Динамическое исследование механической системы

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург

2009

Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

Санкт-Петербургский государственный технологический университет растительных полимеров

Динамическое исследование механической системы

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2009

УДК 531(072)

Динамическое исследование механической системы: Методические указания по выполнению работ по динамике. / Сост. В.Е. Головко, С.Г.Петров, Н.В. Кузнецова, А.В. Ютелис, Ю.Н. Лазарев, Э.В. Азарова; СПбГТУРП. СПб., 2009. 56с., ил.,21.

Учебно-методические указания содержат краткий обзор основных теорем и принципов динамики механической системы, дано описание порядка и последовательности выполнения работы.

Предназначено для студентов всех специальностей и форм обучения.

Рецензенты: зав. кафедрой теоретической механики Санкт-Петербургского технологического института доцент Ю.А. Иванов

Подготовлено и рекомендовано к печати кафедрой теоретической механики и теории машин и механизмов Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров (протокол № 2 от 3 октября 2008г.).

Утверждено к изданию методической комиссией факультета автоматизированных производств СПбГТУРП (протокол № 4 от 04.11.2008 г.).

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом университета в качестве учебно-методического пособия.

1. СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ И ТРЕБОВАНИЯ К РАБОТЕ.

Исходными величинами для каждого из вариантов задания служат:

1. Кинематическая схема механизма и номер варианта
2. Геометрические размеры
3. Массы тел, образующих систему, радиусы инерции (тела, для которых радиусы инерции не даны, считать однородными цилиндрами)
4. Величины и направления внешних сил, приложенных к телам механизма, коэффициенты трения скольжения и трения качения
5. Начальные условия (в начальный момент система находится в покое)
6. Все нити считаются нерастяжимыми и направленными параллельно соответствующим плоскостям
7. Скольжение нитей по блокам, а также скольжение тел по поверхностям качения отсутствует.

В результате расчетов должны быть найдены:

1. Максимальное и минимальное значения указанной в задании величины, при которой система будет находиться в равновесии (с помощью принципа возможных перемещений).

   Если при заданных исходных величинах система уже находится в состоянии покоя, то следует указанную величину последовательно увеличивать на 20% до тех пор, пока это состояние не будет нарушено. При всех дальнейших расчетах следует принимать именно это значение.
2. Ускорение центра масс тела, указанного в задании с помощью:
   а) дифференциальных уравнений движения каждого тела;
   б) теоремы об изменении кинетической энергии;
   в) теоремы об изменении кинетического момента;
   г) принципа Даламбера;
   д) общего уравнения динамики;
   е) уравнения Лагранжа 2-го рода.
3. Реакции внешних и внутренних связей
4. Выводы о целесообразности использования каждого способа при определении ускорения тела и реакции связей.

Работа оформляется в виде расчетно-пояснительной записки в тетради, на обложке которой необходимо указать название "Динамическое исследование механической системы", номер варианта и группы, фамилию студента, выполнившего работу. На первом листе должна быть изображена схема в масштабе с указанием всех заданных размеров и искомых величин.

После этого проводится собственно расчет, который начинается с уравнений кинематических связей. Затем они сводятся в общую таблицу и используются во всех последующих расчетах.

Для каждого из пунктов расчёта должна быть изображена силовая расчетная схема.

После проверки работы преподавателем производится ее защита, для подготовки к которой студенту целесообразно найти ответы на контрольные вопросы, приведенные в конце данных методических указаний.

2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

2.1. Дифференциальные уравнения поступательного, вращательного и плоскопараллельного движения твердого тела

Поступательное движение. Из раздела "Кинематика" известно, что при поступательном движении тела все его точки движутся по одинаковым траекториям с геометрически равными скоростями и ускорениями. Поэтому если с помощью теоремы о движении центра масс описать его движение, то из этого будет следовать, что описано движение всего тела.

Таким образом, для поступательно движущегося в пространстве тела можно записать

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_c &= \sum X_k^E \\ m\ddot{y}_c &= \sum Y_k^E \\ m\ddot{z}_c &= \sum Z_k^E, \end{aligned} \qquad (2.1)$$

что и является дифференциальными уравнениями поступательного движения, где m - масса тела, x_c, y_c, z_c - координаты центра масс тела,

$X_{гл}^{E}$, $Y_{гл}^{E}$, $Z_{гл}^{E}$ - проекции главного вектора внешних сил на оси координат.

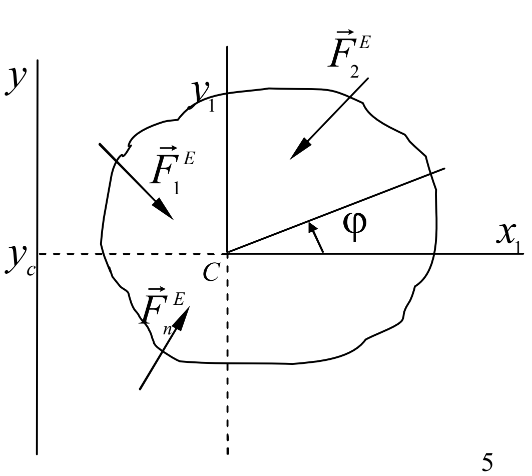
Если известно, что тело движется в плоскости или по прямой линии, то число дифференциальных уравнений уменьшается до двух и одного соответственно.

Вращательное движение. Если твердое тело вращается вокруг неподвижной оси, то на основании теоремы об изменении кинетического момента для него можно записать уравнение

$$I_z \ddot{\varphi} = M_z^E \tag{2.2}$$

которое и представляет собой дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Где I_z – момент инерции тела относительно оси вращения, φ - угол поворота тела, M_z^E - главный момент внешних сил, действующих на тело.

Плоское движение. Как известно из кинематики, плоское движение можно представить в виде суммы двух движений - поступательного вместе с полюсом и вращательного вокруг полюса. В данном задании за полюс целесообразно выбирать центр масс, поскольку его движение описывается с помощью теоремы о движении центра масс. Вращение же вокруг центра масс можно описать с помощью теоремы об изменении кинетического момента системы относительно центра масс (рис. 1).



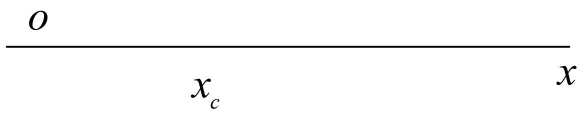


Рис. 1

Таким образом, получаются дифференциальные уравнения плоского движения тела:

$$m\ddot{x}_c = X^E$$

$$m\ddot{y}_c = Y^E \qquad (2.3)$$

$$I_c\ddot{\varphi} = M_c^E,$$

где m - масса тела;

x_c, y_c - координаты центра масс;

φ - угол поворота;

I_c - момент инерции тела относительно оси, перпендикулярной плоскости чертежа и проходящей через центр масс тела (C_{z1});

X^E, Y^E – проекции главного вектора внешних сил на оси координат;

M_c^E - главный момент внешних сил относительно оси проходящей через точку С перпендикулярно плоскости *x0y*.

Задание предусматривает определение ускорения одного из тел механизма с помощью дифференциальных уравнений движения каждого тела. Для выполнения этого расчёта рекомендуется придерживаться такой последовательности:

1. Расчленить данный механизм на отдельные тела, изобразить на расчётных схемах все внешние силы, приложенные к каждому телу, реакции связей и реакции отброшенных тел.
2. Выбрать систему координат и тем самым определить направление положительного отсчета угла поворота φ .
3. Составить дифференциальные уравнения движения каждого тела (не следует забывать, что в третьем уравнении системы (2.3)

момент инерции твёрдого тела I_c и главный момент внешних сил M_c^E вычисляются относительно оси, проходящей через центр масс c твёрдого тела перпендикулярно к неподвижной плоскости).

4. Для замыкания системы уравнений необходимо учесть наличие связей, ограничивающих движение тел механической системы, составив соотношения между ускорениями в виде:

$$f_1(\ddot{x}_1, \ddot{y}_1, \ddot{\varphi}_1, \ldots, \ddot{x}_n, \ddot{y}_n, \ddot{\varphi}_n) = 0$$

$$f_m(\ddot{x}_1, \ddot{y}_1, \ddot{\varphi}_1, \ldots, \ddot{x}_n, \ddot{y}_n, \ddot{\varphi}_n) = 0$$

После этого число уравнений в системе будет равно числу содержащихся в них неизвестных, в результате чего требуемое ускорение тела легко определяется.

2.2. Кинетическая энергия твердого тела. Теорема об изменении кинетической энергии

Кинетическая энергия механической системы, состоящей из n твердых тел, равна сумме кинетических энергий всех тел

$$T = \sum_{k=1}^{n} T_k.$$

Для твердых тел, совершающих поступательное, вращательное и плоское движения, кинетическая энергия, соответственно, равна:

$$T_{пост.} = \frac{MV^2}{2}, \qquad (2.4)$$

где M - масса тела;

V - его скорость.

$$T_{вр.} = \frac{I_z \omega^2}{2}, \qquad (2.5)$$

где I_z - момент инерции тела относительно оси вращения;

ω - угловая скорость.

$$T_{плоск.} = \frac{MV_c^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2}, \tag{2.6}$$

где V_c -скорость центра масс;

I_c - момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной плоскости движения.

В задании рассматриваются системы твердых тел, соединенных гибкими нерастяжимыми нитями, поэтому теорему об изменении кинетической энергии механической системы можно сформулировать так:

$$T_2 - T_1 = \sum A_k^E, \tag{2.7}$$

т.е. изменение кинетической энергии системы на некотором перемещении равно сумме работ внешних сил, действующих на систему на этом перемещении.

Работа постоянной силы *F* на перемещении *S*, если угол между силой и перемещением равен α, определяется формулой:

$$A = FS\cos\alpha. \tag{2.8}$$

Работа пары сил с постоянным по величине моментом *M* при угле поворота тела φ, к которому эта пара приложена, равна:

$$A = M\varphi. \tag{2.9}$$

Пример 1. Определить кинетическую энергию однородного цилиндра веса P, катящегося без скольжения со скоростью точки C V_c по поверхности (рис. 2). Цилиндр совершает плоскопараллельное движение, поэтому кинетическая энергия определяется выражением (2.6).

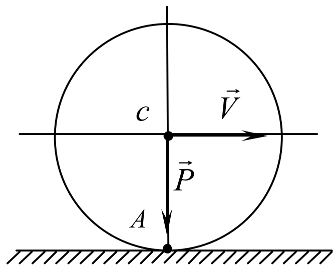


Рис. 2

Зная вес цилиндра, массу можно определить по формуле:

$$M = \frac{P}{g}.$$

Скорость центра масс – V_c.

Момент инерции однородного цилиндра:

$$I_c = \frac{MR^2}{2} = \frac{PR^2}{2g}.$$

Так как цилиндр катится без скольжения, скорость точки касания A цилиндра с поверхностью $V_A = 0$, поэтому угловая скорость колеса ω будет равна:

$$\omega = \frac{V_c}{R}.$$

Подставим полученные результаты в исходную формулу и получим:

$$T_{плоск.} = \frac{PV_c^2}{2g} + \frac{1}{2}\frac{PR^2}{2g}\left(\frac{V_c}{R}\right)^2 = \frac{3PV_c^2}{4g}.$$

Пример 2. Определить работу, которую надо затратить при перекатывании без скольжения цилиндра весом P и радиуса r по горизонтальной поверхности на расстояние S, если коэффициент трения качения цилиндра по плоскости δ (рис. 3). При качении цилиндра возникает пара сопротивления, образованная весом цилиндра P и нормальной реакцией N с моментом $M = P\delta$. При перекатывании цилиндра на расстояние S, он повернётся на угол $\varphi = S/r$. Таким образом, работа, которую надо затратить на перекатывание цилиндра, определится формулой:

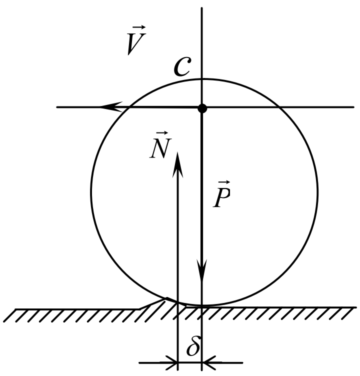


Рис. 3

$$A = M\varphi = P\delta\frac{S}{r}.$$

При решении задачи на определение ускорения центра масс с помощью теоремы об изменении кинетической энергии механическую систему нужно рассматривать как единое целое, при этом в выражение (2.7) подставляется значение кинетической энергии всей системы и подсчитывается работа на перемещениях от всех активных сил, действующих на систему, и реакций неидеальных связей.

Решение задачи рекомендуется проводить в такой последовательности :

1. Изобразить на расчетной схеме силы, приложенные к системе тел, т.е. внешние силы, включая и реакции связей.
2. Вычислить кинетическую энергию механизма, выразив ее через скорость звена, ускорение которого необходимо определить в его начальном и конечном положении.

3. Вычислить сумму работ всех сил, приложенных к механизму при его перемещении, выразив эту сумму через перемещение тела, ускорение которого необходимо определить.
4. Использовав результаты вычислений двух предыдущих пунктов, применить теорему об изменении кинетической энергии системы и после дифференцирования определить искомое ускорение.

2.3. Кинетический момент системы. Теорема об изменении кинетического момента системы

Напомним теорему об изменении кинетического момента: производная по времени от кинетического момента механической системы относительно некоторой оси равна главному моменту внешних сил относительно этой оси:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^E. \tag{2.10}$$

Главный момент внешних сил системы равен алгебраической сумме моментов внешних сил, приложенных к системе:

$$M_z^E = \sum_{k=1}^{n} M_z(\vec{F}_k^E).$$

Кинетическим моментом или главным моментом количеств движения механической системы относительно оси называется алгебраическая сумма моментов количеств движения всех материальных точек или тел системы относительно этой оси, т. е.

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} L_{iz},$$

где n - число точек и тел, образующих систему.

Таким образом, если материальная система состоит из нескольких материальных тел, то кинетический момент этой системы будет равен алгебраической сумме кинетических моментов каждого тела, т.е.

$$L_z = \sum_{k=1}^{m} L_{kz},$$

где m - число тел, образующих систему.

Наиболее распространенными случаями движения являются поступательное, вращательное и плоскопараллельное (плоское) движения, именно такие случаи и рассматриваются в настоящей работе.

Рассмотрим определение кинетического момента для каждого случая движения тела.

Поступательное движение. Как известно, поступательное движение тела можно представить в виде движения материальной точки с массой, равной массе тела, которая сосредоточена в центре масс тела. Таким образом, определение кинетического момента поступательно движущегося тела производится так же, как и для материальной точки.

Пример 3. Для тела 1 массой m, движущегося со скоростью V, определить кинетический момент относительно оси Ox (рис.4).

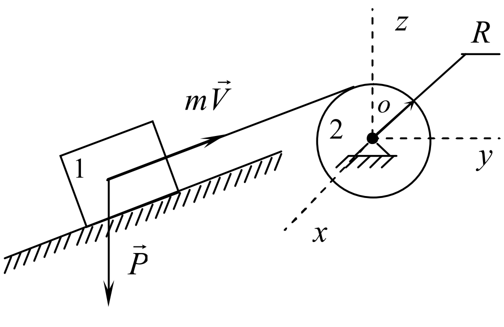


Рис. 4

Момент вектора $m\vec{V}$ относительно оси Ox определяется по формуле:

$$L_{1x} = -mVR.$$

Напомним, что кинетический момент - величина алгебраическая и правило определения знаков аналогично правилу знаков для момента силы: момент количества движения точки считается положительным, если вектор $m\vec{V}$ стремится повернуть плоскость чертежа вокруг оси в сторону, противоположную ходу часовой стрелки, и отрицательным, если - в сторону вращения часовой стрелки.

Как видно на рис. 4, кинетический момент тела 1 отрицателен.

Вращательное движение. Кинетический момент вращающегося твердого тела относительно неподвижной оси его вращения равен произведению момента инерции тела относительно той же оси на угловую скорость тела.

Стоит напомнить, что кинетический момент положителен, если из положительного направления оси вращение тела видим происходящим против хода часовой стрелки:

$$L_z = \pm I_z \omega. \tag{2.11}$$

Если дан радиус инерции тела i, то момент инерции, являющийся характеристикой инертности тела при вращательном движении, определяется по формуле

$$I_z = M \cdot i^2,$$

где M - масса тела, i - радиус инерции тела.

Если вращающееся тело является тонким кольцом радиуса R, то

$$I_z = MR^2,$$

если - однородным сплошным цилиндром, то

$$I_z = \frac{MR^2}{2},$$

если полым цилиндром с внешним радиусом R и внутренним радиусом r , то

$$I_z = \frac{M(R^2 + r^2)}{2}.$$

Пример 4. В условиях примера 3 определить кинетический момент тела 2 , если это однородный цилиндр массы M относительно оси Ox.

В этом случае $L_x = I_x \omega$.

Для однородного цилиндра $I_x = \dfrac{MR^2}{2}$.

Угловая скорость определяется формулой: $\omega = \dfrac{V}{R}$.

Так как с оси Ox направление вращения видно в сторону, совпадающую с вращением часовой стрелки, то

$$L_{2x} = -\frac{MR^2}{2}\frac{V}{R} = -\frac{MVR}{2}.$$

Плоскопараллельное движение. Определение кинетического момента при плоскопараллельном движении производится на основании теоремы о зависимости между кинетическим моментом механической системы относительно неподвижного центра и относительно центра масс системы:

При любом движении механической системы ее кинетический момент относительно неподвижного центра равен геометрической сумме: момента относительно этого центра главного вектора количества движения системы, условно приложенного в центре масс, и кинетического момента системы в ее относительном движении по отношению к центру масс относительно этого центра (рис. 5).

$$\vec{L}_0 = \vec{r}_c \times \vec{K} + \vec{L}_c^{отн}, \tag{2.12}$$

Где $\vec{L}_0$ - Кинетический момент тела $Д$ относительно произвольного неподвижного центра;

$\vec{r}_c$ - Радиус-вектор, определяющий положение центра масс *С* тела *Д*;

$\vec{K} = M\vec{V}_c$ - Количество движения тела *Д*;

$\vec{L}_c^{отн}$ - Кинетический момент тела *Д* в его относительном движении по отношению к центру масс относительно этого центра.

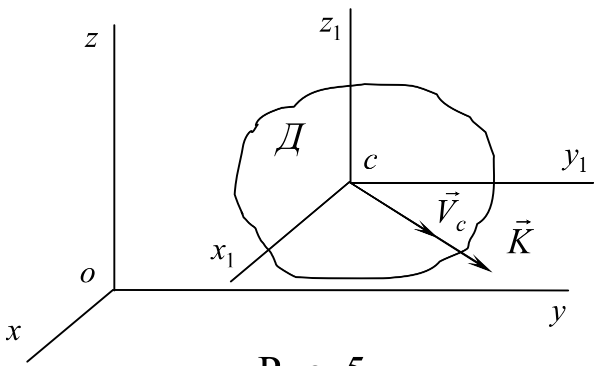


Рис. 5

Или в проекции на оси координат

$$L_x = L'_x + L_{cx_1}^{отн}, \tag{2.13}$$

где L_x - кинетический момент механической системы (тела *Д*) относительно неподвижной оси *Ox*;

L'_x - момент главного вектора количества движения системы K, условно приложенного в центре масс, относительно оси *Ox*;

$L_{cx_1}^{отн}$ - кинетический момент тела *Д* относительно подвижной оси Cx_1, проходящей через центр масс *С* в относительном движении тела по отношению к центру масс.

Необходимо напомнить, что все величины, входящие в формулу (2.13), алгебраические, т.е. могут быть положительными и отрицательными.

Пример 5. В качестве примера рассмотрим качение со скоростью V без скольжения однородного шара массы M и радиусом R в плоскости Oyz . Определим его кинетический момент относительно осей Ox, O_2x_2, O_3x_3, расположенных как показано на рис 6.

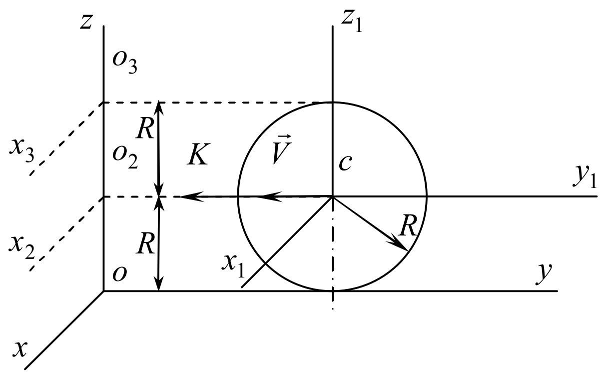


Рис. 6

$$L_x = L_{xk} + L_{cx_1}^{отн.}$$

Количество движения шара

$$K = MV.$$

Момент этого вектора относительно оси Ox равен

$$L_{xk} = KR = MVR \ \frac{кгм^2}{с}.$$

Кинетический момент шара относительно подвижной оси Cx_1 в относительном движении шара по отношению к этой оси

$$L_{cx_1}^{отн.} = L_{cx_1} \omega.$$

Для шара $I_{cx_1} = 2\!/\!_5 MR^2.$

Так как скольжение отсутствует $\omega = \dfrac{V}{R},$

тогда $L_{cx_1}^{отн.} = \dfrac{2}{5} MR^2 \dfrac{V}{R} = \dfrac{2}{5} MVR \; \dfrac{кгм^2}{с}$

и окончательно $L_x = \dfrac{7}{5} MVR \; \dfrac{кгм^2}{с}.$

Следует отметить, что в условиях данного примера и L_{xk} и $L_{cx_1}^{отн.}$ положительны.

Определим эту же величину относительно оси $O_2 x_2$.

В данном случае изменится только величина $L_{x_2 k}$. В условиях этого примера $L_{x_2 k} = 0$.

Поэтому $L_{x_2} = L_{cx_1}^{отн.} = 2\!/\!_5 MVR$.

При определении L_{x_3} относительно оси $O_3 x_3$ заметим, что по сравнению с осью Ox меняется знак, т.е. $L_{x_3 k} = -MVR$, а $L_{cx_1}^{отн.}$ не меняется, поэтому

$$L_{x_3} = L_{x_3 k} + L_{cx_1}^{отн.} = -MVR + \frac{2}{5} MVR = -\frac{3}{5} MVR.$$

Пример 6. Определить кинетический момент однородного цилиндра массой M и радиуса R , вращающегося с угловой скоростью ω вокруг своей оси, относительно оси вращения Oz и относительно произвольно расположенной параллельной оси O_1z_1 (рис.7).

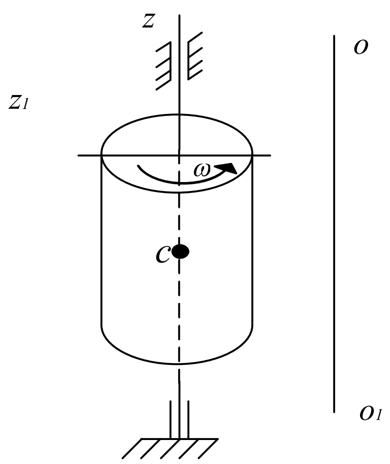


Рис. 7

Так как цилиндр однородный, то центр масс его находится на оси вращения Oz и, следовательно, его скорость $V_c = 0$, поэтому $K = MV_c = 0$.

$$L_{z_1} = L_{z_1 k} + L_z^{отн.}.$$

Так как $K = 0$, то $L_{z_1 k} = 0$, т.е.:

$$L_{z_1} = L_z^{отн.} = I_z \omega = \frac{MR^2}{2}\omega.$$

Задачи на определение ускорения центра масс тела с помощью теоремы об изменении кинетического момента системы материальных точек относительно неподвижной оси рекомендуется решать в следующем порядке:

1. Выбрать направление одной из осей координат.
2. Записать теорему об изменении кинетического момента системы относительно соответствующей оси.
3. Изобразить на расчетной схеме все внешние силы системы.
4. Вычислить главный момент внешних сил относительно неподвижной оси.
5. Вычислить кинетический момент системы относительно неподвижной оси через скорость тела, ускорение которого необходимо определить, и затем взять его производную по времени.
6. Подставить результаты пунктов 4 и 5 в 2 и затем определить величину необходимого ускорения.
7. Если число неизвестных в основном уравнении будет больше одного, то механизм следует расчленить на 2 или более частей и воспользоваться теоремой для каждой части в отдельности. При этом следует учитывать реакции отброшенных частей механизма.

2.4. Приведение сил инерции, точек твердого тела к простейшему виду. Главный вектор и главный момент сил инерции. Принцип Германа-Эйлера-Даламбера (принцип кинетостатики)

Метод кинетостатики базируется на принципе Германа-Эйлера-Даламбера: дополняя активные силы $\vec{F}_k$ и реакции связей $\vec{R}_k$, приложенные к механической системе, силами инерции $\vec{\Phi}_k$, получаем уравновешенную систему сил для каждой материальной точки

$$\vec{F}_{kj} + \vec{R}_{kj} + \vec{\Phi}_{kj} = 0, \qquad (2.14)$$

где $\vec{\Phi}_{kj} = -m_j \vec{a}_j$; (2.15)

m_j - масса *j-й точки;*

a_j - её ускорение.

Для практических расчетов плоских механизмов, образованных твердыми телами, условие равновесия (2.14) записывают не для материальных точек, а для целых звеньев механизма (рис.8).

$$\sum \vec{F}_{kj} + \sum \vec{R}_{kj} + \sum \vec{\Phi}_{kj} = 0$$

$$\sum M_c(\vec{F}_{kj}) + \sum M_c(\vec{R}_{kj}) + M_k^u = 0, \qquad (2.16)$$

где $\sum \vec{\Phi}_{kj} = \vec{\Phi}_k = m_k \vec{a}_{ck}$ - главный вектор сил инерции, приложенный в центре масс C_k k-го звена;

m_k - масса k-го звена;

$\vec{a}_{ck}$ - ускорение центра масс k-го звена;

$\vec{M}_k^u = -I_{ck} \vec{\varepsilon}_k$ - главный момент сил инерции, приложенный к k-му звену;

I_{ck} - момент инерции k-ого звена, вычисленный относительно его центра масс C;

ε_k - угловое ускорение k-ого звена.

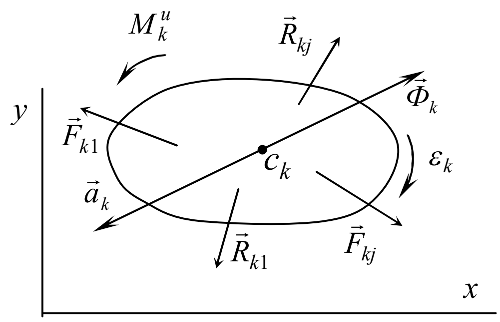


Рис. 8

При решении задачи на определение ускорения центра масс с помощью принципа кинетостатики надо к системе тел приложить все действующие активные силы, внешние реакции связей, главные вектора сил инерции, приложенные в центре масс каждого тела, и главные моменты сил инерции, приложенные к каждому телу. Далее для полученной системы сил составляются уравнения равновесия. Если в полученных уравнениях число неизвестных сил будет превышать число уравнений, составленных для данной системы сил, следует расчленить данную систему на отдельные тела, ввести реакции отброшенных тел, которые из внутренних становятся внешними, и вновь составить уравнения равновесия. При решении задач таким способом можно найти не только ускорения тел, но и все реакции связей (внешние и внутренние).

2.5. Принцип возможных перемещений

Принцип возможных перемещений выражает в общем виде необходимые и достаточные условия равновесия механической системы, утверждая, что для равновесия механической системы с неидеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на нее активных сил и реакций связей при любом возможном перемещении системы была равна нулю.

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^r = 0. \qquad (2.17)$$

В случае, если связи, наложенные на систему, идеальные, то сумма работ реакций таких связей равна нулю:

$$\sum \delta A_k^r = 0.$$

Необходимо напомнить, что, если система имеет несколько степеней свободы, то условие (2.17) надо составлять для каждого из независимых перемещений системы в отдельности. Тогда мы получим для системы столько условий равновесия, сколько она имеет степеней свободы.

Элементарную работу сил и пар сил подсчитывают по формулам

$$\delta A_k^a = F_k^a \delta S_k \cos(\vec{F}_k^a, \delta \vec{S}_k)$$

или

$$\delta A_k^a = M_{ok} \delta\varphi_k .$$

В данном задании с помощью принципа возможных перемещений нужно определить максимальное и минимальное значения указанного параметра механизма с одной степенью свободы, при котором механизм будет находиться в состоянии равновесия. Многозначность ответа объясняется тем, что в соответствии с законом Кулона сила трения находится в пределах $0 \le F_{тр.} \le F_{тр.}^{\max}$. Кроме этого, в зависимости от направления возможного движения $F_{тр.}$ меняет направление на противоположное. Точно так же изменяется точка приложения нормальной реакции N при качении деформируемого тела (случай с трением качения).

Поэтому при выполнении данного пункта задания, следует изобразить две расчетные схемы механизма для двух противоположных возможных движений его звеньев. На этих схемах механизма нужно изобразить все активные силы с учетом направления возможного движения и возможные перемещения звеньев механизма. После этого для обоих случаев направления возможного движения подсчитать сумму работ активных сил и реакций связей и приравнять ее нулю. Затем, используя соотношения, связывающие кинематические параметры движения звеньев, решить эти два уравнения относительно неизвестного параметра.

2.6. Общее уравнение динамики

В соответствии с общим уравнением динамики при движении системы с неидеальными связями в каждый данный момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил, реакций связей и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы будет равна нулю:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^r + \sum \delta A_k^u = 0 . \qquad (2.18)$$

Данное уравнение позволяет составить дифференциальные уравнения движения любой механической системы, при этом число составленных уравнений должно соответствовать числу степеней свободы рассматриваемой системы.

Порядок расчета с помощью общего уравнения динамики должен быть такой. На силовой расчетной схеме механизма должны быть обязательно указаны все активные силы, реакции связей, силы и моменты сил инерции и возможные перемещения его звеньев. Затем определяется работа активных сил, реакции связей и сил инерции, приложенных ко всем звеньям механизма, и найденная сумма приравнивается к нулю. Таким образом, не разделяя механизм на отдельные звенья, с помощью уравнений кинематических связей решаем общее уравнение динамики относительно неизвестного ускорения.

2.7. Дифференциальное уравнение Лагранжа 2-го рода

Использование уравнений Лагранжа предполагает описание кинематики движения механизма с помощью обобщенных координат, т.е. независимых параметров, однозначно определяющих положение механизма. Для рассматриваемых механизмов число обобщенных координат равно числу степеней свободы, т.е. единице. Поэтому для определения законов движения звеньев нужно записать одно уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=Q, \tag{2.19}$$

где q - обобщенная координата;

$\dot{q}$ - обобщенная скорость;

t - время;

T - кинетическая энергия механизма, выраженная через обобщенную скорость.

Обобщенная сила определяется по формуле:

$$Q = \frac{\delta A}{\delta q}, \qquad (2.20)$$

где δq - приращение обобщенной координаты;

δA - сумма работ всех активных сил и реакций связей при приращении обобщенной координаты.

Вычисление обобщенных сил производится по формуле (2.20) и сводится к вычислению возможной элементарной работы. Сначала следует установить, каково число степеней свободы системы, выбрать обобщенные координаты и изобразить на расчетной схеме все приложенные активные силы и реакции связей. Затем для определения обобщенной силы надо сообщить системе возможное перемещение, вычислить при этом сумму элементарных работ всех действующих сил и представить полученное выражение в виде

$$\delta A = Q\delta q.$$

Тогда коэффициент при δq и даст искомую величину Q. Если механическая система имеет степень подвижности >1, то в этом случае дается приращение только обобщенной координате q_1 и по описанной выше методике определяется обобщенная сила Q_1, далее дается приращение величине q_2 и вычисляется Q_2, и т.д.

При решении задачи с помощью уравнений Лагранжа надо:

1. установить число степеней свободы и выбрать обобщенные координаты;
2. изобразить на расчетной схеме механизма все действующие силы (активные и реакции связей);
3. вычислить обобщенные силы, при этом во избежание ошибок в знаках каждое сообщаемое системе возможное перемещение должно быть направлено так, чтобы приращение соответствующей координаты было положительным;
4. вычислить кинетическую энергию системы в ее абсолютном движении через обобщенные координаты и обобщенные скорости;
5. подсчитать соответствующие частные производные и подставить все вычисленные величины в исходное уравнение.

3. ПРИМЕР РАСЧЕТА

В качестве иллюстрации выполнения задания приведем пример плоского механизма с одной степенью свободы (рис. 9).

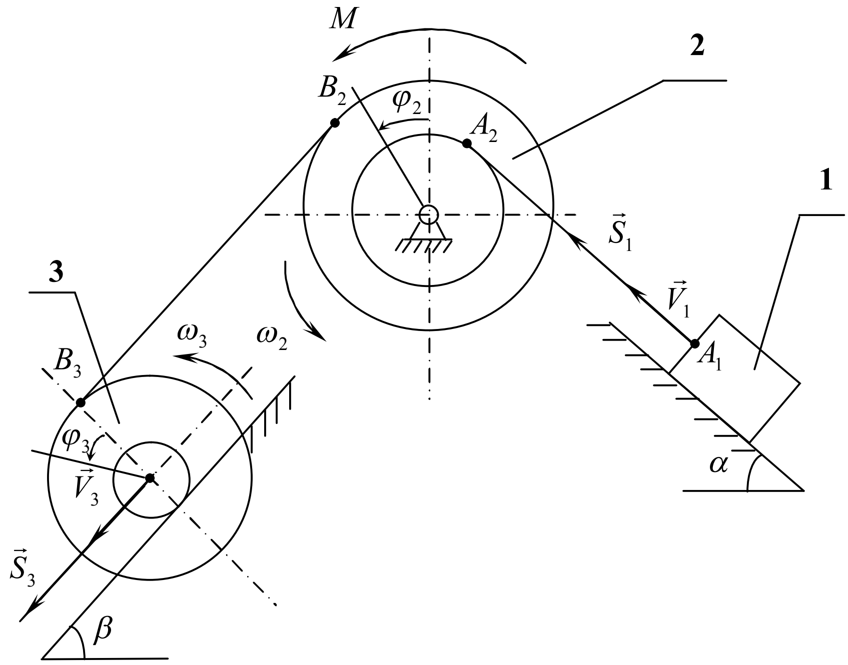


Рис. 9

Механизм состоит из трех тел, связанных между собой нерастяжимыми нитями, параллельными соответствующим наклонным плоскостям. Скольжение нитей по телам, а также скольжение тел по поверхности качения отсутствуют.

Заданы следующие параметры механизма:

- геометрические размеры $R_2 = 0{,}6 м$, $r_2 = 0{,}4 м$, $R_3 = 0{,}5 м$, $r_3 = 0{,}2 м$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$;
- массы звеньев механизма $m_1 = 5 кг$, $m_2 = 2 кг$, $m_3 = 7 кг$;
- радиусы инерции звеньев $i_2 = 0{,}5 м$, $i_3 = 0{,}4 м$;

- коэффициент трения скольжения тела 1 по наклонной плоскости $f_1 = 0{,}4$;
- коэффициент трения качения тела 3 по наклонной плоскости $\delta_3 = 0{,}001 м$;
- вращающий момент, приложенный к телу 2, $M = 3 Нм$;
- в начальный момент система находилась в покое.

Требуется определить ускорение a_1 тела 1 и пределы массы тела 1, при которой механизм будет находиться в равновесии.

3.1. Кинематические связи

Для описания движения каждого звена механизма введем координаты S_1, φ_2, S_3 и φ_3, определяющие положение системы в любой момент времени.

Так как нити считаются нерастяжимыми и не скользят относительно цилиндрических поверхностей, то скорости точек звеньев механизма A_1 и A_2, B_2 и B_3 попарно равны

$$V_{A_1} = V_{A_2}\ ;\ B_2 = B_3 .$$

Откуда следует

$$V_1 = V_{A_1} = V_{A_2} = \omega_2 r_2$$

$$V_{B_2} = \omega_2 R_2 = V_{B_3} = \omega_3 (R_3 + r_3) .$$

Скорость центра тела 3 :

$$V_3 = \omega_3 r_3.$$

Поскольку требуется определить ускорение a_1 тела 1, выразим V_3, ω_3 и ω_2 через V_1:

$$\omega_2 = \frac{V_1}{r_2};$$

$$\omega_3 = \omega_2 \frac{R_2}{R_3 + r_3} = V_1 \frac{R_2}{r_2(R_3 + r_3)};$$

$$V_3 = V_1 \frac{R_2 r_3}{r_2(R_3 + r_3)}$$

После подстановки данных получим

$$\omega_2 = \frac{V_1}{0,4} = 2,5V_1$$

$$V_3 = \frac{0,6 \cdot 0,2}{0,4(0,5 + 0,2)} V_1 = 0,429V_1 \qquad (3.1)$$

$$\omega_3 = \frac{0,6}{0,4(0,5 + 0,2)} V_1 = 2,14V_1$$

Зависимость между ускорениями можно получить путем дифференцирования уравнений (3.1), а между перемещениями - путем интегрирования этих же уравнений. Полученные результаты сведем в таблицу.

ЗВЕНО	КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ

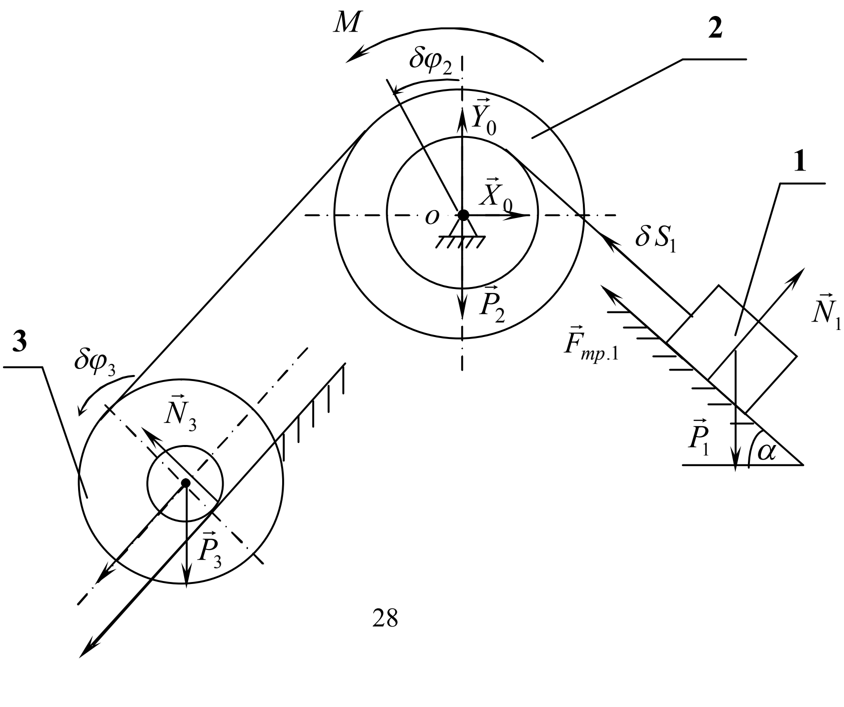
	координата	скорость	ускорение
1	S_1	V_1	a_1
2	$\varphi_2 = 2{,}5S_1$	$\omega_2 = 2{,}5V_1$	$\varepsilon_2 = 2{,}5a_1$
3	S_3=0,429S_1	V_3 = 0,429V_1	a_3 = 0,429a_1
	$\varphi_3 = 2{,}14S_1$	$\omega_3 = 2{,}14V_1$	$\varepsilon_3 = 2{,}14a_1$

3.2. Принцип возможных перемещений

Воспользуемся принципом возможных перемещений для определения максимального и минимального значения массы тела 1, при котором механизм, изображенный на рис. 9, находится в состоянии равновесия:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^r = 0.$$

Для определения $m_1^{\max}$ составим расчетную схему (рис. 10), предполагая, что при минимальном увеличении $m_1^{\max}$, тело 1 начнет опускаться, а тело 3 - подниматься по наклонным плоскостям.



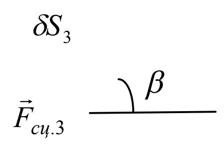


Рис. 10

Укажем на расчетной схеме (см. рис. 10) возможные перемещения всех твердых тел, придавая малые приращения соответствующим координатам. Определим работу активных сил и реакций связей на возможном перемещении и приравняем ее нулю.

$$(F_{тр.}^{\max} - P_1 \sin\alpha)\delta S_1 + M\delta\varphi_2 + P_3 \delta S_3 \sin\beta + N_3 \delta_3 \delta\varphi_3 = 0.$$

С учетом $N_3 = m_3 g \cos\beta$ и уравнений кинематических связей получаем

$$(m_1^{\max} g \cos\alpha \cdot f_1 - m_1^{\max} g \sin\alpha)\delta S_1 + M \cdot 2{,}5\delta S_1 +$$
$$+ m_3 g \sin\beta \cdot 0{,}429\delta S_1 + m_3 g \delta_3 \cos\beta \cdot 2{,}14\delta S_1 = 0.$$

Так как данное равенство должно выполняться для произвольного приращения δS_1, то после сокращения δS_1 и подстановки численных данных, получим искомую величину

$$m_1^{\max} = 18{,}8кг.$$

Для определения $m_1^{\min}$ составим расчетную схему (рис. 11) предполагая, что незначительное уменьшение $m_1^{\min}$ вызовет опускание тела 3 и подъем тела 1 по наклонным плоскостям. При этом изменится на противоположное направление силы трения $F_{тр_1}^{\max}$ и изменится точка приложения нормальной реакции N_3 (она опустится вниз по наклонной плоскости относительно центра масс тела 3).

Укажем на схеме возможные перемещения и воспользуемся еще раз принципом возможных перемещений:

$$(-P_1 \sin\alpha - F_{mp_1})\delta S_1 + M\delta\varphi_2 + P_3 \delta S_3 \sin\beta - N_3 \delta_3 \delta\varphi_3 = 0.$$

С учетом уравнений кинематических связей и численных данных получаем

$$m_1^{\min} = 3{,}4 кг.$$

Таким образом, данный механизм находится в равновесии при массе тела 1, изменяющейся в пределах

$$3{,}4 \le m_1 \le 18{,}8.$$

Таким образом, система при заданном значении m_1 находится в равновесии ($m_1 = 5кг$). Уменьшим ее величину два раза на 20% и получим $m_1 = 3{,}2кг$.

При данном значении m_1 система выходит из состояния покоя и все остальные расчеты будут производиться при $m_1 = 3{,}2кг$ (напомним читателю, что в задании к работе следует увеличивать указанную величину на 20%).

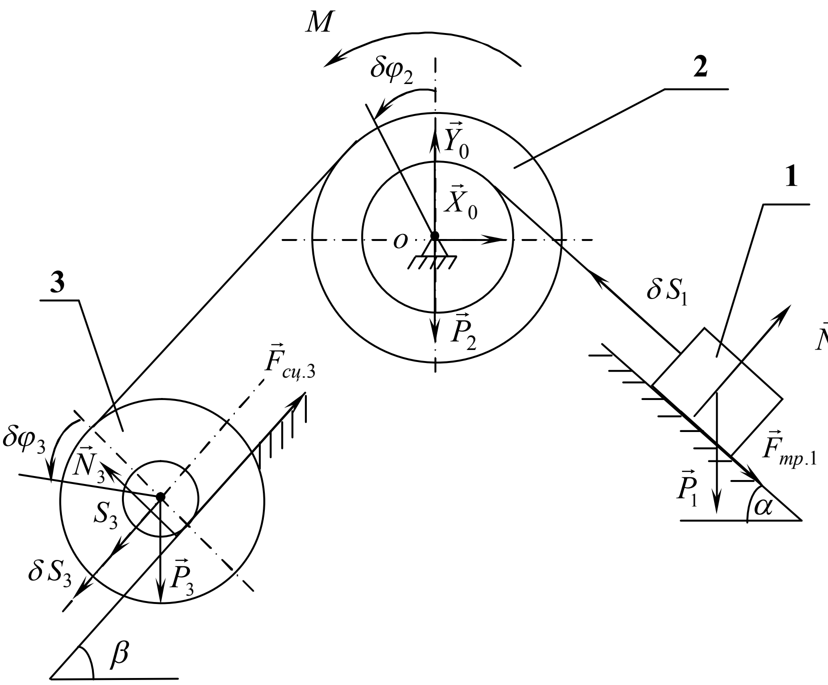


Рис. 11

3.3. Дифференциальные уравнения поступательного, вращательного и плоскопараллельного движения

Расчленим систему на отдельные тела и рассмотрим движение каждого тела в отдельности.

Начнем с тела 1, которое движется поступательно (рис. 12). На него действуют вес P_1, нормальная реакция наклонной плоскости N_1, сила трения $F_{тр.1}$, и сила натяжения нити T_1 (реакция отброшенного тела 2). Направив оси координат, как показано на рис. 12, составим дифференциальные уравнения поступательного движения тела 1:

$$m_1\ddot{x}_1 = T_1 - F^{\max}_{тр.} - P_1 \sin\alpha \qquad (3.2)$$

$$m_1\ddot{y}_1 = N_1 - P_1 \cos\alpha;$$

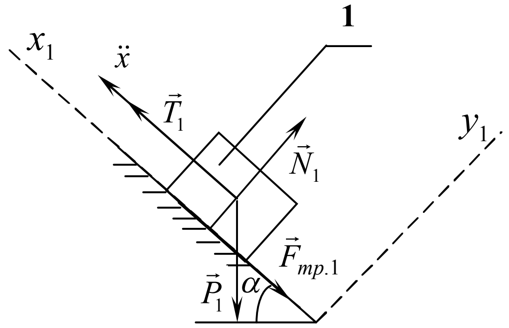


Рис. 12

из второго уравнения выразим N_1:

$$N_1 = P_1 \cos\alpha$$

и подставим в первое с учетом, что $F^{\max}_{тр} = f_1 N_1$:

$$m_1 a_1 = T_1 - f_1 m_1 g \cos\alpha - m_1 g \sin\alpha. \qquad (3.3)$$

Направляя x_1 вверх по наклонной плоскости, мы, таким образом, определили направление движения тела 1, и, следовательно, и всей системы.

Если тело 1 поднимается по наклонной плоскости, тело 2 должно вращаться против хода часовой стрелки, а тело 3 должно спускаться вниз и вращаться против хода часов. Это необходимо учитывать при рассмотрении движения тел 2 и 3.

Рассмотрим вращательное движение тела 2 (рис.13), на которое действуют вес тела P_2, вращающий момент M, опорная реакция, разложенная на составляющие X_0 и Y_0, и силы натяжения нитей T_1 и T_2 (реакции отброшенных тел).

Составим дифференциальное уравнение вращательного движения
тела 2 относительно оси, перпендикулярной плоскости чертежа и проходящей через ось вращения O на нас:

$$I_0\ddot{\varphi}_2 = T_2R_2 - T_1r_2 + M$$

С учетом, что $I_0 = m_2i_2^2$, $\ddot{\varphi}_2 = \varepsilon_2$ напишем

$$m_2i_2^2\varepsilon_2 = M + T_2R_2 - T_1r_2 \tag{3.4}$$

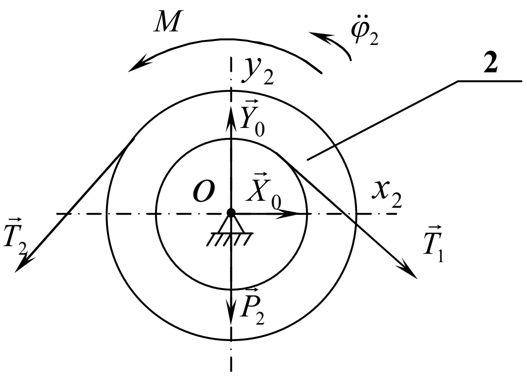


Рис. 13

И наконец, рассмотрим плоскопараллельное движение тела 3 (рис.14), на которое действуют вес тела P_3, нормальная реакция наклонной плоскости N_3(поскольку тело и плоскость не являются абсолютно твердыми , реакция N_3 сдвинута по ходу движения тела на величину δ_3) , сила натяжения нити T_2 и сила сцепления $F_{сц.3}$ (не путать с силой трения $F_{тр.}^{\max} = fN$).

Составим дифференциальные уравнения движения тела

$$m_3\ddot{x}_3 = P_3\sin\beta - T_2 - F_{сц.3}$$

$$m_3 \ddot{y}_3 = -P_3 \cos\beta + N_3 = 0 \qquad (3.5)$$

$$I_c \ddot{\varphi}_3 = F_{сц.3} r_3 - T_2 R_3 - N_3 \delta_3$$

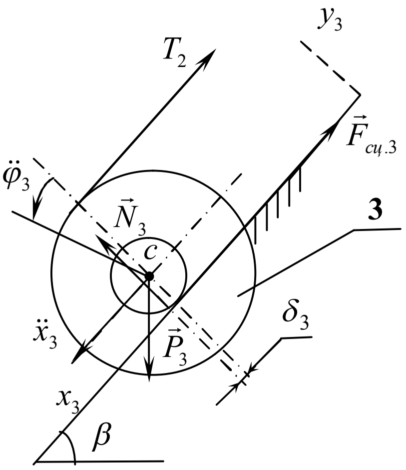


Рис. 14

Выразим из второго уравнения N_3 и с учетом $I_c = m_3 i_3^2$ получим

$$m_3 a_3 = m_3 g \sin\beta - T_2 - F_{сц.3}, \qquad (3.6)$$

$$m_3 i_3^2 \varepsilon_3 = F_{сц.3} r_3 - T_2 R_3 - m_3 g \delta_3 \cos\beta.$$

Дополняя уравнения (3.3), (3.4) и (3.6) уравнениями кинематических связей (см. 3 графу таблицы), получим систему уравнений, в которой число неизвестных (a_1, T_1, ε_2, T_2, a_3, $F_{сц.3}$, ε_3) равно числу уравнений:

$$m_1 a_1 = T_1 - f_1 m_1 g \cos\alpha - m_1 g \sin\alpha$$

$$m_2 i_2^2 \varepsilon_2 = M + T_2 R_2 - T_1 r_2$$

$$m_3 a_3 = m_3 g \sin\beta - T_2 - F_{сц.3}$$

$$m_3 i_3^2 \varepsilon_3 = F_{сц.3} r_3 - T_2 R_3 - m_3 g \delta_3 \cos\beta \qquad (3.7)$$

$$\varepsilon_2 = 2{,}5 a_1$$

$$a_3 = 0{,}429 a_1$$

$$\varepsilon_3 = 2{,}14 a_1.$$

После подстановки численных данных в (3.7), а также после исключения ε_2, a_3, ε_3 , получим

$$3{,}2 a_1 = T_1 - 10{,}87 - 15{,}70$$

$$1{,}25 a_1 = 3 + 0{,}6 T_2 - 0{,}4 T_1 \qquad (3.8)$$

$$3 a_1 = 48{,}5 - T_2 - F_{сц.3}$$

$$2{,}4 a_1 = 0{,}2 F_{сц.3} - 0{,}5 T_2 - 0{,}049.$$

Решим полученную систему методом последовательного исключения неизвестных . Исключим $F_{сц.3}$, для чего третье уравнение (3.8) умножим на 0,2 и сложим с четвертым. Система при этом упрощается

$$3{,}2 a_1 = T_1 - 26{,}6$$

$$1{,}25 a_1 = 0{,}6 T_2 - 0{,}4 T_1 + 3 \qquad (3.9)$$

$$3a_1 = 9{,}7 - 0{,}7T_2.$$

Исключая аналогичным образом T_2, и затем и T_1, получим

$$a_1 = 0{,}132\ \text{м}/\text{с}^2.$$

Подставляя a_1 в (3.8), получим значения сил натяжения нитей и силу сцепления

$$T_1 = 27{,}0H$$

$$T_2 = 13{,}3H$$

$$F_{сц.3} = 34{,}8H$$

Из (3.2) и (3.5) определим величины нормальных реакций наклонных плоскостей

$$N_1 = 27{,}2H$$

$$N_3 = 48{,}5H.$$

Величину реакции цилиндрического шарнира O определим из уравнений статики для тела 2. Составим уравнения проекций на оси ox_2, oy_2

$$X_0 + T_1\cos 30^\circ - T_2\cos 45^\circ = 0$$

$$Y_0 - T_1\sin 30^\circ - T_2\cos 45^\circ - P_2 = 0.$$

Откуда получим $X_0 = -13{,}98H$ и $Y_0 = 45{,}5H$.

Полная реакция $R_0 = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2}$ $R_0 = 47{,}6H$.

3.4 Теорема об изменении кинетической энергии

В соответствии с пунктом 2.2 изображаем расчетную схему (рис. 15).

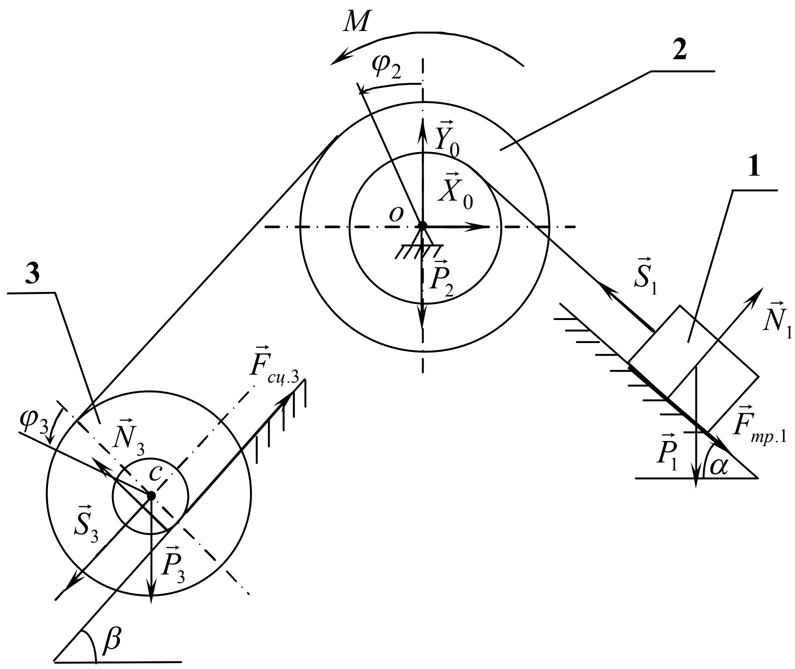


Рис. 15

Теорема об изменении кинетической энергии системы

$$T_{II} - T_I = \sum A_k^E. \tag{3.10}$$

Так как в начальный момент система находилась в покое,

$$T_I = 0. \tag{3.11}$$

Определим кинетическую энергию механизма по формулам (2.4)-(2.6) в текущем положении, выразив ее через скорость тела 1

$$T_{II} = T_1 + T_2 + T_3$$

$$T_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2} = 1{,}6 V_1^2$$

$$T_2 = \frac{I_0 \omega_2^2}{2} = \frac{m_2 i_2^2}{2} (2{,}5 V_1)^2 = 1{,}56 V_1^2$$

$$T_3 = \frac{m_3 V_3^2}{2} + \frac{I_3 \omega_3^2}{2} = \frac{m_3}{2} (0{,}429 V_1)^2 + \frac{m_3 i_3^2}{2} (2{,}14 V_1)^2 = 3{,}21 V_1^2.$$

И окончательно

$$T_{II} = 6{,}37 V_1^2 \ Дж. \qquad (3.12)$$

Работа внешних сил при переходе системы из исходного положения в текущее равна

$$\sum A_k^E = P_3 S_3 \sin\beta - N_3 \delta_3 \varphi_3 + M\varphi_2 - P_1 S_1 \sin\alpha - F_{тр.}^{\max} S_1$$

Напомним, что $N_3 = P_3 \cos\beta$:

$$F_{тр.}^{\max} = N_1 f_1 = P_1 f_1 \cos\alpha.$$

Воспользовавшись уравнениями кинематических связей (см. таблицу стр. 27), находим

$$\sum A_k^E = m_3 g \sin 45^\circ \cdot 0{,}429 S_1 - m_3 g \delta_3 \cos 45^\circ \cdot 2{,}14 S_1 +$$
$$+ M\, 2{,}5 S_1 - m_1 g S_1 \sin 30^\circ - m_1 g f_1 S_1 \cos 30^\circ .$$

После подстановки численных значений получаем

$$\sum A_k^E = 8{,}66 S_1 \text{ } Дж. \tag{3.13}$$

Подставив (3.11) - (3.13) в (3.10) имеем

$$6{,}37 V_1^2 = 1{,}66 S_1 . \tag{3.14}$$

Для определения a_1 продифференцируем (3.14) по времени

$$2V_1 \cdot 6{,}37 a_1 = 1{,}66 V_1 .$$

И окончательно $a_1 = 0{,}13 \text{ м}/\text{с}^2$.

3.5 Теорема об изменении кинетического момента

Рисуем расчетную схему (рис.16) .Составим уравнение, вытекающее из теоремы об изменении кинетического момента (2.9) относительно оси *Oz*, проходящей через точку *O* перпендикулярно плоскости чертежа на нас.

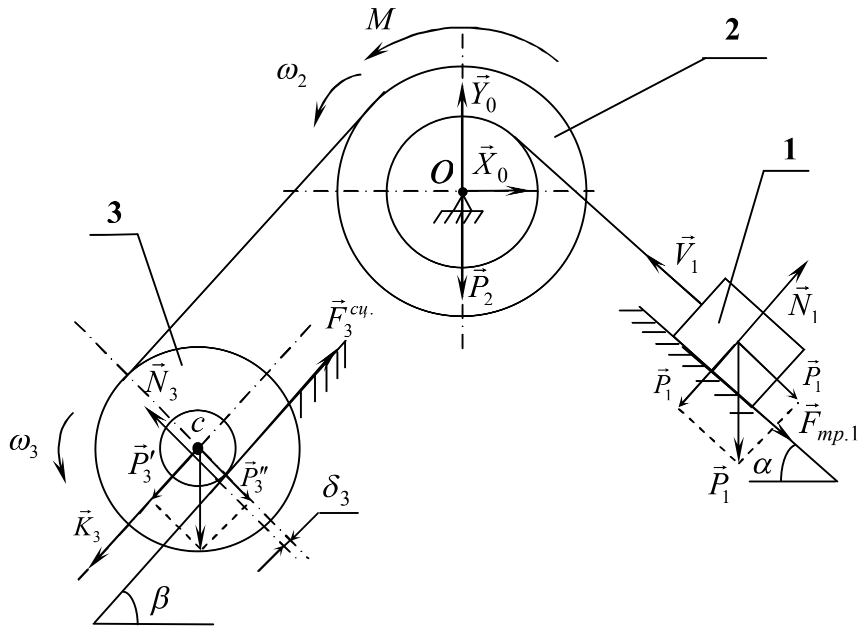


Рис. 16

$$\frac{dL_{oz}}{dt} = M_{oz}^{E}. \tag{3.15}$$

Определим главный момент внешних сил M_{oz}^{E}, приложенных к системе, относительно оси *Oz*, учитывая, что

$$N_3 = P_3'' = P_3 \cos\beta$$

$$N_1 = P_1'' = P_1 \cos\alpha.$$

Таким образом , силы P_1'' и N_1 взаимно уравновешиваются, а N_3 и P_3'' образуют пару с моментом $M = -P_3''\delta_3 = -P_3\delta_3\cos\beta$. Пренебрегая размерами поступательно движущегося тела 1, перенесем все силы, приложенные к нему в центр масс.

Тогда получим

$$M_{oz}^{E} = M + P_3(R_2 - R_3)\sin\beta + F_{сц.3}(R_3 + r_3 - R_2) -$$

$$- P_3\delta_3\cos\beta - P_1 r_2\sin\alpha - F_{тр.}^{\max} r_2.$$

После подстановки численных значений

$$M_{oz}^{E} = 0{,}1F_{сц.3} - 2{,}77\ Нм. \tag{3.16}$$

Определим кинетический момент системы по формулам (2.10) и (2.12):

$$L_{oz} = L_1 + L_2 + L_3 \tag{3.17}$$

$$L_1 = m_1 V_1 r_2$$

$$L_2 = I_0\omega_2 = m_2 i_2^2 \omega_2$$

$$L_3 = L_{cz}^{отн.} + K(R_2 - R_3) = L_{cz}^{отн.} + m_3V_3(R_2 - R_3) = I_3\omega_3 + m_3V_3(R_2 - R_3).$$

Подставим полученные результаты с учетом уравнений кинематических связей (см. таблицу), заданных численных данных и получим

$$L_{oz} = 5{,}23V_1\frac{кгм^2}{с}. \tag{3.18}$$

После подстановки (3.16) и (3.18) в (3.15) имеем

$$5{,}23a_1 = 0{,}1F_{сц.3} - 2{,}77. \qquad (3.19)$$

Получено уравнение с двумя неизвестными. Для исключения $F_{сц.3}$ рассмотрим движение тела 3 (рис. 17), отбросив тела 1 и 2. В результате появляется новая неизвестная сила натяжения нити T_2 (реакция отброшенных тел).

С целью исключений новой неизвестной T_2 составим уравнение (2.10) относительно оси B, проходящей через точку B_3 перпендикулярно плоскости чертежа на нас:

$$\frac{dL_B}{dt} = M_B^E. \qquad (3.20)$$

Определим главный момент внешних сил относительно оси В

$$M_B^E = F_{сц.3}(R_3 + r_3) - P_3\delta_3 \cos\beta - P_3 R_3 \sin\beta.$$

После подстановки данных получим

$$M_B^E = 0{,}7F_{сц.3} - 24{,}3\ Нм \qquad (3.21)$$

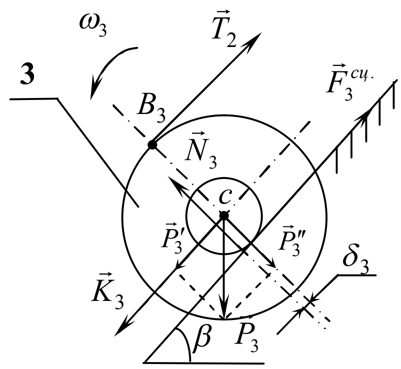


Рис. 17

Определим кинетический момент тела 3 относительно оси B по формуле (2.12):

$$L_B = L_{cz}^{отн.} - K_3 R_3 = I_3 \omega_3 - m_3 V_3 R_3$$

С учетом численных данных и уравнений кинематических связей имеем

$$L_B = 0{,}896 V_1 \, \frac{кгм^2}{с} \qquad (3.22)$$

Подставляя (3.21) и (3.22) в (3.20), получим

$$0{,}896 a_1 = 0{,}7 F_{сц.3} - 24{,}3 \qquad (3.23)$$

Решая совместно уравнения (3.19) и (3.23) относительно a, имеем

$$a_1 = 0{,}132 \; м/с^2 .$$

3.6 Принцип кинетостатики

Рассмотрим движение тел 1 и 2. Составим расчетную схему (рис.18) для этих тел, указав на ней активные силы, реакции связей и реакции отброшенных тел и силы инерции.

Тело 1 движется поступательно, следовательно, к нему надо приложить силу инерции

$$Ф_1 = m_1 a_1 = 3{,}2 a_1 \; Н.$$

К телу 2, вращающемуся вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O, приложим момент сил инерции

$$M_2^u = I_2\varepsilon_2 = m_2 i_2^2 \frac{a_1}{r_2} = 1{,}25 a_1 \ Нм.$$

Напомним, что силы инерции и момент сил инерции направлены в стороны противоположные линейным и угловым ускорениям соответственно .

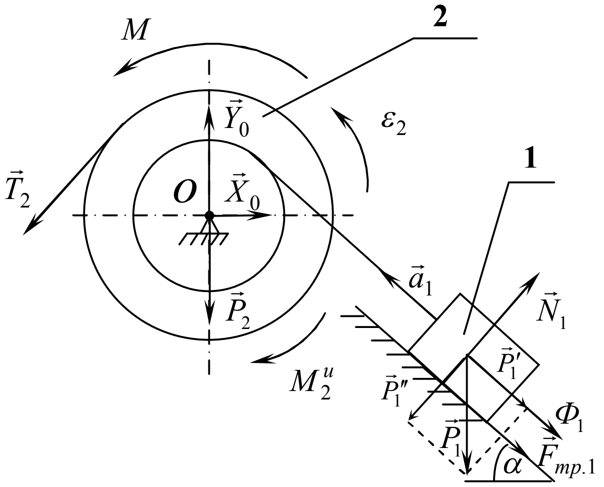


Рис. 18

Составим уравнение моментов относительно оси вращения тела 2:

$$\sum M_0(\vec{F}_k^a) + \sum M_0(\vec{R}_k) + \sum M_0(\vec{\Phi}_k) = 0$$

$$T_2 R_2 + M - M_2^u - (P_1' + \Phi_1 + F_{mp1}^{\max}) r_2 = 0 \qquad (3.24)$$

Напомним, что

$$P_1' = m_1 g \sin\alpha$$

$$F_{тр.}^{\max} = f_1 m_1 g \cos\alpha.$$

После подстановки в исходное уравнение численных данных получим

$$0{,}6T_2 - 2{,}53a_1 - 7{,}63 = 0. \qquad (3.25)$$

Так как в уравнении имеется два неизвестных T_2 и a_1, рассмотрим движение тела 3, совершающего плоскопараллельное движение (рис.19)

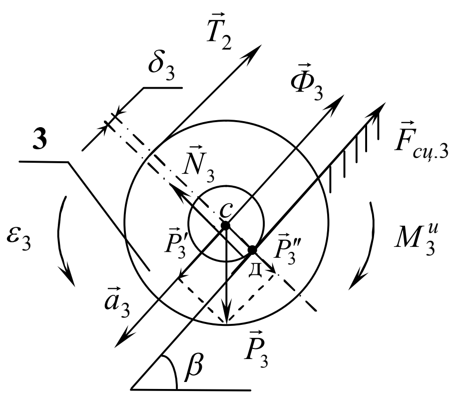


Рис. 19

Приложим к телу активные силы, реакции связей, реакции отброшенных тел, главный вектор Φ_3 и главный момент M_3 сил инерции:

$$\Phi_3 = m_3 a_3 = 7 \cdot 0{,}429a_1 = 3a_1 \; H$$

$$M_3^u = I_3 \varepsilon_3 = m_3 i_3^2 \varepsilon_3 = 7 \cdot 0{,}4^2 \cdot 2{,}14a_1 \; Hм.$$

Чтобы в уравнение кинетостатики не входила новая неизвестная $F_{сц.3}$, составим уравнение моментов относительно точки $Д$.

$$\sum M_{Д}(\vec{F}_k^a) + \sum M_{Д}(\vec{R}_k) + \sum M_{Д}(\vec{\Phi}_k) = 0$$

$$-M_3^u - T_2(R_3 + r_3) - \Phi_3 r_3 + P_3' r_3 - N_3 \delta_3 = 0. \qquad (3.26)$$

Напомним, что

$$N_3 = P_3'' = P_3 \cos\beta = m_3 g \cos\beta$$

$$P_3' = P_3 \sin\beta = m_3 g \sin\beta.$$

После подстановки в (3.26) численных данных получим

$$-3{,}0a_1 - 0{,}7T_2 + 9{,}66 = 0. \qquad (3.27)$$

Решая систему уравнений из (3.25) и (3.27), получим

$$a_1 = 0{,}127 \, м/с^2.$$

3.7. Общее уравнение динамики

Составим расчетную схему для всего механизма, указав на кинематической схеме механизма активные силы, реакции связей и силы инерции (рис. 20), а также возможные перемещения его звеньев.

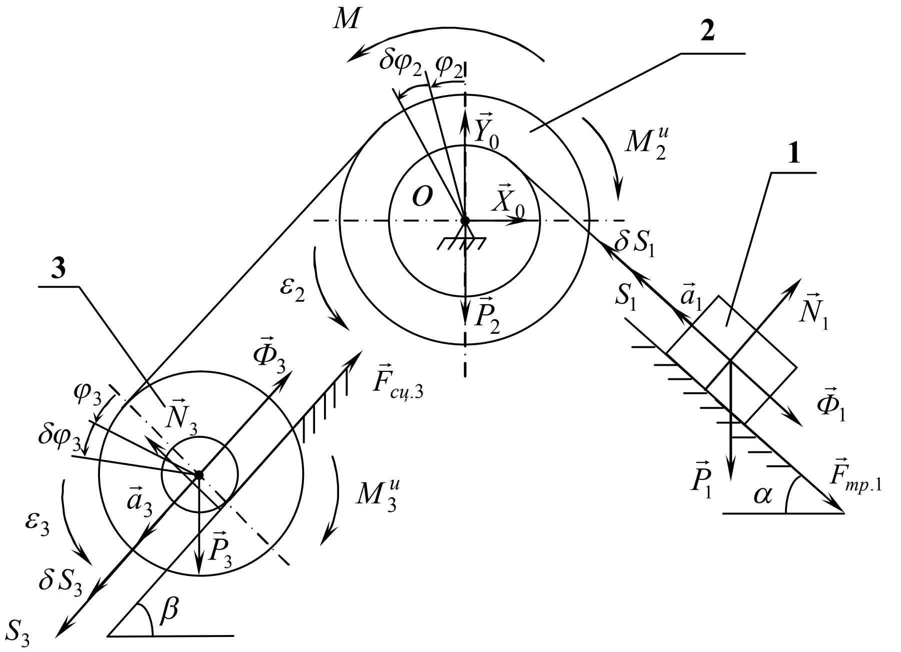


Рис. 20

Записывая выражения для работы активных сил, реакций связей и сил инерции на возможных перемещениях звеньев механизма и приравнивая сумму этих работ к нулю, составим общее уравнение динамики.

$$\sum \delta A_k^a + \sum A_k^r + \sum A_k^u = 0$$

$$-(\varPhi_1 + F_{тр.1}^{\max} + P_1 \sin\alpha)\delta S_1 + (M - M_2^u)\delta\varphi_2 +$$

$$+ (P_3 \sin\beta - \varPhi_3)\delta S_3 - (M_3^u + N_3\delta_3)\delta\varphi_3 = 0. \qquad (3.28)$$

Перепишем (3.28) с учетом значений сил, входящих в это уравнение:

$$-(m_1 a_1 + m_1 g f_1 \cos\alpha + m_1 g \sin\alpha)\delta S_1 + (M - m_2 i_2^2 \varepsilon_2)\delta\varphi_2 +$$

$$+(m_3 g \sin\beta - m_3 a_3)\delta S_3 - (m_3 i_3^2 \varepsilon_3 + m_3 g \delta_3 \cos\beta)\delta\varphi_3 = 0. \quad (3.29)$$

Подставим в (3.29) численные данные и кинематические уравнения связей (см. таблицу) и, решив относительно a_1, получим

$$a_1 = 0{,}13 \, {}^{м}\!/_{c^2}.$$

3.8. Уравнение Лагранжа 2-го рода

Составляя силовую расчетную схему (рис. 21), укажем на кинематической схеме механизма только активные силы и реакции связей, действующие на его звенья, и отметим возможные перемещения всех тел механизма. Эта схема отличается от схемы на рис. 20 отсутствием сил инерции.

Для описания движения данного механизма необходимо составить всего одно уравнение Лагранжа 2-го рода, так как механизм обладает одной степенью свободы. В качестве обобщенной координаты выберем S_1 поскольку необходимо определить ускорение тела 1, (т.е. a_1), тогда

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{S}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial S_1} = Q_1,$$

где Q_1 - обобщённая сила, соответствующая обобщенной координате S_1;

$\dot{S}_1 = V_1$ - обобщенная скорость;

T - кинетическая энергия механизма, выраженная через обобщенную скорость.

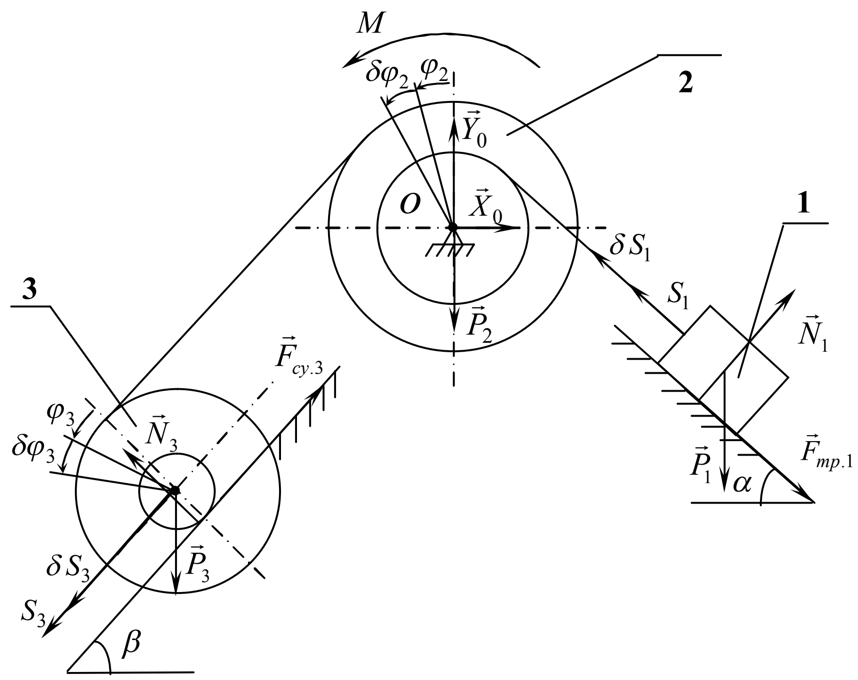


Рис. 21

Подобно тому, как это было в разделе 3.4, составим выражение для кинетической энергии T:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{I_0 \omega_2^2}{2} + \frac{m_3 V_3^2}{2} + \frac{I_3 \omega_3^2}{2}.$$

Окончательное значение T определиться формулой (3.12)

$$T = 6{,}37 V_1^2 = 6{,}37 \dot{S}_1^2 \ \textit{Дж}. \tag{3.31}$$

Вычислим первые два слагаемых, входящих в левую часть уравнения (3.30):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{S}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{S}_1}(6{,}37 \dot{S}_1^2) = 12{,}74 \dot{S}_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{S}_1}\right) = 12{,}74\ddot{S}_1 = 12{,}74a_1 \qquad (3.32)$$

$$\frac{\partial T}{\partial S_1} = 0, \qquad (3.33)$$

так как кинетическая энергия явно не зависит от обобщенной координаты.

Для определения обобщенной силы Q_1 найдем работу активных сил и реакций связей на возможном перемещении δS_1

$$\delta A = P_3\delta S_3 \sin\beta - N_3\delta_3\delta\varphi_3 + M\delta\varphi_2 - P_1\delta S_1 \sin\alpha - F_{mp}^{\max}\delta S_1 \quad (3.34)$$

Используя уравнения связей (см. таблицу), находим:

$$\delta S_3 = 0{,}429\delta S_1;$$

$$\delta\varphi_3 = 2{,}14\delta S_1;$$

$$\delta\varphi_2 = 2{,}5\delta S_1; \qquad (3.35)$$

Подставим (3.35) в (3.34) и с учетом, что

$$N_3 = m_3 g\cos\beta;\ \ F_{mp.}^{\max} = m_1 g f_1 \cos\alpha,$$

получим $\delta A = 1{,}66\delta S_1$.

С учетом выражения (2.20) имеем

$$Q = 1{,}66H.$$

Подставив (3.31), (3.32) и (3.35) в исходное уравнение (3.30), находим

$$a_1 = 0{,}13 \; м/с^2 .$$

Выводы о целесообразности использования каждого из шести способов при определении ускорений тел и реакций связей предоставляем возможность сделать читателю самостоятельно.

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Каковы дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела?
2. По какой формуле вычисляется кинетический момент твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси:
   а) относительно этой оси?
   б) относительно оси, ей параллельной?
3. Какой имеет вид дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси?
4. При каких условиях тело вращается вокруг неподвижной оси:
   а) ускоренно,
   б) равномерно,
   в) замедленно.
5. Мерой чего является момент инерции твердого тела относительно оси?
6. Сформулируйте теорему о зависимости между кинетическими моментами механической системы относительно неподвижного центра и относительно центра масс системы в векторной форме и в проекциях на оси координат.
7. Как формулируется теорема об изменении кинетического момента механической системы в относительном движении по отношению к центру масс в векторной форме и в проекциях на оси координат?
8. Каковы две меры механического движения и соответствующие им измерители действия силы?

9. Как определяется работа постоянной по модулю и по направлению силы на прямолинейном перемещении?
10. Чему равна работа силы трения скольжения, если эта сила постоянна по модулю и направлению?
11. Чему равна работа равнодействующей силы?
12. Какова сумма работ внутренних сил твердого тела на любом перемещении тела?
13. Как вычисляется сумма элементарных работ внешних сил, приложенных к твердому телу:
    а) в случае поступательного движения,
    в) в случае его вращения вокруг неподвижной оси?
14. Как вычисляется работа пары сил, приложенной к вращающемуся телу?
15. Что представляет собой сопротивление качению, что называется коэффициентом трения качения и какова его размерность?
16. В чем заключается разница между силой сцепления и силой трения?
17. Чем обусловлено появление трения скольжения, размерность коэффициента трения скольжения и от чего он зависит?
18. Что называется конусом трения и в чем его физический смысл?
19. Как вычисляется кинетическая энергия твердого тела в случае его:
    а) поступательного,
    б) вращательного,
    в) плоскопараллельного движения?
20. Как определить кинетический момент поступательно движущегося тела относительно неподвижной оси?
21. Что называют кинетическим моментом механической системы относительно центра или оси?
22. Сформулируйте теорему об изменении кинетического момента механической системы относительно центра и оси.
23. Как определить кинетический момент тела, совершающего плоскопараллельное движение относительно любой оси, перпендикулярной неподвижной плоскости?
24. В чем заключается сущность принципа Германа-Эйлера-Даламбера для механической системы?
25. Каким условиям удовлетворяют в любой момент времени главные векторы внешних задаваемых сил, реакций связей и

сил инерции точек несвободной механической системы и главные моменты этих сил относительно любого неподвижного центра?

26. Каковы модуль и направление главного вектора сил инерции механической системы?
27. К чему приводятся силы инерции точек твердого тела:
    а) при поступательном движении тела;
    б) при вращении тела, имеющего плоскость материальной симет рии, вокруг неподвижной оси, перпендикулярной к этой плос кости;
    в) плоском движении тела, имеющего плоскость материальной симметрии.
28. Какой вид имеет общее уравнение динамики?
29. Какая величина называется обобщенной силой, соответствующей некоторой обобщенной координате системы, и какую она имеет размерность?
30. Какой вид имеют уравнения Лагранжа второго рода? Чему равно число этих уравнений для каждой механической системы?
31. По каким формулам определяется обобщенная сила? Какое количество обобщенных сил определяется для каждой механической системы? Какую размерность они имеют?
32. Что такое обобщенная скорость и какую размерность она имеет?
33. Что представляют собой обобщенные координаты механическое системы?
34. Чему равно число степеней свободы механической системы?
35. Что называют возможными перемещениями механической системы?
36. Зависят ли возможные перемещения от действующих на систему сил?
37. Какие связи механической системы называют идеальными?
38. Почему связь, осуществленная с трением, не является идеальной связью?
39. Как формулируется принцип возможных перемещений?
40. Почему принцип возможных перемещений упрощает вывод условий равновесия сил, приложенных к несвободным системам, состоящим из большого числа тел?

41. При каком условии материальная точка при действии на нее нескольких сил будет двигаться прямолинейно и равномерно?
42. В чем состоит две основных задачи динамики точки?
43. Как определяется значение произвольных постоянных, появляющихся при интегрировании дифференциальных уравнений движения материальной точки?
44. Что называется количеством движения материальной точки?
45. Что называется элементарным импульсом силы?
46. Как направлен элементарный импульс силы?
47. В чем состоит теорема о количестве движения материальной точки?
48. Как направлен вектор-момент количества движения относительно данной точки?
49. Какая зависимость существует между моментами количества движения относительно данной точки и относительно оси, проходящей через эту точку?
50. Как выражается теорема о моменте количества движения материальной точки в векторной и координатной форме?
51. В каком случае момент количества движения материальной точки относительно данного центра остается постоянным?
52. Что называется механической системой материальных точек?
53. Какие две классификации сил, действующих на систему, применяются в динамике системы?
54. Что называется количеством движения системы?
55. В чем состоит теорема о количестве движения системы?
56. В каком случае количество движения системы останется постоянным?
57. Какая точка называется центром масс (центром инерции) системы?
58. Как выражается количество движения системы через количество движения центра масс?
59. В чем состоит теорема о движении центра масс системы?
60. Какие силы, действующие на систему, не влияют на движение ее центра масс?

Библиографический список

Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. М.: Высшая школа, 1998 (и последующие издания).

Никитин Н. Н. Курс теоретической механики. М.: Высшая школа, 1990 (и последующие издания).

Бутенин Н. В. Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики. СПб.: Лань, 2002 (и последующие издания).

Яблонский А. А. Курс теоретической механики. М.: Лань, 1998 (и последующие издания).

Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю. Кельзон А. С. Теоретическая механика в примерах и задачах СПб.: Политехника, 1995 (и последующие издания).

Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике СПб.: Лань, 1998 (и последующие издания).

Сборник задач по теоретической механике /под. ред. А. А. Яблонского СПб.: Лань, 2001 (и последующие издания).

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Головко Виктор Евгеньевич
Кузнецова Наталья Владимировна
Лазарев Юрий Николаевич
Петров Сергей Гаррикович
Ютелис Альгис Викторович

Азарова Эльвира Владимировна

Динамическое исследование механической системы

Учебно-методическое пособие

Редактор и корректор Т.А. Смирнова
Техн. редактор Л.Я. Титова

Подп. к печати 12.01.09. Формат бумаги 60x84/16. Бумага тип № 1.
Печать офсетная . Печ. л. 3,75 Уч. –изд. л. 3,75
Изд. №147. Тираж 100 экз. Цена "С" 76 Заказ 1855

Ризограф ГОУВПО Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров. 198095, Санкт-Петербург,
ул. Ивана Черных, д. 4.