03

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Методические указания по математике для студентов заочного факультета к контрольной работе N 5

Санкт-Петербург

2003

УДК 51(07.07)

Функции нескольких переменных. Частные производные: Методические указания по математике для студентов заочного факультета к контрольной работе N 5 / А.Н.Кириллов, С.П. Помыткин, Н.К. Брыксенкова, Б.Ф. Иванов, З.Л. Абжандадзе; СПбГТУРП. СПб.,2003. 15 с.

Методические указания содержат теоретический и практический материал по функциям нескольких переменных, частным производным, градиенту функции, полному дифференциалу и производной по направлению, а также решенные задачи.

Предназначаются для студентов заочного факультета всех специальностей в помощь при выполнении контрольной работы N 5.

Рецензент: кафедра прикладной математики СПбГТУРП
(зав.кафедрой – д.т.н., профессор О.К.Федоров)

Подготовлены и рекомендованы к печати кафедрой высшей математики Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров (протокол N 5 от 25.01.2002).

Утверждены к изданию методической комиссией ФПЭ Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров (протокол N 2 от 18.02.2002).

Корректор М.А.Полторак
Техн.редактор Л.Я.Титова

Подп. к печати 06.02.03. Формат 60 х 84/16. Бумага тип. N 3. Печать офсетная.
Объем 1,0 печ.л. 1,0 уч.-изд.л. Тираж 200 экз. Изд. N 11. Цена "С" 11. Заказ 229

Ризограф Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров, 198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4.

1 Основные понятия

Пусть точка M с координатами x, y принадлежит некоторому множе ству точек D в координатной плоскости OXY.

Определение. Переменная z называется функцией независимых пере менных x, y в множестве D, если каждой паре (x, y) их значений из D – по некоторому правилу или закону – ставится в соответствие одно определенное значение z. Множество D называется областью определе ния функции z. Функциональная зависимость z от (x, y) обозначается аналогично случаю функции одной переменной, т.е. в виде

$$z = f(x, y) \ . \qquad (1$$

Примеры.

1. Из закона Клапейрона-Менделеева для 1 моля идеального газа следует зависимость:

$$P = \frac{RT}{V} \ ,$$

где P, V, T, R – давление, объем, абсолютная температура и универсаль ная газовая постоянная, соответственно. Это равенство показывает что переменная P является функцией двух переменных V, T, т.е.

$$P = f(V, T) \ .$$

2. Из закона Ома для участка цепи следует, что

$$U = I \cdot R \ ,$$

где U, I, R – напряжение, сила тока и сопротивления на участке цепи соответственно, т.е.

$$U = f(I, R) \ .$$

3. Пусть x, y – стороны прямоугольника. Тогда его площадь S равна $S = x \cdot y$, т.е.

$$S = f(x, y) \ .$$

Во всех приведенных примерах областью определения соответствую щих функций является множество D, совпадающее с первой коорди натной четвертью, т.е. независимые переменные принимают неотрица тельные значения.

4. Рассмотрим функцию

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \ .$$

Найдем ее область определения D

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0 \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 \leq 1\ .$$

Таким образом, область определения – круг единичного радиуса с центром в начале системы координат (см. рис. 1).

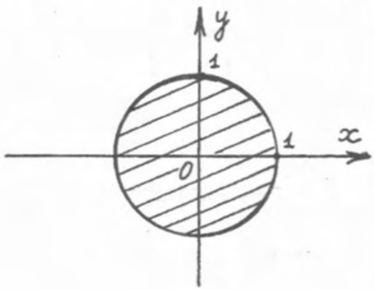

Рис. 1

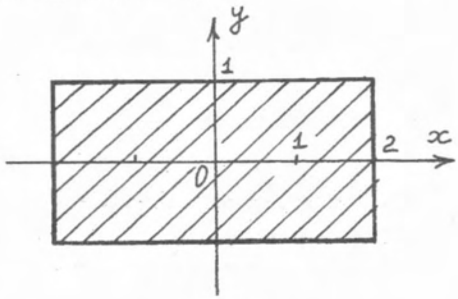

Рис. 2

5. Рассмотрим функцию

$$z = \arcsin\frac{x}{2} + \arcsin y\ .$$

Поскольку аргумент функции – арксинус – не может по абсолютной величине превосходить единицу, то область определения этой функции состоит из точек, для которых

$$\begin{cases} \dfrac{|x|}{2} & \leq\ 1 \\ |y| & \leq\ 1 \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} |x| & \leq\ 2 \\ |y| & \leq\ 1 \end{cases}\ .$$

Это есть прямоугольник в координатной плоскости OXY (см. рис.2).

6. Рассмотрим функцию

$$z = \frac{1}{x^2 - y^2}\ .$$

Область ее определения составляют все пары действительных чисел (x, y) за исключением тех, для которых $x^2 = y^2$, т.е. в области определения выполняется неравенство

$$x^2 - y^2 \neq 0 \quad \text{или} \quad (x - y)(x + y) \neq 0\ .$$

Отсюда получаем, что область определения данной функции – вся координатная плоскость OXY, кроме точек, лежащих на двух прямых $y = x, y = -x$ (см. рис.3).

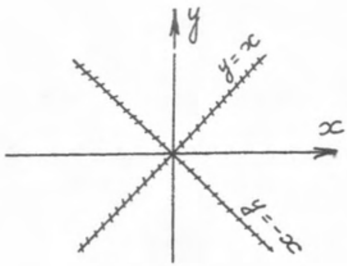

Рис. 3

Замечание. Аналогично (1) можно определить функции трех, четыре
и большего числа переменных, т.е

$$z = f(x, y, u), \quad z = f(x, y, u, v), \quad \ldots \quad z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ ,$$

но в данном пособии мы ограничимся случаем функции двух переме
ных, отсылая заинтересованного читателя к соответствующей литер
туре, например, [1,2].

Определение. Графиком функции $z = f(x, y)$, заданной в области опр
деления D называется множество точек $(x, y, f(x, y))$ в трехмерном к
ординатном пространстве, где точки (x, y) принадлежат области D. Т
ким образом, график функции $z = f(x, y)$ – это поверхность (или част
поверхности) в трехмерном пространстве.

Примеры

1.

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \ .$$

Графиком этой функции будет полусфера (см. рис.4).

2.

$$z = x^2 + y^2 \ .$$

График – параболоид вращения (см. рис.5).

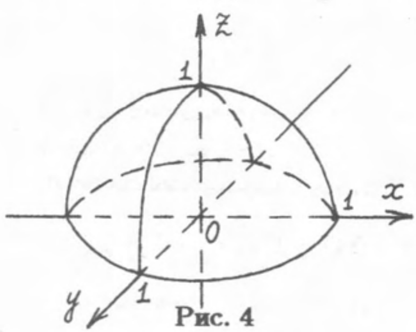

Рис. 4

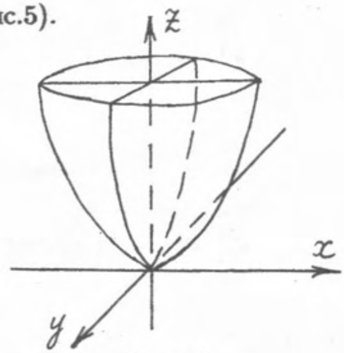

Рис. 5

3.

$$z = 1 - x - y \ .$$

График – плоскость, отсекающая единичные отрезки от осей координат (см. рис.6).

4.

$$z = x^2 - y^2 \ .$$

График – гиперболический параболоид (см. рис.7).

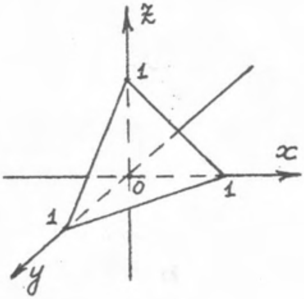

Рис. 6

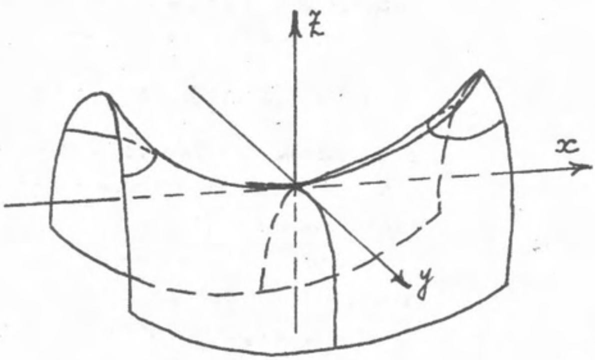

Рис. 7

Замечание. Понятия предел и непрерывность функции нескольких переменных в представленных указаниях не рассматриваются (см. соответствующие разделы в [1,2]).

2 . Частные производные

Определение. Частным приращением функции $z = f(x, y)$ в точке (x, y) по переменной x называется разность вида:

$$f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = \Delta_x z \ .$$

Смысл определения состоит в том, что приращение получает только независимая переменная x, а y остается фиксированная.

Аналогично определяется частное приращение по переменной y:

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \Delta_y z \ .$$

Здесь приращение получает только y, а x фиксирована.

Определение. Полным приращением функции $z = f(x,y)$ в точке (x,y) называется разность вида

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) .$$

Здесь приращения получают обе переменные x, y.

Примеры.

1.

$$\begin{aligned} z &= x+2y \\ \Delta_x z &= (x+\Delta x+2y)-(x+2y) &&= \Delta x \\ \Delta_y z &= (x+2(y+\Delta y))-(x+2y) &&= 2\,\Delta\, y \\ \Delta z &= (x+\Delta x+2(y+\Delta y))-(x+2y) &&= \Delta x + 2\,\Delta\, y \ . \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} z &= xy^2 \\ \Delta_x z &= (x+\Delta x)y^2 - xy^2 = \Delta x y^2 \\ \Delta_y z &= x(y+\Delta y)^2 - xy^2 = 2xy\,\Delta\, y + x(\Delta y)^2 \end{aligned}$$

$$\Delta z = (x+\Delta x)(y+\Delta y)^2 - xy^2 = (x+\Delta x)(y^2+2y\,\Delta\, y+(\Delta y)^2) - xy^2 =$$
$$= 2xy\,\Delta\, y + x(\Delta y)^2 + \Delta x y^2) + 2y\,\Delta\, x\,\Delta\, y + \Delta x(\Delta y)^2 .$$

В соответствии с тремя видами приращений функции $z = f(x,y)$ определяются три вида производных.

Определение. Частной производной функции $z = f(x,y)$ по переменной x в точке (x,y) называется предел отношения частного приращения функции $f(x,y)$ по переменной x в точке (x,y) к приращению Δx при стремлении последнего к нулю:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$

или

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x .$$

Отметим, что здесь используется понятие предела функции одной переменной, т.к. предел вычисляется по переменной Δx.

Из определения следует, что при дифференцировании по x переменная y считается фиксированной (постоянной).

Замечание. Следует обратить внимание на обозначение частных производных. Используется вместо буквы d символ ∂.

Аналогично определяется частная производная функции $z = f(x,y)$ по переменной y:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

или

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} \ .$$

Здесь фиксированной (постоянной) считается переменная x. Третий вид производных, соответствующий полному приращению функции $z = f(x, y)$ будет рассмотрен позже.

Примеры

1.

$$z = x + 2y \ .$$

При дифференцировании по x переменная y считается постоянной, а производная постоянной величины равна нулю. Тогда имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x)'_x + (2y)'_x = 1 + 0 = 1 \ .$$

При дифференцировании по y, наоборот, x считается постоянной

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x)'_y + (2y)'_y = 0 + 2 = 2 \ .$$

2.

$$z = xy^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \cdot y^2 = y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot 2y = 2xy \ .$$

3.

$$z = \frac{x}{y} \ ; \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = 1 \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{y} \ ; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot \left(\frac{1}{y}\right)'_y = -\frac{x}{y^2} \ .$$

4.

$$z = \ln(x + 3y) \ .$$

Применяя правило дифференцирования сложной функции, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x+3y} \cdot 1 = \frac{1}{x+3y} \ ; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x+3y} \cdot 3 = \frac{3}{x+3y} \ .$$

5.

$$z = \sqrt{x^2 + y^3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^3}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^3}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^3}} \cdot 3y^2 = \frac{3y^2}{2\sqrt{x^2+y^3}} \ .$$

Здесь была использована табличная производная

$$(\sqrt{u})' = \left(u^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}} .$$

6.

$$z = \frac{1}{xy} ; \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{(xy)^2} \cdot y ; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{(xy)^2} \cdot x .$$

Здесь использована табличная производная

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = (u^{-1})' = -u^{-2} = -\frac{1}{u^2} .$$

Определим теперь частные производные второго порядка. Если первая производная функции $z = f(x, y)$ взята по x, то ее производные по x, y обозначаются так:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$$

или

$$z''_{x^2} = f''_{x^2}(x, y); \qquad z''_{xy} = f''_{xy}(x, y) .$$

Аналогично определяются производные второго порядка, если первая производная взята по y:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) .$$

Частная производная второго порядка, взятая по различным переменным, называется смешанной. Их две:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} .$$

Доказывается теорема о равенстве смешанных производных второго порядка при некоторых достаточно общих условиях.

Аналогично определяются производные третьего, четвертого и более высоких порядков.

Примеры

1.

$$z = 2x - 3y; \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = 2; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0 .$$

2.

$$z = x^2y^3; \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2y^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^3; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x^2y; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6xy^2 .$$

3.

Дана функция$z = \ln(x^2 - 3y)$. Доказать равенство $\frac{3}{x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x^2 - 3y} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 - 3y}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x^2 - 3y} \cdot (-3) = \frac{-3}{x^2 - 3y};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -3\left(-\frac{1}{(x^2 - 3y)^2} \cdot (-3)\right) = \frac{-9}{(x^2 - 3y)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x\left(\frac{-1}{(x^2 - 3y)^2} \cdot (-3)\right) = \frac{6x}{(x^2 - 3y)^2}.$$

Тогда

$$\frac{3}{x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{3}{x} \cdot \frac{6x}{(x^2 - 3y)^2} + 2 \cdot \frac{-9}{(x^2 - 3y)^2} = \frac{18}{(x^2 - 3y)^2} - \frac{18}{(x^2 - 3y)^2} = 0 .$$

3 . Полный дифференциал

Определение. Полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) называется выражение вида

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y$$

или

$$dz = z'_x(x_0, y_0)dx + z'_y(x_0, y_0)dy ,$$

где $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$ – приращения независимых переменных x, y, соответственно, в точке (x_0, y_0).

Пример

Найти полный дифференциал функции $z = x^2y$ в точке (1, -2).

$$dz(x_0, y_0) = 2x_0y_0\, dx + x_0^2\, dy, \quad \text{где} x_0 = 1,\ y_0 = -2 .$$

Тогда

$$dz(1, -2) = 2 \cdot 1 \cdot (-2)\, dx + 1^2 \cdot dy = -4\, dx + dy, \quad dz = -4\, dx + dy .$$

Доказывается, что при достаточно малых $\triangle x, \triangle y$ выполняется приближенное равенство

$$\triangle z \approx dz \ .$$

Пример. Дана функция $z = x^2 + y^2 + x - 2y$ и две точки $A(2,-1)$ и $B(2,01;-0,96)$ Требуется: 1) вычислить значение функции z в точке B; 2) вычислить приближенное значение функции z в точке B, исходя из значения ее в точке A, заменяя приращение функции при переходе от A к B дифференциалом, и оценить в процентах относительную погрешность при замене приращения дифференциалом.

1). $z(B) = z(2,01;-0,96) = 2,01^2+(-0,96)^2+2,01-2(-0,96) = 8,8917$.

2).Приближенное значение $z_1(B)$ будем вычислять по формуле

$$z_1(B) = z(A) + dz(A)$$

или

$$z_1(2,01;-0,96) = z(2,-1) + dz(2,-1) =$$

$$= 2^2 + (-1)^2 + 2 - 2(-1) + (2 \cdot 2 + 1)dx + (2 \cdot (-1) - 2)dy \ ,$$

где

$dx = 2,01-2 = 0,01$; $dy = -0,96-(-1) = 0,04$; $z'_x = 2x+1$; $z'_y = 2y-2$.

Тогда получаем

$$z_1(B) = 8,89 \ .$$

Относительная погрешность равна:

$$\frac{\triangle z - dz}{dz} = \frac{(z(B) - z(A) - dz(A))}{dz(A)} =$$

$$= \frac{(8,8917 - 9) - (-0,09)}{-0,09} \approx 0,20, \text{ т.е. } 20\% \ .$$

4. Касательная плоскость

Рассмотрим поверхность $z = f(x,y)$ и точку $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, принадлежащую этой поверхности. Пусть существуют непрерывные частные производные функции $z = f(x,y)$ в точке M_0 и ее окрестности. Можно показать, что все касательные, проведенные к различным кривым, лежащим на поверхности и проходящим через точку M_0, лежат в одной плоскости, называемой касательной плоскостью [1,2] (рис.8).

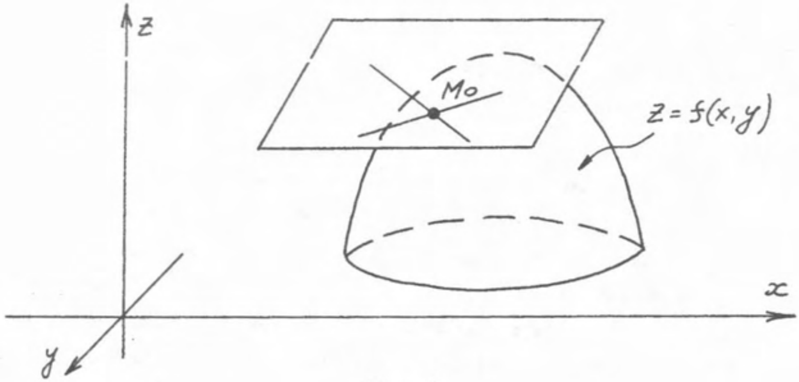

Рис. 8

Можно доказать [1,2], что уравнение касательной плоскости к поверхности $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ имеет вид:

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)\ .$$

<u>**Пример.**</u> Написать уравнение касательной плоскости к поверхности $z = x^2 + 3xy + 2x - 1$ в точке $M_0(1, -2, -4)$.

Имеем, что

$$z - z_0 = (2x_0 + 3y_0 + 2)\ (x - x_0) + (3x_0)\ (y - y_0)$$

или

$$z - (-4) = (2 \cdot 1 + 3(-2) + 2)\ (x - 1) + 3 \cdot 1\ (y - (-2)),$$

$$z + 4 = -2(x - 1) + 3(y + 2)\ .$$

Окончательно получаем

$$2x - 3y + z - 2 = 0\ .$$

<u>*Замечание.*</u> Если поверхность задана уравнением вида $f(x, y, z) = 0$, то уравнение касательной плоскости к поверхности в точке (x_0, y_0, z_0) имеет вид:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}(z - z_0) = 0\ .$$

5 . Производная по направлению и градиент

В п.2 было рассмотрено полное приращение функции $z = f(x,y)$. Определим соответствующую ему производную. Пусть M – точка с координатами $(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

Определение. Производной функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ по направлению вектора $\vec{a}$ называется предел отношения полного приращения функции в этой точке, при условии, что вектор $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарен (параллелен) вектору $\vec{a}$, к величине отрезка M_0M при стремлении последней к нулю:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial a} = \lim_{M_0M \to 0} \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0M}$$

или

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial a} = \lim_{M_0M \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{M_0M}\ .$$

Под величиной отрезка M_0M понимается его длина, взятая со знаком плюс, если вектор $\overrightarrow{M_0M}$ сонаправлен с вектором $\vec{a}$, или, взятая со знаком минус, если $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{a}$ направлены противоположно друг другу.

Замечание. Частные производные $\partial f(x)/\partial x$, $\partial f(y)/\partial y$ получаются из $\partial f(x)/\partial a$, если $\vec{a}$ сонаправлен с осями координат OX, OY, соответственно.

Можно показать [1,2,3], что

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial a} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cos\beta\ ,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ – направляющие косинусы вектора $\vec{a}$. При этом

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}; \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}\ ,$$

где a_x и a_y – проекции вектора $\vec{a}$ на оси OX и OY, соответственно.

Пример. Найти производную функции $z = \mathrm{arctg}(x/y)$ по направлению вектора $\vec{a} = 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$ в точке $M_0(1, -1)$. Здесь $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ – орты системы координат, т.е. единичные векторы, сонаправленные с осями OX и OY, соответственно.

Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \dfrac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \dfrac{x^2}{y^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2} \cdot \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} + \left(-\frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2}\right) \cdot \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} =$$

$$= \frac{-1}{1^2 + (-1)^2} \cdot \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} + \left(-\frac{1}{1^2 + (-1)^2}\right) \cdot \frac{-4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0,1 \ .$$

Определение. Градиентом функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется вектор с координатами

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, \quad \text{т.е.}$$

$$grad\ z = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\,\vec{\imath} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\,\vec{\jmath} \ .$$

Пример. Найти градиент функции $z = \ln(x + 3y^2)$ в точке $M_0(1, -2)$.

$$grad\ z(x_0, y_0) = \frac{1}{x_0 + 3y_0^2}\,\vec{\imath} + \frac{6y_0}{x_0 + 3y_0^2}\,\vec{\jmath}$$

или

$$grad\ z(1, -2) = \frac{1}{1 + 3(-2)^2}\,\vec{\imath} + \frac{6(-2)}{1 + 3(-2)^2}\,\vec{\jmath} \ .$$

$$grad\ z(1, -2) = \frac{1}{13}\,(\vec{\imath} - 12\,\vec{\jmath}) \ .$$

Можно показать [1-4], что

$$\frac{\partial f}{\partial a} = grad\ f \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \ ,$$

где точка в правой части равенства обозначает скалярное произведение векторов.

Замечание. Понятие производной по направлению и градиента можно обобщить на функции трех, четырех и большего числа переменных.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Н.С.Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.:Наука, 1978. Т.1,2.

2. Г.М.Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.:Наука, 1969. Т.1.

3. И.П.Натансон. Краткий курс высшей математики. М.:Наука, 1968.

4. П.Е.Данко, А.Г.Попов, Т.Я.Кожевникова. Высшая математика в упражнениях и задачах. М.:Высшая школа, 1980.