

ISSN 2074-0530

# ИЗВЕСТИЯ

## МГТУ «МАМИ»

**2**<sup>(20)</sup>  
**2014**  
**т. 4**

---

**НАУЧНЫЙ РЕЦЕНЗИРУЕМЫЙ ЖУРНАЛ**



---

**Серия «Естественные науки»**



УНИВЕРСИТЕТ МАШИНОСТРОЕНИЯ

## О влиянии формы тензора градиента в геометрически нелинейной эндохронной теории ползучести

д.ф.-м.н. проф. Кадашевич Ю.И., д.ф.-м.н. доц. Помыткин С.П.  
Санкт-Петербургский государственный технологический университет растительных  
полимеров

8(812) 7868660, math.spbgturp@yandex.ru

*Аннотация.* Рассматривается тензорно-параметрический вариант эндохронной теории неупругости для больших деформаций и поворотов, учитывающий временные эффекты. Изучается влияние параметра, входящего в градиент деформации, и параметра упрочнения на форму и величину кривых «деформация ползучести~время». Приведены соответствующие примеры.

*Ключевые слова:* эндохронная теория, большие деформации, определяющие соотношения, ползучесть, градиент деформации.

В работе [1] были сформулированы принципы построения геометрически нелинейной теории пластичности эндохронного типа и предложены определяющие соотношения неупругости, учитывающие большие деформации. Впоследствии эта теория была обобщена с целью учета временных процессов, протекающих в неупругих материалах [2]. В работе [3] с использованием определяющих соотношений геометрически нелинейной эндохронной теории были представлены результаты решения некоторых задач ползучести. В предлагаемой вниманию читателя статье исследуется влияние формы градиента деформаций на зависимости деформаций ползучести от времени.

Рассматривается один из тензорно-параметрических вариантов эндохронной теории неупругости для больших деформаций и поворотов, учитывающих временные эффекты [2]. В безындексной форме записи определяющие соотношения имеют вид [3]:

$$\frac{\alpha \tau}{2G} \overset{\circ}{\sigma} + \frac{\sigma}{2G} |\dot{r}| = \tau \dot{r} + \frac{r}{g + \alpha} |\dot{r}|, \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{K}, \quad (1)$$

$$\tau = \tau(|r|, |\dot{r}|), \quad g = g(|r|, |\dot{r}|), \quad G = G(|r|, |\dot{r}|), \quad (2)$$

$$r = \varepsilon - (1 - \alpha) \frac{\sigma}{2G}, \quad \dot{r} = \dot{\varepsilon} - (1 - \alpha) \frac{\dot{\sigma}}{2G}, \quad (3)$$

$$\dot{r} = D - (1 - \alpha) \frac{\dot{\sigma}}{2G}, \quad \dot{\varepsilon} = D, \quad \Omega = \dot{R} R^T, \quad (4)$$

$$\overset{\circ}{\sigma} = \dot{\sigma} + \sigma \Omega - \Omega \sigma, \quad \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon} + \varepsilon \Omega - \Omega \varepsilon, \quad (5)$$

$$|\dot{r}| = \sqrt{\frac{dr}{dt} : \frac{dr}{dt}}, \quad |r| = \int dr. \quad (6)$$

Здесь  $\varepsilon$  и  $\varepsilon_0$  – девиатор и шаровая часть тензора деформаций,  $\sigma$  и  $\sigma_0$  – девиатор и шаровая составляющая тензора напряжений,  $r$  – девиатор параметрического тензора,  $\tau$  – аналог деформационных предела текучести,  $g$  – аналог коэффициента упрочнения (разупрочнения),  $\alpha$  – параметр эндохронности ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ),  $G$  – модуль сдвига,  $K$  – модуль объёмного сжатия, верхний индекс  $T$  – знак транспонирования,  $t$  – время. Кроме того,  $\Omega$  – тензор спина,  $R$  – ортогональный тензор поворота,

$$R = F U^{-1}, \quad L = \dot{F} F^{-1}, \quad D = (L + L^T)/2, \quad (7)$$

$F$  – тензор градиента деформаций,  $U$  – правый тензор удлинения в полярном разложении тензора градиента  $F = RU$ ,  $L$  – скорость градиента деформаций,  $D$  – тензор скоро-

стей деформаций.

Частный вариант теории (1) – (7) для девиаторов при  $\alpha = 1$  и  $2G = 1$  имеет вид:

$$\tau \dot{\sigma} + \sigma |\dot{\varepsilon}| = \tau \dot{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{g+1} |\dot{\varepsilon}|, \quad \dot{\varepsilon} = D, \quad (8)$$

$$\tau = \tau(|r|, |\dot{r}|), \quad g = g(|r|, |\dot{r}|), \quad (9)$$

Для исследования выбирается градиент деформации в форме:

$$F = \begin{pmatrix} k_{11} & m \cdot k_{12} & 0 \\ k_{12} & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

У такого типа градиента деформации ортогональный тензор поворота  $R$  и тензор спина  $\Omega$  имеют следующую структуру:

$$R = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Omega = \dot{\beta} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{k_{12}(m-1)}{k_{11} + k_{22}}. \quad (11)$$

В работе [3] авторы данной публикации анализировали вариант эндохронной теории ползучести для больших деформаций и поворотов с градиентом деформации типа (10) при  $m = 0$ .

Полагаем далее, что тензор скоростей деформации  $D$ , девиаторы тензоров деформации  $\varepsilon$  и напряжений  $\sigma$  имеют вид:

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Используя (7), компоненты тензора скоростей деформации  $D$  можно связать с компонентами тензора градиента деформации  $F$  следующими дифференциальными уравнениями:

$$\dot{k}_{11} k_{22} - m k_{12} \dot{k}_{12} = \Delta \cdot D_{11}, \quad \dot{k}_{22} k_{11} - m k_{12} \dot{k}_{12} = \Delta \cdot D_{22}, \quad (13a)$$

$$\dot{k}_{12} (k_{22} + m k_{11}) - k_{12} (\dot{k}_{22} + m \dot{k}_{11}) = 2 \cdot \Delta \cdot D_{12}, \quad (13b)$$

$$\dot{k}_{33} = k_{33} D_{33}, \quad \Delta = k_{11} k_{22} - m k_{12}^2, \quad (13b)$$

Подставляя (11) в выражения для объективных производных (5), используя затем соотношения (1), (2), (4) и вводя обозначения  $k = 1/(g+1)$  и  $n = |\dot{\varepsilon}|/\tau$ , получим замкнутую систему дифференциальных определяющих соотношений:

$$\dot{\sigma}_{11} - 2\dot{\varphi}\sigma_{12} + n\sigma_{11} = D_{11} + k n \varepsilon_{11}, \quad \dot{\varepsilon}_{11} - 2\dot{\varphi}\varepsilon_{12} = D_{11}, \quad (14)$$

$$\sigma_{22} + 2\dot{\varphi}\sigma_{12} + n\sigma_{22} = D_{22} + k n \varepsilon_{22}, \quad \dot{\varepsilon}_{22} + 2\dot{\varphi}\varepsilon_{12} = D_{22}, \quad (15)$$

$$\dot{\sigma}_{33} + n\sigma_{33} = D_{33} + k n \varepsilon_{33}, \quad \dot{\varepsilon}_{33} = D_{33}, \quad (16)$$

$$\dot{\sigma}_{12} + \dot{\varphi}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) + n\sigma_{12} = D_{12} + k n \varepsilon_{12}, \quad \dot{\varepsilon}_{12} + 2\dot{\varphi}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) = D_{12}, \quad (17)$$

$$\dot{k}_{11} k_{22} - m k_{12} \dot{k}_{12} = \Delta \cdot D_{11}, \quad \dot{k}_{22} k_{11} - m k_{12} \dot{k}_{12} = \Delta \cdot D_{22}, \quad (18)$$

$$\dot{k}_{33} = k_{33} \cdot D_{33}, \quad \dot{k}_{12} (k_{22} + m k_{11}) - k_{12} (\dot{k}_{22} + m \dot{k}_{11}) = 2 \cdot \Delta \cdot D_{12}, \quad (19)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_{12}(m-1)}{k_{11} + k_{22}}, \quad \Delta = k_{11} k_{22} - m k_{12}^2, \quad |\dot{\varepsilon}| = \sqrt{\dot{\varepsilon}_{11}^2 + \dot{\varepsilon}_{22}^2 + \dot{\varepsilon}_{33}^2 + 2\dot{\varepsilon}_{12}^2}. \quad (20)$$

Исследование влияния параметра  $m$  на протекание деформаций во времени в процессе ползучести материала начинается с «быстрого» активного монотонного нагружения жестким сдвигом, когда  $D_{11} = 0$ ,  $D_{22} = 0$ ,  $D_{33} = 0$ ,  $D_{12} \neq 0$ . Нагружение продолжается до некоторого



значения  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 < 2G\tau$ . После чего напряжения фиксируются, и наблюдается процесс ползучести. При вычислениях в соотношениях (14) – (20) было принято, что  $\tau = k_0 \cdot |\dot{\epsilon}|$  и  $k_0 = 1$ , то есть  $n = 1$ . Варьировался «аналог» коэффициента упрочнения (разупрочнения)  $k$  и параметр  $m$ , определяющий форму тензора градиента деформации  $F$ .

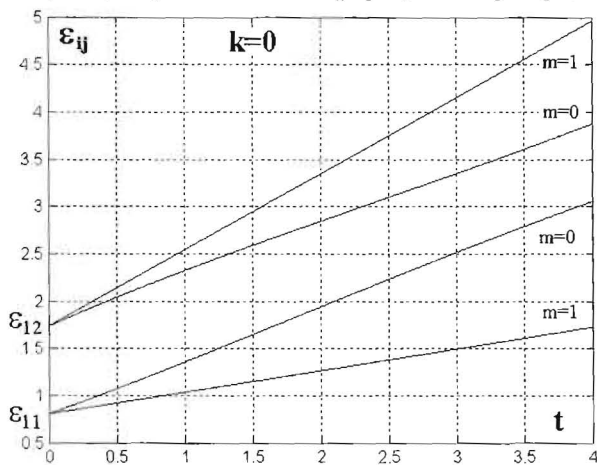


Рисунок 1. Осевая и сдвиговая деформации ползучести при  $k = 0$

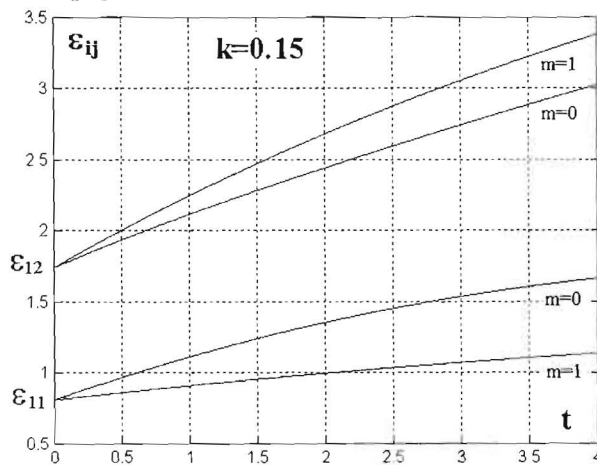


Рисунок 2. Зависимость деформаций  $\epsilon_{11}$  и  $\epsilon_{12}$  от времени при  $k = 0.15$

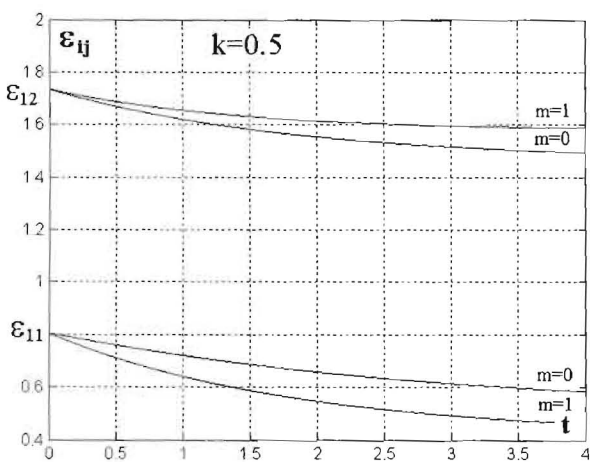


Рисунок 3. Изменение деформаций в процессе ползучести при  $k = 0.5$

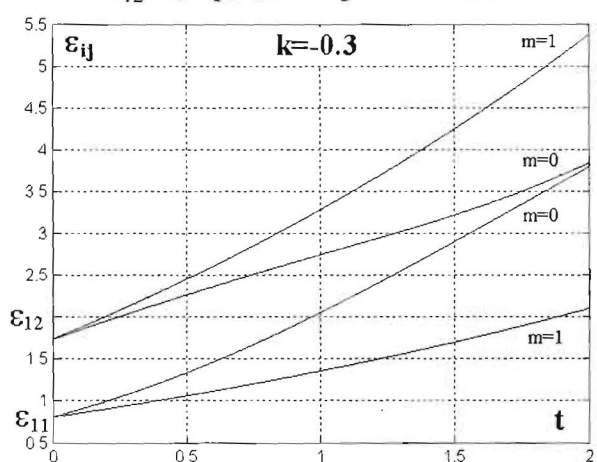


Рисунок 4. Накопление деформаций  $\epsilon_{11}$  и  $\epsilon_{12}$  во времени при  $k = -0.3$

Приведённые примеры демонстрируют чёткую зависимость результатов от формы градиента деформаций, а варьирование коэффициента  $k$  позволяет получать полный спектр форм кривых «деформация ползучести ~ время»: линейные (рисунок 1), возрастающие с разными выпуклостями (рисунок 2, рисунок 4) и убывающие (рисунок 3). Изучение влияния отрицательных и нецелых значений параметра  $m$  в планах дальнейших исследований.

#### Замечание

Обратим внимание на то, что значение  $m = -1$  – особый случай, когда знаменатель в двух уравнениях системы обращается в ноль. Для этого значения  $m$  система определяющих соотношений должна быть составлена отдельно.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 14-01-00202).

#### Литература

1. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Новый взгляд на построение эндохронной теории пла-

---

стичности при учете конечных деформаций // Научно-технические ведомости СПбГТУ. 2003. № 3. С. 96-103.

2. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Учет конечных деформаций в эндохронной теории вязкопластичности // Вестник гражданских инженеров. 2005. № 1. С. 28-32.
3. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Эндохронная теория ползучести, учитывающая конечные деформации // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия "Физико-математические науки". 2004. № 26. С. 83-85.