляется соединение вида i, что приводит к необходимости уменьшить скорость рециркуляции, т.е. увеличить время пребывания биомассы в аэротенке для увеличения в ней доли медленнорастущих видов микроорганизмов, окисляющих трудноусвояемые соединения. Таким образом, для того чтобы в системе присутствовали виды $i_1, \ldots, i_k$ микроорганизмов, достаточно подчинить u условию $u_{i^*-1} < u < u_{i^*}$, где $i^* = \min\{i_1, \ldots, i_k\}$. При этом в аэротенке не будут присутствовать виды микроорганизмов с номерами, меньшими i^*, что позволит, помимо увеличения скорости процесса биоочистки, сделать этот процесс более экономным.

Таким образом, в соответствии с развитым общим подходом, процесс биоочистки S — сложная система, в состав которой могут входить подсистемы S_i, динамика которых задается уравнениями (6). Далее, для организации изменения состава системы S вводим функции $y_i(t)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\dot{y}_i = s_i - \overline{s}_i, \quad \text{если} \quad S_i \subset S, \quad \dot{y}_i = a_{2i} - \overline{a}_{2i}, \quad \text{если} \quad S_i \not\subset S,$$

где $\overline{s}_i, \overline{a}_i$ — заданные положительные постоянные. Переменная $y_i(t)$ задает уровень накопления субстрата вида i в аэротенке. Изменение структуры системы S происходит следующим образом. Пусть $\overline{y}_i$ — заданные постоянные.

Увеличение размерности S. Пусть $u_{i^*-1} < u < u_{i^*}$. Тогда в состав S входят подсистемы с номерами, не меньшими i^*: $S_{i^*}, S_{i^*+1}, \ldots, S_n$. Это значит, что $y_i < \overline{y}_i$ при $i = 1, 2, \ldots, i^* - 1$. Если в некоторый момент времени $y_l(t^*) = \overline{y}_l$ для некоторого $l \in \{1, \ldots, i^* - 1\}$, то в этот момент времени u принимает значение в промежутке (u_{l-1}, u_l), и к системе S

подключаются подсистемы $S_l, S_{l+1}, \ldots, S_{i^*-1}$, для чего используется одна из описанных выше процедур подключения.

Уменьшение размерности S. Пусть $u_{i^*-1} < u < u_{i^*}$. Если в некоторый момент времени $y_{i^*}(\bar{t}) = \bar{y}_{t^*}$, то в этот момент времени u принимает значение в промежутке (u_{i^*}, u_{i^*+1}), и от системы S отключается подсистема S_{i^*}, для чего используется одна из описанных выше процедур отключения.

5. Стабилизация

Пусть $u_{j-1} < u < u_j$. Это означает, что $S = \{S_j, \ldots, S_n\}$. Рассмотрим задачу стабилизации некоторого требуемого состояния M системы S. Введем следующие понятия, имея в виду рассмотреть более общую задачу стабилизации.

Определение [14]. Совокупность векторов $a_1, \ldots, a_m$, $a_i \in \mathbf{R}^n$, образует положительный базис пространства $\mathbf{R}^n$, если любой вектор $b \in \mathbf{R}^n$ можно представить в виде линейной комбинации векторов $a_1, \ldots, a_m$ с неотрицательными коэффициентами.

Определение. Точка M называется *T-стабилизируемой*, если для любого $T > 0$ существует такая ее окрестность $V_\varepsilon(M) = \{x \colon \| x - M \| < \varepsilon\}$ и допустимое управление, что все траектории системы (1), выходящие из $S_\varepsilon(M)$, за время, меньшее, чем T, попадут в любую сколь угодно малую окрестность точки M и в дальнейшем останутся в ней.

Пусть S задается системой уравнений $\dot{x} = f(x, u)$, где $x \in \mathbf{R}^N$, $u \in \mathbf{R}^r$. Допустимым будем считать кусочно постоянное управление $u = u(x)$, $u \in U = \{u^{(1)}, \ldots, u^{(N+1)}\}$, $u^{(l)}$ — заданные постоянные векторы, $l = 1, 2, \ldots, N+1$.

Теорема. *Пусть векторы $f(M, u^{(1)}), \ldots, f(M, u^{(N+1)})$ образуют положительный базис в $\mathbf{R}^{N+1}$. Тогда точка M является T-стабилизируемой посредством допустимого управления.*

Доказательство теоремы сводится к построению алгоритма стабилизации. Суть его состоит в построении последовательностей вложенных цилиндров с диаметрами, монотонно убывающими к нулю. Точка M принадлежит основаниям этих цилиндров. При этом допустимое управление обеспечивает вхождение траектории, начинающейся в некоторой окрестности точки M, за время, меньшее заранее заданного, в любой сколь угодно малый цилиндр, тем самым решая задачу T-стабилизации точки M.

Предположим, что параметры, входящие в правые части (6), постоянны. Тогда предлагаемый способ стабилизации позволяет при выполнении соответствующих условий стабилизировать за любое заранее заданное время требуемое состояние системы биоочистки. Преимущество этого метода состоит в возможности регулировать время стабилизации.

При этом можно обеспечить нахождение траектории в некоторой окрестности состояния M, не требуя ее неограниченного приближения к нему. Это особенно важно в случае изменения входных параметров a_{2i} и b.

6. Заключение

Предложенный подход к моделированию сложных систем с перемeнной структурой и размерностью используется в задаче управления процессом биологической очистки сточных вод. При этом данный метод позволяет рассмотреть двухуровневую задачу стабилизации. На верхнем уровне стабилизируется структура системы, а на нижнем — некоторая область фазовых состояний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Henze M., Grady C. P. L. Jr., Gujer W., Marais G. v. R., Matsuo T.* A general model for single-sludge activated sludge wastewater treatment systems. — Water Res., 1987, v. 21, p. 505–515.
2. *Tacacs I., Patry G. G., Nolasco D.* A dynamic model of the clarification-thickening process. — Water Res., 1991, v. 25, p. 1263–1271.
3. *Steffens M. A., Lant P. A., Newell R. B.* A systematic approach for reducing biological wastewater treatment models. — Water Res., 1997, v. 31, p. 590–606.
4. *Dupont R., Sinkjaer O.* Optimization of wastewater treatment plants by means of computer models. — Water Sci. Technology, 1994, v. 30, p. 181–190.
5. *Вавилин В. А.* Время оборота биомассы и деструкция органического вещества в системах биологической очистки. М.: Наука, 1986, 144 с.
6. *Вавилин В. А.* Нелинейные модели биологической очистки и процессов самоочищения в реках. М.: Наука, 1983, 185 с.
7. *Кириллов А. Н.* Динамическое моделирование и стабилизация процесса биологической очистки сточных вод. — Целлюлоза. Бумага. Картон, 2008, № 5, с. 66.
8. *Кириллов А. Н.* Некоторые методы кусочно-постоянной стабилизации нелинейных динамических систем. — В сб.: Материалы 5-й научно-технической конференции «Мехатроника, автоматизация, управление». СПб.: 2008, с. 70–71.
9. *Кириллов А. Н.* Управление многостадийными технологическими процессами. — Вестник Санкт-Петербургского ун-та. Сер. 10: Прикл. матем., информатика, процессы управл., 2006, в. 4, с. 127–131.
10. *Аким Э. Л., Смирнов А. М., Смирнов М. Н.* Современная концепция водопользования на предприятиях ЦБП. — Целлюлоза. Бумага. Картон, 2006, № 6, с. 66–74.
11. *Brune D.* Optimal control of the complete-mix activated sludge process. — Environm. Technology Lett., 1985, v. 6, p. 467–476.
12. *Фурсова П. В., Левич А. П.* Дифференциальные уравнения в моделировании сообществ микроорганизмов. — Успехи соврем. биол., 2006, № 2, с. 149–179.
13. *Кириллов А. Н.* Задачи стабилизации экологических систем. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 1994, т. 1, в. 6, с. 883–892.
14. *Петров Н. Н.* Локальная управляемость автономных систем. — Дифф. уравнения, 1968, в. 7, с. 1218–1232.

Поступила в редакцию
13.X.2009