Министерство образования и науки Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

Санкт-Петербургский государственный технологический университет растительных полимеров

ДИНАМИКА

Примеры решения задач

для самостоятельной работы студентов

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург

2010

УДК 531.1(0.75)+681.3.06(0.75)

Динамика. Примеры решения задач для самостоятельной работы студентов: учебно-методическое пособие / сост.: Н.В.Кузнецова, М.В. Саблина, В.Е. Головко, С.Г.Петров, Д.В. Калинин / ГОУВПО СПбГТУРП. - СПб., 2010. – 19 с.

В настоящем учебно-методическом пособии приводятся примеры решения задач по теоретической механике по разделу «Динамика». В начале пособия кратко изложены основные теоретические положения, необходимые для решения каждой задачи, указывается, как используется то или иное теоретическое положение.

Предназначено для студентов всех специальностей.

Рецензент: канд. техн. наук, доцент кафедры процессов и аппаратов химической технологии Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров Ю.А.Тихонов.

Подготовлено и рекомендовано к печати кафедрой теоретической механики и теории механизмов и машин Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров (протокол № 7 от 4 мая 2010).

Утверждено к изданию методической комиссией факультета механики автоматизированных производств СПбГТУРП (протокол №6 от 5 мая 2010).

Введение

Настоящее учебно-методическое пособие предназначено в помощь студентам при самостоятельном изучении раздела «Динамика» курса теоретической механики.

Динамика – это наиболее общий раздел теоретической механики. В этом разделе изучаются общие законы движения тел с учетом их массы и действующих на них сил.

В пособии кратко изложены основные теоретические положения динамики.

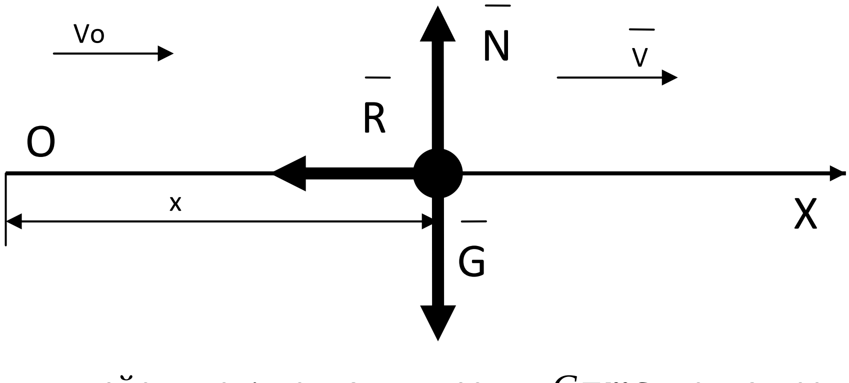
Затем приводятся решения задач, при этом поясняется, какие теоретические положения используются при решении той или иной задачи.

Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки, находящейся под действием переменных сил

Задача №1

Материальная точка массы m движется из начала координат вдоль горизонтальной оси OX, имея начальную скорость v_0. Сила сопротивления движению точки $R=kv^2$. Определить закон движения точки.

Решение:



На точку действуют: сила тяжести $G=mg$, сила сопротивления R и нормальная реакция N. Дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось OX имеет вид:

$$m\frac{dv}{dt} = -R = -kv^2 .$$

Разделим переменные в дифференциальном уравнении и, интегрируя его, найдем:

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m}\int_0^t dt ;$$

$$-\frac{1}{v}\bigg|_{v_0}^{v} = -\frac{kt}{m} ; \ \frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + \frac{kt}{m} ;$$

$$v = \frac{mv_0}{m + kv_0 t} .$$

Запишем левую часть равенства: $v = \dfrac{dx}{dt}$; $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{mv_0}{m + kv_0 t}$.

Разделив переменные в последнем равенстве и интегрируя его, найдем закон движения точки:

$$\int_0^x dx = mv_0\int_0^t \frac{dt}{m + kv_0 t} ;$$

получаем: $x = mv_0 \dfrac{1}{kv_0}\ln(m + kv_0 t)\Big|_0^t$.

Окончательно получаем: $x = \dfrac{m}{k}\left[\ln(m + kv_0 t) - \ln m\right] = \dfrac{m}{k}\ln\dfrac{m + kv_0 t}{m}$ (м).

Ответ: $x = \dfrac{m}{k}\ln\dfrac{m + kv_0 t}{m}$ (м).

Исследование вращательного движения твердого тела

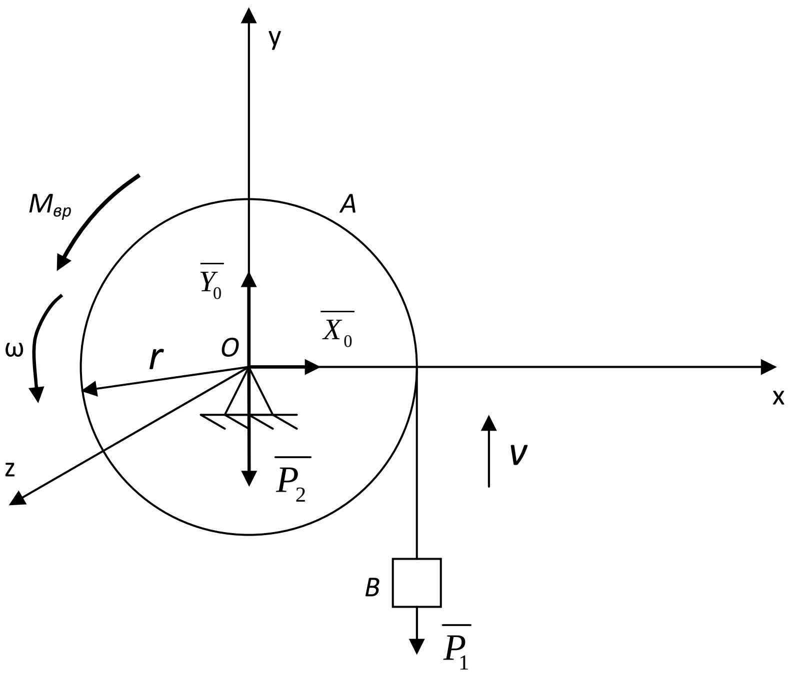
Задача №2

При пуске в ход электрической лебедки к барабану*A* приложен вращательный момент $M_{вр}=at$, где a – постоянная, груз *B* массой

m_1поднимается посредством каната, навитого на барабан A радиуса r и массой m_2.

Определить угловую скорость барабана, считая его сплошным цилиндром. В начальный момент лебедка находилась в покое.

Решение:



Рассматриваем систему, состоящую из барабана, лебедки, нити, груза. На систему действуют активные внешние силы: $P_1=m_1g$, $P_2=m_2g$ и реакции подшипников $\overline{X_0}$, $\overline{Y_0}$.

Составляем уравнения по теореме об изменении кинетического момента относительно оси Z:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_{i=1}^{n} M_{iz}^{E} . \qquad \text{(a)}$$

Найдем величины, входящие в равенство (а).

Определим кинетический момент поступательного движения грузаB:

$$L_{1z} = m_1 v r = m_1 \omega r^2 .$$

Кинетический момент вращающегося барабанаA:

$$L_{2z} = I_z \omega = \frac{m_2 \omega r^2}{2} .$$

Кинетический момент всей системы:

$$L_z = L_{1z} + L_{2z} = \frac{\omega r^2}{2}(2m_1 + m_2) \quad . \qquad (б)$$

Определим сумму моментов внешних сил:

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iz}^E = M_{вр} - P_1 r = at - m_1 gr \, . \qquad (в)$$

Подставив значения (б) и (в) в (а), получим:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\omega r^2}{2}(2m_1 + m_2)\right] = at - m_1 gr \; . \qquad (г)$$

Дифференцируя левую часть равенства (г), получим:

$$\frac{r^2}{2}(2m_1 + m_2)\frac{d\omega}{dt} = at - m_1 gr \; . \qquad (д)$$

Определяем угловую скорость барабана. Разделив переменные и интегрируя (д), получим:

$$\frac{r^2}{2}(2m_1 + m_2)\int_0^{\omega} d\omega = a\int_0^{t} t dt - m_1 gr\int_0^{t} dt \; ,$$

$$\frac{r^2}{2}(2m_1 + m_2)\omega = \frac{at^2}{2} - m_1 grt \; .$$

Откуда $\omega = \dfrac{(at - 2m_1 gr)t}{r^2(2m_1 + m_2)}$ (с$^{-1}$).

Ответ: $\omega = \dfrac{(at - 2m_1 gr)t}{r^2(2m_1 + m_2)}$ (с$^{-1}$).

Теорема об изменении количества движения механической системы в ее применении к сплошной среде

Задача №3

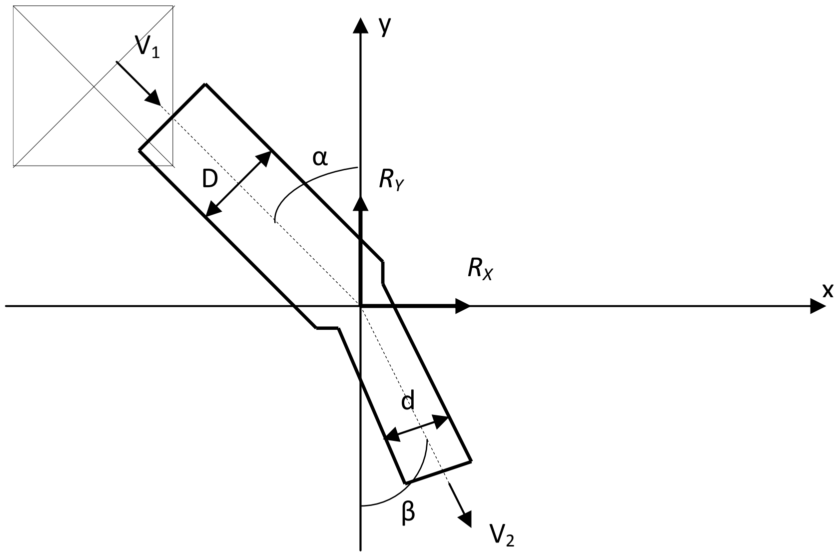
Вода входит в неподвижный канал переменного сечения, симметричного относительно горизонтальной плоскости, со скоростью v_1под углом α. Скорость воды у выхода из канала v_2 и направлена под углом β.

Определить модуль составляющей силы R, с которой вода действует на стенку канала.

Дано: v_1, D, d, α, β.

Определить: R_Xили R_Y.

Решение:



При установившемся движении масса жидкости, протекающей в единицу времени через любое сечение трубы, постоянна и равна:

$$m = \rho v_1 F_1 = \rho v_2 F_2 \text{, где } F_1 = \frac{\pi D^2}{4},\ F_2 = \frac{\pi d^2}{4}.$$

$$\text{Откуда } v_2 = \frac{\rho v_1 F_1}{\rho F_2} = \frac{v_1 D^2}{d^2}.$$

Силы тяжести текущей по трубе жидкости перпендикулярны горизонтальной плоскости. Реакция стенок трубы расположена в горизонтальной плоскости.

Применим теорему импульсов к движению жидкости в трубе. За промежуток времени τ получим:

$$m\overline{v_2}\tau - m\overline{v_1}\tau = \overline{R}\tau. \qquad (*)$$

Спроецируем равенство (*) на ось X:

$$mv_2\tau\sin\beta - mv_1\tau\sin\alpha = R_X\tau,$$

откуда $R_X = mv_2\sin\beta - mv_1\sin\alpha = \rho v_1\frac{\pi D^2}{4}\frac{v_1 D^2}{d^2}\sin\beta - \rho v_1\frac{\pi D^2}{4}v_1\sin\alpha =$

$$= \rho\frac{\pi D^2}{4}v_1^2\left(\frac{D^2}{d^2}\sin\beta - \sin\alpha\right).$$

Спроецируем равенство (*) на ось Y:

$$-mv_2\tau\cos\beta + mv_1\tau\cos\alpha = R_Y\tau,$$

откуда $R_Y = -mv_2\cos\beta + mv_1\cos\alpha = -\rho v_1\frac{\pi D^2}{4}\frac{v_1 D^2}{d^2}\cos\beta + \rho v_1\frac{\pi D^2}{4}v_1\cos\alpha =$

$$= \rho\frac{\pi D^2}{4}v_1^2\left(-\frac{D^2}{d^2}\cos\beta + \cos\alpha\right).$$

Если требуется определить составляющую R_X, то уравнение (*) проецируется на ось X. Если надо определить R_Y, то уравнение (*) проецируется на ось Y,

Модуль силы $R = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2}$.

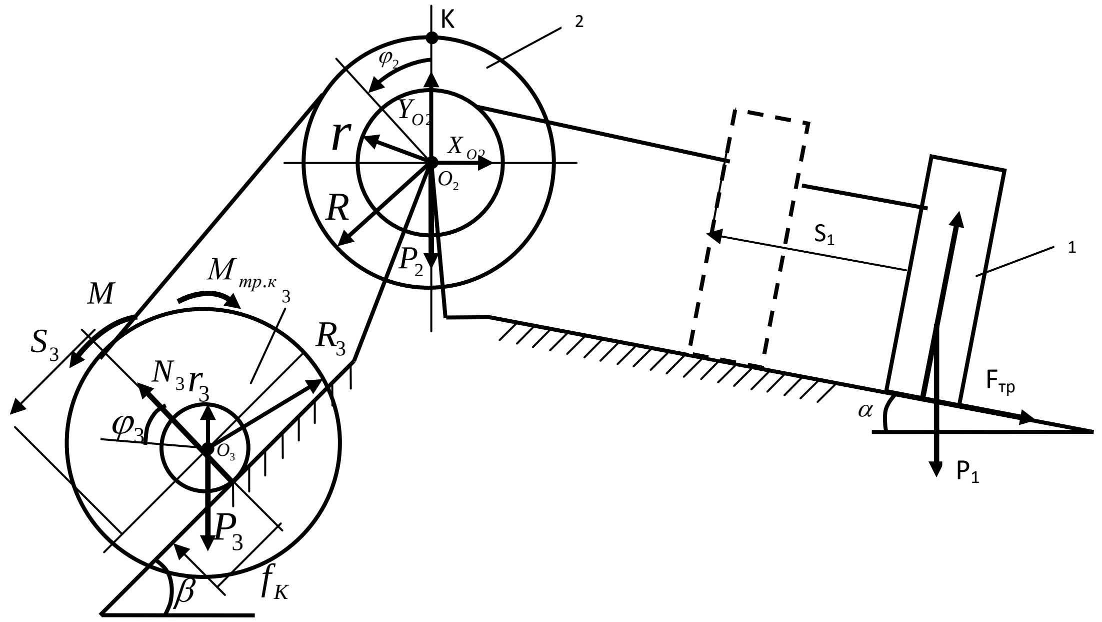
Ответ: $R_X = \rho \dfrac{\pi D^2}{4} v_1^2 (\dfrac{D^2}{d^2} \sin\beta - \sin\alpha)$, $R_Y = \rho \dfrac{\pi D^2}{4} v_1^2 (-\dfrac{D^2}{d^2} \cos\beta + \cos\alpha)$.

Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы

Задача №4

Для заданной механической системы определить $v_1=f(s_1)$. Считать, что у блоков и катков массы распределены по наружному радиусу. Массами нитей пренебречь, нити предполагая их нерастяжимыми. Принять, что движение начинается из состояния покоя. В задании принять следующие обозначения: m_1, m_2, m_3 – массы тел; R и r - радиусы больших и малых окружностей; $f_{тр}$=0,2 – коэффициент трения скольжения; $f_к$=0,3 – коэффициент трения качения. Проскальзывание отсутствует.

Решение:



Рассмотрим механическую систему, состоящую из груза 1, движущегося поступательно, блока 2, совершающего вращательное движение и катка 3, совершающего плоское движение.

Применим к рассматриваемой системе теорему об изменении кинетической энергии механической системы в конечной форме:

$$T_{II} - T_I = \sum_{i=1}^{n} A_i^E ,$$

где T_I - кинетическая энергия начального положения системы, T_{II} - кинетическая энергия конечного положения системы.

Движение системы началось из состояния покоя. Поэтому:

$$T_I = 0;$$

$$T_{II} = \sum_{i=1}^{n} A_i^E .$$

Определим кинетическую энергию механизма в положении II.

При решении подобных задач рекомендуется линейные и угловые скорости всех тел системы выразить через искомую скорость, а перемещения линейные и угловые – через заданное перемещение.

$$T_{II} = T_1 + T_2 + T_3.$$

Груз 1 совершает поступательное движение: $T_1 = \dfrac{m_1 v_1^2}{2}.$

Блок 2 совершает вращательное движение: $T_2 = \dfrac{I_Z \omega_2^2}{2}$, где I_Z - момент инерции блока относительно оси вращения. В данной задаче масса блока распределена по наружному радиусу, поэтому $I_Z = m_2 R_2^2.$

Выразим угловую скорость блока 2 через скорость груза 1: $\omega_2 = \dfrac{v_1}{r_2}$.

Получим: $T_2 = \dfrac{m_2 R_2^2}{2 r_2^2} v_1^2.$

Каток 3 совершает плоскопараллельное движение. Для него кинетическая энергия вычисляется по формуле: $T_3 = \dfrac{m_3 v_{03}^2}{2} + \dfrac{I_{Z3} \omega_3^2}{2}$,

где $I_{Z3} = m_3 R_3^2$ (масса катка также распределена по наружному радиусу).

Так как нити нерастяжимы, скорости точекK и N равны:

$$v_K = v_N = \omega_2 R_2 = \omega_3 (R_3 + r_3),$$

отсюда $\omega_3 = \dfrac{\omega_2 R_2}{\omega_3 (R_3 + r_3)}$.

Выразим угловую скорость катка 3 через скорость груза 1: $\omega_3 = \dfrac{v_1 R_2}{r_2(R_3 + r_3)}$.

Скорость центра масс катка v_{03} также выразим через скорость груза 1:

$$v_{03} = \omega_3 r_3 = v_1 \frac{r_3 R_2}{r_2(R_3 + r_3)}.$$

Итого получим: $T_3 = \dfrac{m_3 R_2^2 r_3^2}{2r_2^2(R_3 + r_3)^2} v_1^2 + \dfrac{m_3 R_3^2 R_2^2}{2r_2^2(R_3 + r_3)^2} v_1^2 = \dfrac{m_3 R_2^2 (r_3^2 + R_3^2)}{2r_2^2(R_3 + r_3)^2} v_1^2.$

Кинетическая энергия всей системы:

$$T_{II} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 R_2^2}{2r_2^2} v_1^2 + \frac{m_3 R_2^2 (r_3^2 + R_3^2)}{2r_2^2(R_3 + r_3)^2} v_1^2 =$$

$$= \frac{v_1^2}{2}\left[m_1 + \frac{m_2 R_2^2}{r_2^2} + \frac{m_3 R_2^2 (r_3^2 + R_3^2)}{r_2^2(R_3 + r_3)^2} \right].$$

Сумма работ внешних сил складывается из:

- работы силы тяжести и силы трения скольжения при движении тела 1 вверх:

$$A_1 = -m_1 g \sin\alpha S_1 - f_{TP} m_1 g \cos\alpha S_1 = -m_1 g S_1 (\sin\alpha + f_{TP}\cos\alpha).$$

- работы сил при качении катка 3 вниз, силы тяжести и моментов M и M_{TPK}:

$$A_3 = m_3 g \sin\beta S_3 - f_{TPK} m_3 g \cos\beta S_3 + M\varphi_3.$$

Выразим перемещение катка 3 через перемещение груза 1, используя кинематические соотношения:

$$\varphi_2 = \frac{S_1}{r_2}; \qquad \varphi_3 = \frac{\varphi_2 R_2}{R_3 + r_3} = \frac{S_1 R_2}{r_2(R_3 + r_3)}; \qquad S_3 = \varphi_3 r_3 = \frac{S_1 R_2 r_3}{r_2(R_3 + r_3)}.$$

Получим: $A_3 = \dfrac{S_1 R_2}{r_2(R_3 + r_3)}\left[m_3 g r_3 (\sin\beta - f_{TPK}\cos\beta) + M \right].$

Сумма работ внешних сил:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i^E = -m_1 g S_1 (\sin\alpha + f_{TP}\cos\alpha) + \frac{S_1 R_2}{r_2(R_3 + r_3)}\left[m_3 g r_3 (\sin\beta - f_{TPK}\cos\beta) + M \right].$$

По теореме об изменении кинетической энергии:

$$\frac{v_1^2}{2}\left[m_1 + \frac{m_2 R_2^2}{r_2^2} + \frac{m_3 R_2^2 (r_3^2 + R_3^2)}{r_2^2(R_3 + r_3)^2} \right] = -m_1 g S_1 (\sin\alpha + f_{TP}\cos\alpha) +$$

$$+\frac{S_1R_2}{r_2(R_3+r_3)}\left[m_3gr_3(\sin\beta - f_{ТРК}\cos\beta)+M\right].$$

Отсюда найдем искомую скорость груза 1:

$$v_1=\sqrt{2\frac{-m_1gS_1(\sin\alpha+f_{ТР}\cos\alpha)+\dfrac{S_1R_2}{r_2(R_3+r_3)}\left[m_3gr_3(\sin\beta - f_{ТРК}\cos\beta)+M\right]}{m_1+\dfrac{m_2R_2^2}{r_2^2}+\dfrac{m_3R_2^2(r_3^2+R_3^2)}{r_2^2(R_3+r_3)^2}}}.$$

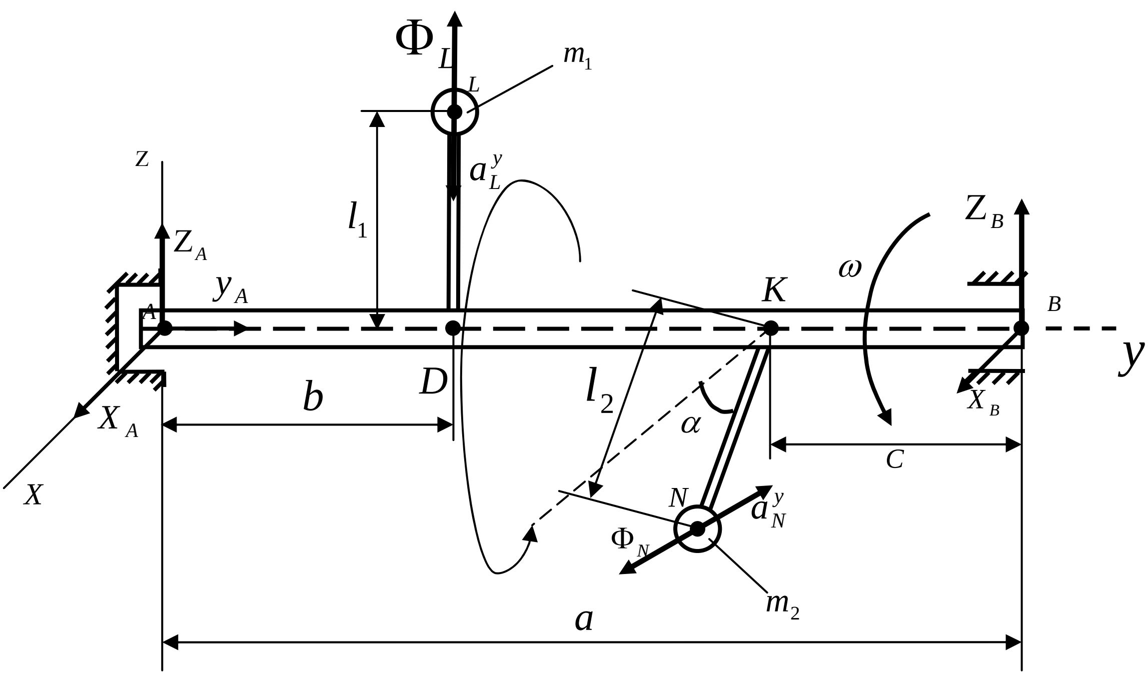
Ответ: $v_1=\sqrt{2\dfrac{-m_1gS_1(\sin\alpha+f_{ТР}\cos\alpha)+\dfrac{S_1R_2}{r_2(R_3+r_3)}\left[m_3gr_3(\sin\beta - f_{ТРК}\cos\beta)+M\right]}{m_1+\dfrac{m_2R_2^2}{r_2^2}+\dfrac{m_3R_2^2(r_3^2+R_3^2)}{r_2^2(R_3+r_3)^2}}}$.

Применение принципа Даламбера к определению опор вращающегося тела

Задача №5

Определить динамические реакции опор твердого тела, вращающегося равномерно вокруг неподвижной оси *AB* с угловой скоростью ω. Стержни *AB*, *NK*, *DL*. На концах стержней *NK* и *DL* сосредоточены точечные массы соответственно m_1 и m_2. Даны расстояния *a*, *b*, *c*, l_1, l_2.

Решение:



Динамические реакции возникают под действием сил инерции, причиной которых являются ускорения.

Точечные массы L и N движутся по окружностям, расположенным в плоскостях, перпендикулярных к оси вращения.

Так как вращение равномерное, точки L и N имеют только центростремительные ускорения, направленные по радиусам соответствующих окружностей, перпендикулярно к оси вращения: $a_L^ц = \omega^2 l_1;\ a_N^ц = \omega^2 l_2 \cos\alpha$.

Силы инерции масс m_1 и m_2: $\Phi_L = m_1\omega^2 l_1;\ \Phi_N = m_2\omega^2 l_2 \cos\alpha$ (направлены противоположно ускорениям $a_L^ц$ и $a_N^ц$ соответственно).

Запишем принцип Даламбера для отыскания неизвестных реакций в проекциях на координатные оси, которые введены так, как показано на рис.2:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0;\quad X_A + X_B + \Phi_N = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0;\quad Y_A = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{iz} = 0;\quad Z_A + Z_B + \Phi_L = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{ix} = 0;\quad \Phi_L b + Z_B a = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iy} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iz} = 0;\quad -X_B a - \Phi_N (a - c + l_2 \sin\alpha) = 0.$$

Из которых получим:

$$X_B = -\frac{\Phi_N (a - c + l_2 \sin\alpha)}{a} = -\frac{m_2\omega^2 l_2 \cos\alpha (a - c + l_2 \sin\alpha)}{a};$$

$$X_A = -X_B - \Phi_N = \frac{m_2\omega^2 l_2 \cos\alpha (a - c + l_2 \sin\alpha)}{a} - m_2\omega^2 l_2 \cos\alpha =$$

$$= \frac{m_2\omega^2 l_2 \cos\alpha}{a}(l_2 \sin\alpha - c);$$

$$Z_B = -\frac{\Phi_L b}{a} = -\frac{m_1\omega^2 l_1 b}{a};$$

$$Z_A = -Z_B - \Phi_L = \frac{m_1\omega^2 l_1 b}{a} - m_1\omega^2 l_1 = \frac{m_1\omega^2 l_1}{a}(b - a).$$

Ответ: $X_A = \dfrac{m_2\omega^2 l_2 \cos\alpha}{a}(l_2 \sin\alpha - c);$

$$X_B = -\frac{m_2\omega^2 l_2 \cos\alpha(a - c + l_2 \sin\alpha)}{a};$$

$$Z_A = \frac{m_1\omega^2 l_1}{a}(b - a);$$

$$Z_B = -\frac{m_1\omega^2 l_1 b}{a};$$

$$Y_A = 0.$$

Применение принципа возможных перемещений к исследованию равновесия механической системы

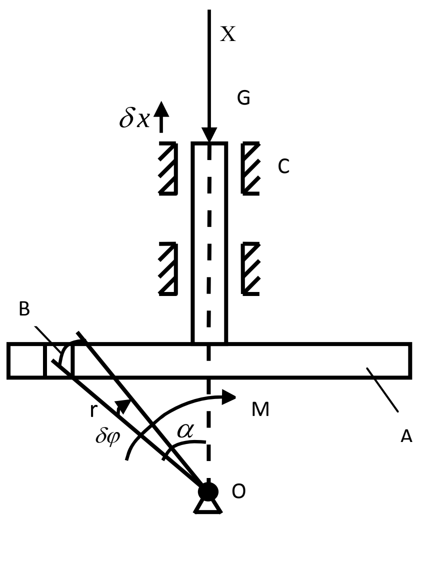
Задача №6

Определить область значений вращающего момента *M* или силы *P*, при которых заданная система находится в равновесии.
Дано: *G*, *r*, *α*.
Найти: *M*.

Решение:

Система находится в равновесии под действием силы *G* и момента *M*.
Придадим системе бесконечно малые возможные перемещения $\delta\varphi$ и δx.
При повороте кривошипа *OB* на бесконечно малый угол $\delta\varphi$ точка*B* переместится по окружности BB_1. С точностью до величин первого порядка малости перемещение точки по дуге можно заменить прямолинейным перемещением, отложенным по касательной к траектории точки*B*:

$$BB_1 = \delta S = r\delta\varphi.$$



Из треугольника BB_1K :

$$\delta x = BB_1 \sin\alpha; \quad \delta x = r\delta\varphi \sin\alpha.$$

Составим уравнение работ при перемещении системы из положения равновесия на возможные перемещения $\delta\varphi$ и δx:

$$M\delta\varphi - G\delta x = 0;$$

$$M\delta\varphi - Gr\delta\varphi \sin\alpha = 0;$$

$$M = Gr\sin\alpha.$$

Отсюда область значений вращающего момента:

$M_{\max} = Gr$ при $\sin\alpha = 1,\ \alpha = 90^\circ$.

$M_{\min} = 0$ при $\sin\alpha = 0,\ \alpha = 0$.

Ответ: $M_{\max} = Gr$ при $\sin\alpha = 1,\ \alpha = 90^\circ$.

$M_{\min} = 0$ при $\sin\alpha = 0,\ \alpha = 0$.

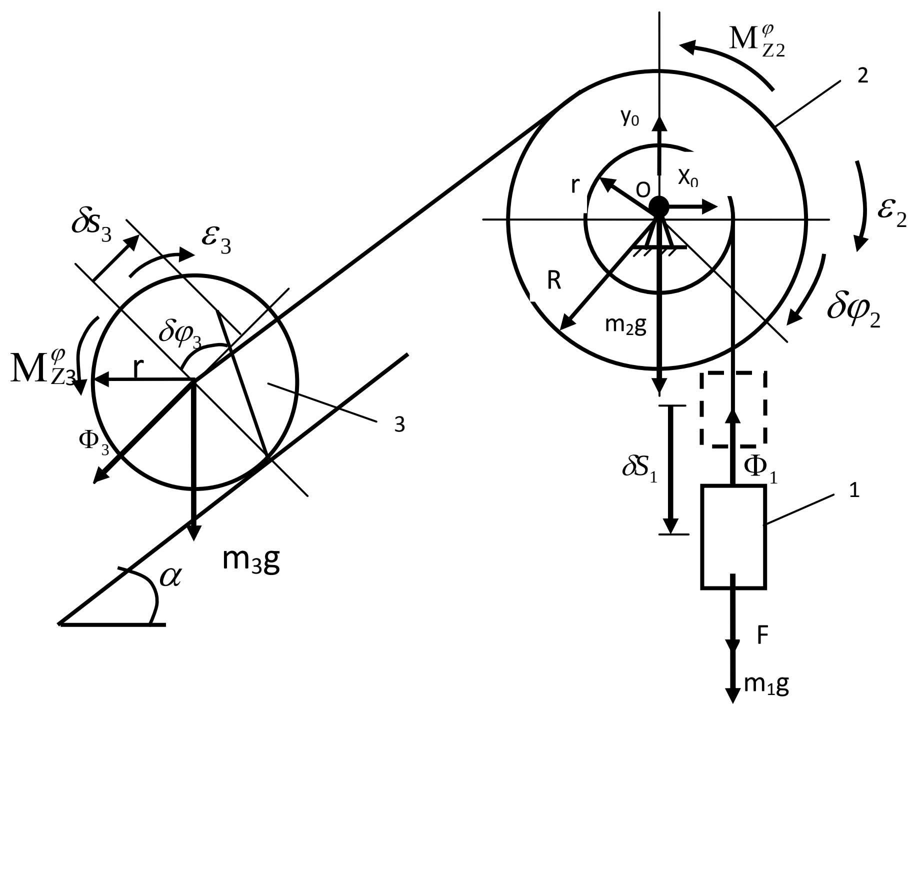
Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы

Задача №7

Для механической системы определить линейное ускорение a_1 или угловое ускорение ε_2. Считать, что у блоков и катков массы распределены по наружному радиусу. Тросы и ремни считать невесомыми и нерастяжимыми, проскальзывание отсутствует. Трением качения и трением скольжения пренебречь.

Дано: m_1, m_2, m_3 - массы тел, R и r - радиусы больших и малых окружностей.

Решение:



Система состоит из груза 1, блока 2 и катка 3.

На груз 1 действует сила F, сила тяжести $m_1 g$ и сила инерции $\Phi_1 = m_1 a_1$. Груз 1 опускается вниз.

На блок 2 действует момент от сил инерции $M_{Z_2}^{\Phi} = I_{Z_2}\varepsilon_2$, где $I_{Z_2} = m_2 R^2$ - момент инерции блока 2 относительно оси вращения. Выразим угловое ускорение ε_2 и момент $M_{Z_2}^{\Phi}$ через искомое линейное ускорение груза 1 a_1:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_1}{r};\ M_{Z_2}^{\Phi} = m_2 R^2 \frac{a_1}{r}.$$

На каток 3 действует сила тяжести $m_3 g$, сила инерции $\Phi_3 = m_3 a_3$ и момент от сил инерции $M_{Z_3}^{\Phi} = I_{Z_3}\varepsilon_3$, где $I_{Z_3} = m_3 r^2$. Выразим угловое ускорение ε_3, силу Φ_3 и момент $M_{Z_3}^{\Phi}$ через искомое линейное ускорение груза 1 a_1:

$$\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_2 R}{r} = \frac{a_1 R}{r^2};\ a_3 = \varepsilon_3 R = \frac{a_1}{r} R = a_1 \frac{R}{r};\ \Phi_3 = m_3 a_1 \frac{R}{r},\ M_{Z_3}^{\Phi} = m_3 r^2 \frac{a_1 R}{r^2} = m_3 a_1 R.$$

Придадим системе возможные перемещения: δS_1, $\delta\varphi_1 = \frac{\delta S_1}{r}$,

$$\delta S_3 = \delta\varphi_2 R = \frac{\delta S_1 R}{r},\ \delta\varphi_3 = \frac{\delta S_3}{r} = \frac{\delta S_1 R}{r^2}.$$

Составим уравнения работ:

$$F\delta S_1 + m_1 g\delta S_1 - \Phi_1 \delta S_1 - M_{Z_2}^{\Phi}\delta\varphi_2 - m_3 g\delta S_3 \sin\alpha - \Phi_3 \delta S_3 - M_{Z_3}^{\Phi}\delta\varphi_3 = 0;$$

$$F\delta S_1 + m_1 g\delta S_1 - m_1 a_1 \delta S_1 - m_2 a_1 \frac{R^2}{r^2}\delta S_1 - m_3 g\delta S_1 \frac{R}{r}\sin\alpha - m_3 a_3 \delta S_1 \frac{R^2}{r^2} - m_3 a_1 \frac{R^2}{r^2}\delta S_1 = 0.$$

После преобразования:

$$F + m_1 g - m_3 g \frac{R}{r}\sin\alpha = a_1\left(m_1 + m_2 \frac{R^2}{r^2} + m_3 \frac{R^2}{r^2} + m_3 \frac{R^2}{r^2}\right);$$

$$a_1 = \frac{F + m_1 g - m_3 g \frac{R}{r}\sin\alpha}{m_1 + m_2 \frac{R^2}{r^2} + 2m_3 \frac{R^2}{r^2}}; \qquad \varepsilon_2 = \frac{a_1}{r}.$$

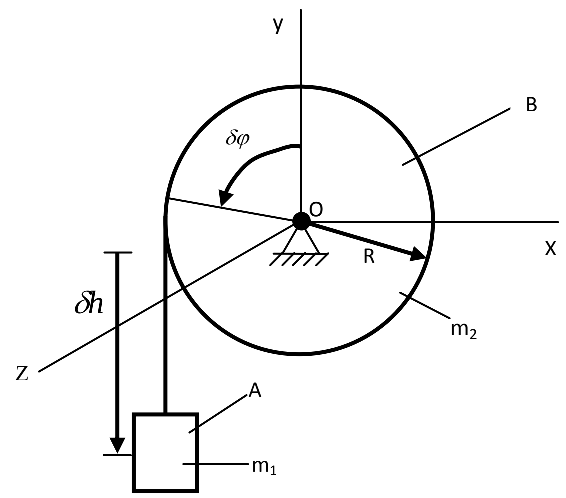
Ответ: $a_1 = \dfrac{F + m_1 g - m_3 g \frac{R}{r}\sin\alpha}{m_1 + m_2 \frac{R^2}{r^2} + 2m_3 \frac{R^2}{r^2}};\ \varepsilon_2 = \dfrac{a_1}{r}.$

Решение задачи с помощью различных методов теоретической механики

Задача №8

Определить ускорение груза A массой m_1, опускающегося под действием собственного веса, если барабан B – полый цилиндр массой m_2 и радиуса R.

Решение:



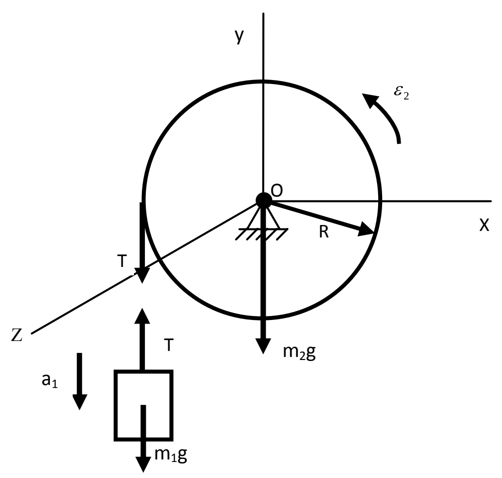
Механическая система состоит из двух тел: груза A, совершающего поступательное движение, и барабана B, совершающего вращательное движение.

Связь между перемещениями: $\delta h = R\delta\varphi$.

Зависимость между скоростями и ускорениями: $v_1 = R\omega_2$, $a_1 = R\varepsilon_2$.

1. Дифференциальные уравнения поступательного и вращательного движения.

Расчленим систему на отдельные тела и рассмотрим движение каждого тела отдельно.



Тело 1 движется поступательно вдоль оси y. Силы, действующие на тело 1 – сила тяжести m_1g и сила натяжения нити T. Составим дифференциальное уравнение движения тела 1 в проекции на ось y:

$$-m_1a_1 = T - m_1g\,,$$

$$T = m_1g - m_1a_1.$$

Тело 2 вращается вокруг неподвижной оси z, перпендикулярной к плоскости чертежа. На тело 2 действует сила тяжести m_2g и сила натяжения нити T. Дифференциальное уравнение вращательного движения в проекции на ось z:

$$I_z \varepsilon_2 = TR,$$

где I_z - момент инерции тела 2 относительно оси z, для полого цилиндра вычисляется по формуле: $I_z = m_2 R^2$.

Выразим угловое ускорение ε_2 через линейное ускорение тела 1: $\varepsilon_2 = \dfrac{a_1}{R}$.

Получим: $m_2 a_1 = T$.

Подставим найденное значение силы натяжения нити T в дифференциальное уравнение для тела 1:

$$m_2 a_1 = m_1 g - m_1 a_1,$$

отсюда $a_1 = \dfrac{m_1 g}{m_1 + m_2}$.

2. Теорема об изменении кинетической энергии.

$$T_{II} - T_I = \sum_{i=1}^{n} A_i^E .$$

Так как в начальный момент времени система находилась в покое, то

$$T_I = 0;$$

$$T_{II} = \sum_{i=1}^{n} A_i^E .$$

Кинетическая энергия системы в конечный момент времени:

$$T_{II} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{I_Z \omega_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{1}{2} m_2 R^2 \frac{v_1^2}{R^2} = \frac{v_1^2}{2}\left(m_1 + m_2\right).$$

Сумма работ всех внешних сил: $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i^E = m_1 g \delta S$.

По теореме об изменении кинетической энергии получим:

$$\frac{v_1^2}{2}\left(m_1 + m_2\right) = m_1 g \delta S ,$$

$$v_1^2 = \frac{2 m_1 g \delta S}{m_1 + m_2}.$$

Продифференцируем это выражение по времени:

$$2 v_1 a_1 = \frac{2 m_1 g}{m_1 + m_2} v_1,$$

$$a_1 = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2}.$$

3. Теорема об изменении кинетического момента.

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_{i=1}^{n} M_{iz}^{E}\ .$$

Кинетический момент системы относительно оси z:

$$L_z = m_1 v_1 R + I_z \omega_2 = m_1 v_1 R + m_2 R^2 \frac{v_1}{R} = v_1 R\left(m_1 + m_2\right).$$

Моменты всех внешних сил относительно оси z:

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iz}^{E} = m_1 g R.$$

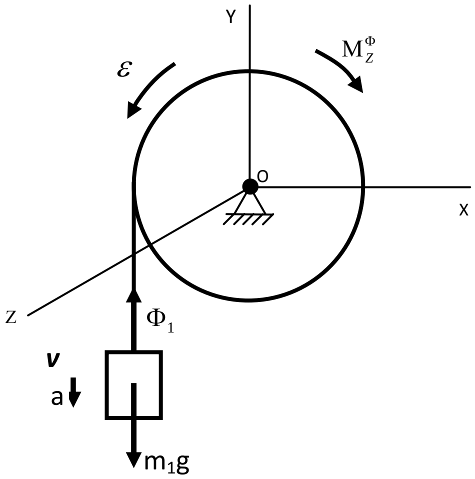
Получим:

$$\frac{d}{dt}\left[v_1 R\left(m_1 + m_2\right)\right] = m_1 g R,$$

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{m_1 g R}{R\left(m_1 + m_2\right)},$$

$$a_1 = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2}.$$

4. Принцип Даламбера.



Силы инерции и моменты от сил инерции:

$$\Phi_1 = m_1 a_1,\ M_Z^{\Phi} = I_Z \varepsilon_2 = m_2 R^2 \frac{a_1}{R} = m_2 R a_1.$$

Сумма моментов внешних сил и сил инерции относительно точкиO:

$$m_1 g R - m_1 a_1 R - m_2 a_1 R = 0,$$

$$a_1 = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2}.$$

5. Общее уравнение динамики.

Сумма работ задаваемых сил и сил инерции на возможном перемещении:

$$m_1 g \delta S - m_1 a_1 \delta S - M_Z^{\Phi} \delta\varphi = 0,$$

$$M_Z^{\Phi} = m_2 R a_1,\ \delta\varphi = \frac{\delta S}{R},$$

$$m_1 g \delta S - m_1 a_1 \delta S - m_2 R a_1 \frac{\delta S}{R} = 0,$$

$$a_1 = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2}.$$

6. Уравнение Лагранжа II-го рода.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q.$$

x - обобщенная координата, $\dot{x} = v_1$, Q - обобщенная сила, $Q = m_1 g$.

Кинетическая энергия T:

$$T = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{I_Z \omega_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{1}{2} m_2 R^2 \frac{v_1^2}{R^2} = \frac{v_1^2}{2}\left(m_1 + m_2\right).$$

$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$ - кинетическая энергия не зависит от обобщенной координаты.

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left[\frac{v_1^2}{2}\left(m_1 + m_2\right)\right] = \left(m_1 + m_2\right)\dot{x},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}\left[\left(m_1 + m_2\right)\dot{x}\right] = \left(m_1 + m_2\right)\ddot{x} = \left(m_1 + m_2\right)a_1,$$

подставляя в уравнение Лагранжа II-го рода, получим:

$$\left(m_1 + m_2\right)a_1 = m_1 g,$$

$$a_1 = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2}.$$

Ответ: $a_1 = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2}$.

Учебное издание

Кузнецова Наталья Владимировна

Саблина Маргарита Владимировна

Головко Виктор Евгеньевич

Петров Сергей Гаррикович

Калинин Денис Вадимович

Динамика

Примеры решения задач для самостоятельной работы студентов

Учебно-методическое пособие

Редактор и корректор В.А.БасоваТехн. редактор Л.Я.ТитоваТемплан 2010 г., поз. 69

Подп. к печати 25.05.10. Формат 60x84/16.
Бумага тип. №1. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 1.25 Усл. печ.л. 1,25
Тираж 100 экз. Изд.№ 69. Цена «С». Заказ

Ризограф ГОУ ВПО Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров,
198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4.