

ISSN 2074-0530

ИЗВЕСТИЯ МГТУ «МАМИ»

1⁽¹⁹⁾
2014
т. 4

НАУЧНЫЙ РЕЦЕНЗИРУЕМЫЙ ЖУРНАЛ



Серия «Естественные науки»



УНИВЕРСИТЕТ МАШИНОСТРОЕНИЯ

Эндохронная теория пластичности, учитывающая перекрестные связи, начальные микронапряжения и начальные микродеформации

д.ф.-м.н. проф. Кадашевич Ю.И., к.ф.-м.н. доц. Помыткин С.П., д.ф.-м.н. доц. Крыжевич С.Г.
 Санкт-Петербургский государственный технологический университет растительных полимеров, Санкт-Петербургский государственный университет
 8(812) 7868660, math.spbgturp@yandex.ru, 8(812) 4284211, kryzhevich@gmail.com

Аннотация. Предложен статистический вариант теории неупругости эндохронного типа, учитывающий начальные микронапряжения и начальные микродеформации, содержащиеся в материале. Сформулированы определяющие соотношения теории. На примерах одноэлементной и двухэлементной модели представлены расчёты одноосного нагружения гипотетического материала, демонстрирующие возможности подхода в предположении о равномерном распределении начальных микродеформаций. Подчёркивается, что в процессе нагружения структурные элементы модели могут генерировать деформации разных знаков, что расширяет границы применимости теории.

Ключевые слова: эндохронная теория неупругости, определяющие соотношения, статистический вариант, начальные микродеформации, микронапряжения.

В 1995 году в работе [1] была предложена двухповерхностная теория пластичности, учитывающая микронапряжения. В 2004 году в статье [2] была сделана попытка расширить возможности теории, представленной в [1], с использованием идей, высказанных в работах [3,4]. Фактически в [2] был предложен новый вариант эндохронной теории пластичности. В данном исследовании развивается и уточняется подход к построению определяющих соотношений теории пластичности, опубликованный в статье [2].

Предложения работы [2] имели следующий вид:

$$\varepsilon_{ij} + \beta \tau_k \frac{d\varepsilon_{ij}}{d\lambda_k} = \tau_k \frac{dy_{ij}^m}{d\lambda_k} + x_k, \quad (1)$$

$$x_k = C_{km} y_{ij}^m, \quad k, m = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = 2G \cdot (\varepsilon_{ij} - \alpha_m y_{ij}^m), \quad (3)$$

$$\alpha_m \geq 0, \quad \sum_m \alpha_m = 1, \quad d\lambda_k = \|dy_{ij}^k\| = \sqrt{dy_{ij}^k : dy_{ij}^k}. \quad (4)$$

Здесь ε_{ij} – девиатор тензора деформаций, σ_{ij} – девиатор тензора напряжений, y_{ij}^m – девиаторы тензоров неупругих деформаций, τ_k – аналоги деформационных пределов текучести, C_{km} – константы, имеющие смысл, аналогичный коэффициентам упрочнения (разупрочнения), β – параметр эндохронности ($0 \leq \beta \leq 1$), α_m – константы, имеющие смысл весовых коэффициентов. Выражение x_k в статье [2] названо средневзвешенным девиатором неупругих деформаций.

Частный вариант теории (1) – (4) при $k, m = 1, 2$ имеет вид:

$$\varepsilon_{ij} + \beta \tau_1 \frac{d\varepsilon_{ij}}{d\lambda_1} = \tau_1 \frac{dy_{ij}^1}{d\lambda_1} + C_{11} y_{ij}^1 + C_{12} y_{ij}^2, \quad (5)$$

$$\varepsilon_{ij} + \beta \tau_2 \frac{d\varepsilon_{ij}}{d\lambda_2} = \tau_2 \frac{dy_{ij}^2}{d\lambda_2} + C_{21} y_{ij}^1 + C_{22} y_{ij}^2, \quad (6)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2G} + \alpha_1 y_{ij}^1 + \alpha_2 y_{ij}^2, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1. \quad (7)$$

Отметим два недостатка соотношений (5) – (7):

- 1) в [2] рекомендовалось расчёты проводить лишь в случае $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,5$;
- 2) утверждалось, что G – реальный модуль сдвига, хотя в начальный момент нагружения модуль сдвига по соотношениям (5) – (7) зависит от значения параметра β .

Поэтому сейчас исходные соотношения теории (1) – (4) предлагается записать несколько в другом виде (β_k – параметры эндохронности).

$$\frac{1}{2G} \cdot \left(\sigma_{ij} + \beta_k \tau_k \frac{d\sigma_{ij}}{d\lambda_k} \right) = \tau_k \frac{dy_{ij}^m}{d\lambda_k} + x_k, \quad (8)$$

$$x_k = C_{km} y_{ij}^m, \quad k, m = 1, 2, \dots, N, \quad (9)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2G} + \alpha_m y_{ij}^m. \quad (10)$$

Для двухэлементной теории уравнения (8) – (10) выглядят следующим образом (здесь и далее в безиндексной форме записи):

$$\frac{1}{2G} \cdot \left(\sigma + \beta_1 \tau_1 \frac{d\sigma}{d\lambda_1} \right) = \tau_1 \frac{dy_1}{d\lambda_1} + C_{11} y_1 + C_{12} y_2, \quad (11)$$

$$\frac{1}{2G} \cdot \left(\sigma + \beta_2 \tau_2 \frac{d\sigma}{d\lambda_2} \right) = \tau_2 \frac{dy_2}{d\lambda_2} + C_{21} y_1 + C_{22} y_2, \quad (12)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{2G} + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2. \quad (13)$$

Примеры, приведенные в статье [2], продемонстрировали хорошее совпадение с опытными данными. Однако расчёты проводились лишь при малых значениях β , что ограничивает возможности теории. Отметим также, что в [2] автор отошёл от рекомендаций работы [3], в которой мера деформации вводилась по формуле (α – параметр эндохронности):

$$r = \varepsilon - (1 - \alpha) \frac{\sigma}{2G}. \quad (14)$$

Поэтому для двухэлементной модели (8) – (10) с учетом (14) получаем, что:

$$\frac{1}{2G_1} \cdot \left(\sigma + \beta_1 \tau_1 \frac{d\sigma}{|dr_1|} \right) = \tau_1 \frac{dr_1}{|dr_1|} + C_{11} r_1 + C_{12} r_2, \quad (15a)$$

$$\frac{1}{2G_2} \cdot \left(\sigma + \beta_2 \tau_2 \frac{d\sigma}{|dr_2|} \right) = \tau_2 \frac{dr_2}{|dr_2|} + C_{21} r_1 + C_{22} r_2, \quad (15b)$$

$$r_1 = \varepsilon_1 - (1 - \beta_1) \frac{\sigma}{2G_1}, \quad r_2 = \varepsilon_2 - (1 - \beta_2) \frac{\sigma}{2G_2}, \quad (16)$$

$$\langle \varepsilon \rangle = C_1 \varepsilon_1 + C_2 \varepsilon_2, \quad C_1 + C_2 = 1, \quad (17)$$

где константы C_1, C_2 – весовые коэффициенты, а символ $\langle \varepsilon \rangle$ обозначает среднее значение

деформации.

Рассмотрим соотношения (15) – (17) для одноосного нагружения в случае, когда $k = 1$, $\beta_1 = 1$ и $C_{11} = \frac{1}{g+1}$. Тогда $r_1 = \varepsilon$, $dr_1 = |d\varepsilon_i|$ и

$$\frac{1}{2G} \cdot \left(\sigma + \tau \frac{d\sigma}{|d\varepsilon_i|} \right) = \tau \frac{d\varepsilon}{|d\varepsilon_i|} + \frac{\varepsilon}{g+1}, \quad |d\varepsilon_i| = \sqrt{d\varepsilon_{ij} : d\varepsilon_{ij}}, \quad (18)$$

где: $|\varepsilon_i|$ – длина дуги траектории деформирования, g – аналог коэффициента упрочнения (разупрочнения) материала.

Предположим, что в теле имеются начальные микродеформации ε_0 , среднее значение которых равняется нулю. Предположим, что деформирование начинается в том случае, когда внешняя деформация ε превосходит значение ε_0 , тем самым локальная длина дуги λ определяется формулой $\lambda = \varepsilon - \varepsilon_0$, где ε и ε_0 одного знака. Но тогда локальные деформации ε_0 противоположного знака самостоятельно будут вызывать течение материала, при каждом $\varepsilon > 0$ для среднего значения напряжения получаем:

$$\langle \sigma \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(\varepsilon_0, \varepsilon) f(\varepsilon_0) d\varepsilon_0,$$

где: $f(\varepsilon_0)$ – плотность распределения случайной величины ε_0 , $\sigma(\varepsilon_0, \varepsilon)$ – локальный закон развития напряжений, а $\langle \cdot \rangle$ – знак среднего значения случайной величины.

Главной особенностью рассматриваемого подхода является то обстоятельство, что отрицательные начальные микродеформации ε_0 препятствуют развитию течения при растяжении, а положительные ε_0 способствуют развитию течения. Более того, еще в работе [5] было указано, что $|\varepsilon_0| < L$, где L – некоторая экспериментальная характеристика материала.

Отсюда можно сделать вывод, что течение материала начинается при условии $\varepsilon - \varepsilon_0^{(1)} \geq 0$ в первом случае (при растяжении), а во втором случае деформирования (сжатии) – при $\varepsilon + \varepsilon_0^{(2)} \geq 0$. Объединяя оба случая деформирования получаем:

$$\langle \sigma \rangle = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sigma(\varepsilon_0, \varepsilon) f(\varepsilon_0) d\varepsilon_0. \quad (19)$$

Второй особенностью подхода является то обстоятельство, что вне интервала $|\varepsilon_0| < L$ внешняя деформация ε не производит напряжение σ . Этот факт играет решающую роль при использовании формулы (19).

Согласно работе [5] закон распределения ε_0 близок к нормальному закону распределения, но для выяснения качественной картины явления примем равномерный закон распределения ε_0 , тогда при каждом $\varepsilon > 0$ среднее значение $\sigma(\varepsilon_0, \varepsilon)$ на продеформированной части будет иметь следующий вид:

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sigma(\varepsilon_0, \varepsilon) d\varepsilon_0, \quad (20a)$$

если $|\varepsilon| < L$. Если же $|\varepsilon| > L$, то:

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{2L} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sigma(\varepsilon_0, \varepsilon) d\varepsilon_0. \quad (20б)$$

Предположим, что в теле присутствуют начальные микродеформации ε_0 и начальные микронапряжения σ_0 , причем $\sigma_0 = q \cdot \varepsilon_0$, $q = const$. Тогда при прямом одноосном нагружении растяжением решение уравнения (18) имеет вид:

$$\sigma = n + p\varepsilon + \exp\left(\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{\tau}\right) \cdot (q\varepsilon_0 - n - p\varepsilon_0), \quad (21)$$

$$n = \frac{2G \tau g}{g+1}, \quad p = \frac{2G}{g+1}.$$

На рисунке 1 приведены типичные графики решения (21) для случая $2G=1$, $\tau=1$, $g=4$, $\varepsilon_0=1$, $\varepsilon \geq \varepsilon_0$, $q=1$ (кривая - а) и $q=0,2$ (кривая - б).

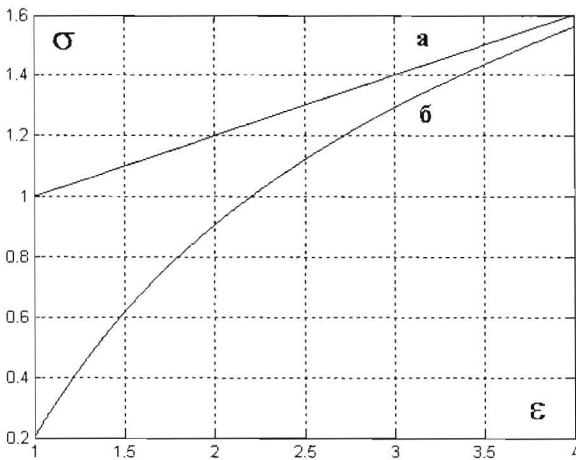


Рисунок 1. Локальные кривые деформирования при монотонном одноосном растяжении

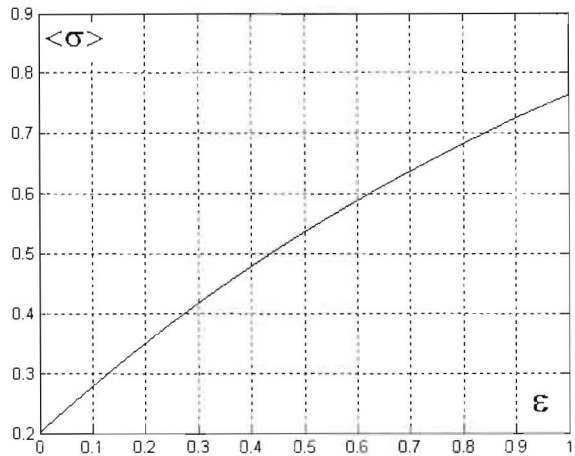


Рисунок 2. Осреднённый закон деформирования при прямом активном нагружении

Подчеркнем, что решение (21) определяет закон течения при неизменных значениях начальных микродеформаций ε_0 . Так как материал принимается первоначально изотропным, то среднее значение начальных микродеформаций и начальных микронапряжений в теле, должно равняться нулю $\langle \varepsilon \rangle = 0$, $\langle \sigma \rangle = 0$.

Используя локальный закон (21), равномерный закон распределения начальных микродеформаций ε_0 и (20), получим:

$$\langle \sigma \rangle_+ = \frac{1}{2\varepsilon} \cdot \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left[n + p\varepsilon + \exp\left(\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{\tau}\right) \cdot (q\varepsilon_0 - n - p\varepsilon_0) \right] \cdot d\varepsilon_0. \quad (22)$$

Для случая, когда $2G=1$, $\tau=1$, $g=4$, $q=1$ решение (22) имеет вид:

$$\langle \sigma \rangle = 1,2 + 0,2\varepsilon + 0,4 \cdot e^{-2\varepsilon} + \frac{0,8}{\varepsilon} \cdot (e^{-2\varepsilon} - 1),$$

а при любом q решение (22) принимает форму:

$$\langle \sigma \rangle = \frac{q}{2} + 0,7 + 0,2\varepsilon + \left(\frac{q}{2} - 0,1\right) \cdot e^{-2\varepsilon} + \frac{0,5k + 0,2}{\varepsilon} \cdot (e^{-2\varepsilon} - 1).$$

На рисунках 1 и 2 показан характер развития деформации при активном монотонном нагружении растяжением для локальных и осреднённых напряжений. Можно показать, что в

данном примере при любом значении q $\left. \frac{d \langle \sigma \rangle}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 1$.

Рассмотрим как изменится локальный закон развития напряжений, если растяжение сменяется сжатием и, наоборот, если сжатие сменится растяжением. Предположим, что закон изменения напряжения при одноосном активном (без разгрузки) растяжении с фиксированными значениями начальных микродеформаций, обозначаемых ε_0 , вытекающий из (21) при $g = \infty$, $2G = 1$, $\tau = 1$ и $q = 1$ имеет вид:

$$\sigma_+ = 1 + \exp(\varepsilon_0 - \varepsilon) \cdot (\varepsilon_0 - 1), \quad (23a)$$

а при простом сжатии:

$$\sigma_- = -1 + \exp(\varepsilon_0 + \varepsilon) \cdot (1 - \varepsilon_0). \quad (23b)$$

Предположим, что проведено нагружение растяжением. При значениях $\varepsilon = \varepsilon_*$ растяжение заканчивается. После этого проводится обратное сжатие. Предполагается, что справедлива формула типа (23б), но для «склейки» решений по напряжениям вместо множителя $(1 - \varepsilon_0)$ сейчас вводится неизвестный множитель C , то есть:

$$\sigma_- = -1 + C \cdot \exp(\varepsilon_0 + \varepsilon),$$

а C находится из условия $\sigma_+(\varepsilon_*) = \sigma_-(\varepsilon_*)$. Нетрудно проверить, что:

$$C = 2 \cdot \exp(\varepsilon_0 - \varepsilon_*) + (\varepsilon_0 - 1) \cdot \exp(2 \cdot (\varepsilon_0 - \varepsilon_*))$$

и тогда окончательная формула для σ_- после растяжения до ε_* запишется в виде:

$$\sigma_- = -1 + 2 \cdot \exp(\varepsilon - \varepsilon_*) + (\varepsilon_0 - 1) \cdot \exp(\varepsilon_0 + \varepsilon - 2\varepsilon_*). \quad (24)$$

При этом было учтено, что после изменения нагружения с растяжения на сжатие длина дуги равна $\lambda = 2\varepsilon_* - \varepsilon - \varepsilon_0$, а ε_* – деформация перед поворотом нагружения. Для вычисления среднего значения напряжения, осредняемого по ε_0 и равномерному закону распределения для ε_0 , при обратном сжатии воспользуемся соотношением типа (22). Тогда:

$$\langle \sigma \rangle_- = \frac{-1 + 2 \cdot \exp(\varepsilon - \varepsilon_*) \cdot \varepsilon_0 + (\varepsilon_0 - 2) \cdot \exp(\varepsilon_0 + \varepsilon - 2\varepsilon_*)}{2 \cdot |2\varepsilon_* - \varepsilon|} \Bigg|_{\varepsilon - 2\varepsilon_*}^{2\varepsilon_* - \varepsilon}. \quad (25)$$

Приведённое решение (25) справедливо при $0 \leq \varepsilon \leq 1$.

При $\varepsilon < 0$ исходным является решение задачи (18) при активном монотонном сжатии, полученному аналогично соотношению (21) и осреднённое по ε_0 :

$$\langle \sigma \rangle_- = -1,5 + \frac{e^{2\varepsilon} - 1}{\varepsilon} - 0,5 \cdot e^{2\varepsilon}. \quad (26)$$

Потребуем, чтобы при $\varepsilon = 0$ решение (25) и решение (26) совпадали, то есть:

$$\langle \sigma \rangle_- = -1,5 + C \cdot \left[\frac{e^{2\varepsilon} - 1}{\varepsilon} - 0,5 \cdot e^{2\varepsilon} \right]. \quad (27)$$

Если в конце предыдущего этапа (при $\varepsilon = 0$) $\sigma = \sigma_0$, то $C = 1 + 2/3 \cdot \sigma_0$.

На рисунке 3 приведено решение (15) – (17) по двухэлементной модели для простейшего случая одноосного монотонного растяжения, когда:

$$\frac{1}{2G_1} \cdot \left[\sigma + \frac{d\sigma}{d\lambda_1} \right] = \frac{d\varepsilon_1}{d\lambda_1}, \quad \varepsilon_1 \geq 0, \quad \sigma \geq 0, \quad (28a)$$

$$\frac{1}{2G_2} \cdot \left[\sigma + \frac{d\sigma}{d\lambda_2} \right] = \frac{d\varepsilon_2}{d\lambda_2}, \quad \varepsilon_2 \leq 0, \quad \sigma \geq 0. \quad (28b)$$

Здесь $\beta_1 = \beta_2 = 1$, $C_{11} = C_{12} = C_{21} = C_{22} = 0$, $\tau_1 = \tau_2 = 1$. Тогда $r_1 = \varepsilon_1$, $r_2 = \varepsilon_2$, $d\lambda_1 = d\varepsilon_1$, $d\lambda_2 = -d\varepsilon_2$, и следовательно:

$$\frac{1}{2G_1} \cdot \left[\sigma + \frac{d\sigma}{d\varepsilon_1} \right] = 1, \tag{29a}$$

$$\frac{1}{2G_2} \cdot \left[\sigma - \frac{d\sigma}{d\varepsilon_2} \right] = -1. \tag{29б}$$

Тогда решение системы (29) запишется следующим образом:

$$\varepsilon_1 = -\frac{1}{2G_1} \cdot \ln(1 - \sigma), \quad \varepsilon_2 = -\frac{1}{2G_2} \cdot \ln(1 + \sigma), \quad \langle \varepsilon \rangle = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) / 2.$$

В расчётах, представленных на рисунке 3, принято, что $2G_1 = 1.2$, а $2G_2 = 1$.

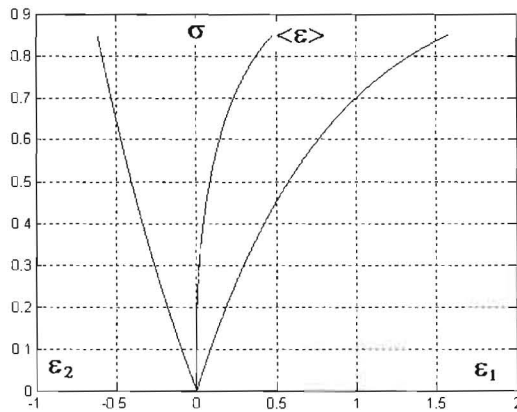


Рисунок 3. Поведение деформаций по уравнениям двухэлементной эндохронной теории при одноосном растяжении

Характерной особенностью решения системы (28) является то обстоятельство, что деформации ε_1 и ε_2 противоположного знака, что открывает новые возможности для эндохронной теории. (По теории работы [2] эти деформации одного знака).

Рассмотрим далее для уравнений теории (15) – (17) более общий пример одноосного монотонного растяжения, когда, в отличие от предыдущего, учитываются и начальные микродеформации ε_0 . Тогда определяющие соотношения будут иметь вид (28а) и (28б), а локальные законы деформирования принимаем, следуя (21), в форме:

$$\frac{\sigma}{2G_1} = 1 + (\varepsilon_0 - 1) \cdot \exp(\varepsilon_0 - \varepsilon), \tag{30a}$$

$$\frac{\sigma}{2G_2} = -1 + (\varepsilon_0 + 1) \cdot \exp(\varepsilon_0 - \varepsilon), \tag{30б}$$

при $g = \infty$, $\tau = 1$, $\sigma_0 = q \cdot \varepsilon_0$, $q = 1$.

Решение системы (30) в отсутствии упрочнения материала ($g = \infty$) можно получить в виде:

$$\frac{1}{2G_1} \langle \sigma \rangle = 1,5 + 0,5 \cdot \exp(-2\varepsilon_1) + (\exp(-2\varepsilon_1) - 1) / \varepsilon_1, \tag{31a}$$

$$\frac{1}{2G_2} \langle \sigma \rangle = 0,5 \cdot (\exp(-2\varepsilon_2) - 1), \tag{31б}$$

где: $\varepsilon_1 \geq 0, \varepsilon_2 \leq 0$.

На рисунке 4 приведены графики развития деформаций двух элементов модели в зависимости от среднего напряжения, вычисленные по (31) при $2G_1 = 1.2$ и $2G_2 = 1$.

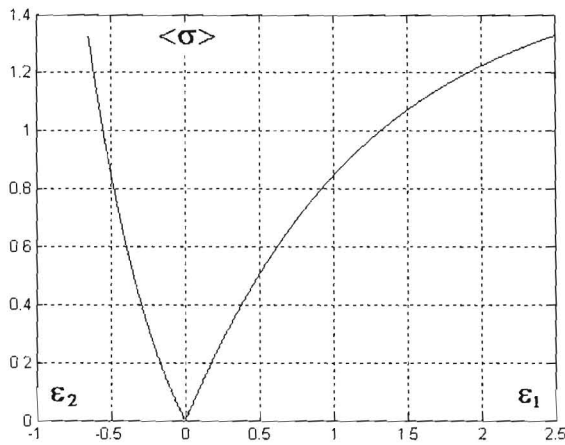


Рисунок 4. Влияние элементов эндохронной теории на кривую одноосного растяжения при отсутствии упрочнения материала

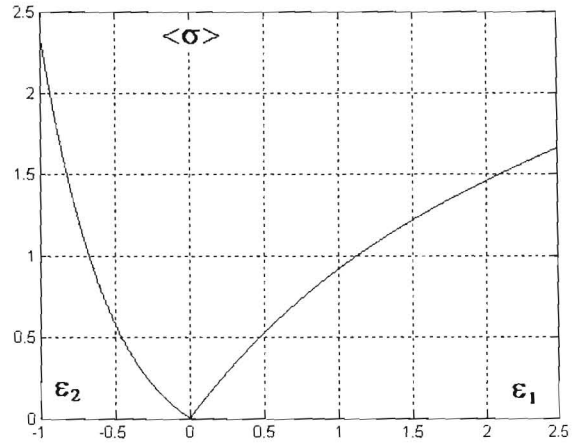


Рисунок 5. Влияние элементов эндохронной теории на кривую одноосного растяжения с учетом упрочнения материала

На рисунке 5 представлены результаты решения системы (28) для прямого активного нагружения растяжением с учетом и начальных микродеформаций и упрочнения материала (параметр $g = 4$). Локальные законы деформирования в этом случае выражаются следующим образом:

$$\frac{\sigma}{2G_1} = 0,2 \cdot \varepsilon + 0,8 \cdot [1 + (\varepsilon_0 - 1) \cdot \exp(\varepsilon_0 - \varepsilon)], \quad (32a)$$

$$\frac{\sigma}{2G_2} = 0,2 \cdot \varepsilon + 0,8 \cdot [-1 + (\varepsilon_0 + 1) \cdot \exp(\varepsilon_0 - \varepsilon)], \quad (32b)$$

а осреднённые для равномерно распределённых начальных микродеформаций – в виде:

$$\frac{\langle \sigma \rangle}{2G_1} = 0,2 \cdot \varepsilon_1 + 1,2 + 0,4 \cdot \exp(-2\varepsilon_1) + \frac{0,8}{\varepsilon_1} \cdot (\exp(-2\varepsilon_1) - 1), \quad (33a)$$

$$\frac{\langle \sigma \rangle}{2G_2} = 0,2 \cdot \varepsilon_2 + 0,4 \cdot (\exp(-2\varepsilon_2) - 1), \quad (33b)$$

где, по-прежнему, $\varepsilon_1 \geq 0, \varepsilon_2 \leq 0, 2G_1 = 1.2, 2G_2 = 1$.

Замечание

Обратим внимание на важную деталь, которая не была чётко выделена в [5]. Признавая возможность наличия в материале начальных микронеоднородностей, авторы [5] считали, что в упругой области связь между напряжениями и деформациями может быть произвольной, так как начальные микронеоднородности могут влиять на процесс деформирования лишь в пластической области. В эндохронной теории дело обстоит иначе. В эндохронном подходе отсутствует разделение деформаций на упругие и неупругие составляющие, поэтому связь между напряжениями и деформациями в исходном состоянии не может быть произвольной, она полностью определяется структурой соотношений теории. Более того, в начальный момент нагружения в изотропном материале средние значения деформаций и напряжений должны равняться нулю. С учётом этого и должны анализироваться соотношения (12) – (14).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 14-01-00202).

Литература

1. Кадашевич И.Ю., Мельников Б.Е. О возможности использования двухповерхностной теории пластичности при циклическом нагружении // Научно-технические проблемы прогнозирования надёжности и долговечности металлоконструкций и методы их решения: Труды I Международной конференции. Санкт-Петербург. 1995. С. 157-158.
2. Kadachevitch I. Modellierung der zyklischen verfestigung unter verwendung lines Mehrflächenmodells der plastizitat mit kinematischen bindungen ein schlieblich der parameterbestimmung (dissertation). Bericht. 1/2004. 112s.
3. Valanis K.C. Fundamental consequence of a new intrinsic time measure-plasticity as a limit of the endochronic theory // Archives of mechanics. 1980. Vol.32. P.171-191.
4. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. О взаимосвязи теории пластичности, учитывающей микронапряжения, с эндохронной теорией пластичности // Известия РАН. Механика твёрдого тела. 1997. № 4. С. 99-105.
5. Кадашевич Ю.И., Новожилов В.В. О влиянии начальных микронапряжений на макроскопическую деформацию поликристаллов // Прикладная математика и механика. 1968. т. 32. Вып. 5 С. 908-922.